Авторы благодарят участников семинара кафедры небесной механики и гравиметрии ГАИШ за обсуждение работы.

Поступила 14 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М., ВЦ АН СССР, 1967.
2. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
3. *Дегтярев В. Г.* Об устойчивости орбит искусственных спутников Земли. Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 3.
4. *Нита М. М.* Орбитальная устойчивость стационарного спутника Земли на произвольной широте. Механика, Сб. перев. т. 5, вып. 123, М., «Мир», 1970, № 5.
5. *Мырзабеков Т.* О движении широтного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. В сб.: Проблемы механики управляемого движения, № 2. Изд-во Пермск. ун-та, 1973.
6. *Куницын А. Л., Шибанов А. С.* О поступательно-вращательном движении стационарного орбитального корабля. В сб.: Проблемы механики управляемого движения, № 3. Изд-во Пермск. ун-та, 1973.

УДК 531.36

О МАКСИМИЗАЦИИ СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Н. Н. Болотник

(Москва)

Для линейных колебательных систем рассматривается задача выбора оптимальных параметров, обеспечивающих максимальное значение степени устойчивости [1], Получены оценки степени устойчивости сверху. Сформулированы необходимые и достат очные условия достижимости верхней границы. Детально изучены системы с одной двумя и тремя степенями свободы. Вопросы, близкие к рассмотренным, ранее изучались в работах [1–4].

1. Постановка задачи. Рассматривается система, движение которой описывается линейным дифференциальным уравнением

$$Ax^{\cdot\cdot} + Bx^{\cdot} + Cx = 0 \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный вектор, A, B, C — матрицы размера $n \times n$, точка обозначает производную по времени. Уравнение (1.1) может описывать, например, малые колебания механической системы в окрестности положения равновесия $x = 0$. В [5] детально изучены вопросы устойчивости систем вида (1.1). Рассмотрим две задачи о выборе параметров системы.

Задача 1. Пусть A и C — заданные положительно определенные матрицы. Требуется выбрать вещественную матрицу B, такую, чтобы система (1.1) была устойчивой и чтобы ее степень устойчивости (степенью устойчивости для устойчивых систем называется величина $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 2n} |\operatorname{Re} \lambda_j^\circ|$ [1]) была максимальной. Через λ_j° ($j = 1, 2, \ldots, 2n$) обозначены корни характеристического полинома системы (1.1).

Задача 2. Пусть A и B — заданные положительно определенные матрицы. Требуется выбрать вещественную матрицу C, такую, чтобы система (1.1) была устойчивой и чтобы ее степень устойчивости была максимальной.

В задачах 1 и 2 матрица A, по условию, положительно определенная и, следовательно, неособенная, и система (1.1) эквивалентна системе

$$x^{\cdot\cdot} + A^{-1}Bx^{\cdot} + A^{-1}Cx = 0 \tag{1.2}$$

2. Основные результаты. Раскрыв характеристический определитель, получим характеристический полином системы (1.2) вида

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda) = \lambda^{2n} + \operatorname{tr}(A^{-1}B)\,\lambda^{2n-1} + a_{2n-2}(b_{ij}, c_{ij})\,\lambda^{2n-2} + \ldots \\ \ldots + a_1(b_{ij}, c_{ij})\,\lambda + R_1, \quad R_1 = \det C / \det A\end{aligned} \tag{2.1}$$

Запись $a_k(b_{ij}, c_{ij})$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n-2)$ означает, что коэффициенты при λ^k — функции элементов матриц B и C, символ tr обозначает след матрицы.

Используя соотношения

$$R_1 = \prod_{j=1}^{2n} \lambda_j^{\circ}, \qquad \operatorname{tr}(A^{-1}B) = -\sum_{j=1}^{2n} \operatorname{Re}\lambda_j^{\circ}$$

и то, что действительные части корней характеристического полинома устойчивой системы неположительны, можно доказать следующие утверждения.

Утверждение 1. Если A и C — заданные положительно определенные матрицы и система (1.2) устойчива, то

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant 2n} |\operatorname{Re}\lambda_j^{\circ}| \leqslant R_{2n}, \qquad R_{2n} = \sqrt[2n]{\det C / \det A}$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда все корни характеристического полинома равны $\lambda_j^{\circ} = -R_{2n}$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$.

Утверждение 2. Если A и B — заданные положительно определенные матрицы и система (1.2) устойчива, то

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant 2n} |\operatorname{Re}\lambda_j^{\circ}| \leqslant \operatorname{tr}(A^{-1}B) / 2n$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{Re}\lambda_j^{\circ} = -\operatorname{tr}(A^{-1}B) / 2n, \qquad j = 1, 2, \ldots, 2n$$

т. е. когда все корни характеристического полинома имеют вид

$$\overset{\circ}{\lambda}_{2s-1,2s} = -\operatorname{tr}(A^{-1}B) / 2n \pm i\Omega, \qquad s = 1, 2, \ldots, n$$

Из утверждения 1 следует, что характеристическим полиномом системы со степенью устойчивости, равной R_{2n}, является полином $\Delta(\lambda) = (\lambda + R_{2n})^{2n}$, коэффициенты которого

$$a_k = C_{2n}^k R_{2n}^{2n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2n \tag{2.2}$$

Символ C_{2n}^k обозначает число сочетаний из $2n$ элементов по k. Если матрицы A и C заданы, то коэффициенты характеристического полинома (2.1), исключая свободный член и равный единице коэффициент при λ^{2n}, являются определенными функциями элементов матрицы B. Приравняв коэффициенты полинома (2.1), зависящие от элементов матрицы B, соответствующим коэффициентам (2.2), получим систему $2n - 1$ уравнений (так как только $2n - 1$ коэффициентов характеристического полинома зависят от элементов матрицы B) для n^2 неизвестных элементов этой матрицы

$$\begin{aligned}&\operatorname{tr}(A^{-1}B) = C_{2n}^{2n-1} R_{2n}, \\ &a_l(b_{ij}, c_{ij}) = C_{2n}^{l} R_{2n}^{2n-l}, \quad l = 1, 2, \ldots, 2n-2\end{aligned} \tag{2.3}$$

Степень устойчивости системы (1.2) достигает верхней границы, равной R_{2n}, в классе вещественных матриц B (при заданных положительно определенных A и C) тогда и только тогда, когда система уравнений (2.3) имеет хотя бы одно вещественное решение относительно b_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Всякая вещественная матрица, элементы которой удовлетворяют системе уравнений (2.3), является оптимальной матрицей для задачи 1.

Из утверждения 2 следует, что характеристический полином системы со степенью устойчивости $\operatorname{tr}(A^{-1}B) / 2n$ равен

$$\Delta(\lambda) = \prod_{s=1}^{n} [(\lambda + \operatorname{tr}(A^{-1}B) / 2n)^2 + \Omega_s^2] \tag{2.4}$$

Последнее выражение позволяет выразить коэффициенты полинома как функции Ω_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$. Обозначим коэффициенты при λ^k, выраженные как функции Ω_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$, через $a_k(\Omega_s)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, 2n - 2)$. При заданных A и B коэффициенты $a_k(b_{ij}, c_{ij})$ $(k = 1, 2, \ldots, 2n - 2)$ и свободный член R_1 характеристического полинома (2.1) — определенные функции элементов матрицы c. Приравнивая коэффициенты характеристического полинома, зависящие от элементов матрицы C, соответствующим коэффициентам $a_k(\Omega_s)$, получим систему $2n - 1$ уравнений для n^2 неизвестных элементов этой матрицы

$$a_l(b_{ij}, c_{ij}) = a_l(\Omega_s), \quad l = 1, 2, \ldots, 2n-2, \quad R_1 = a_0(\Omega_s) \tag{2.5}$$

Степень устойчивости системы (1.2) достигает верхней границы, равной $\operatorname{tr}(A^{-1}B) / 2n$, в классе вещественных матриц C (при заданных положительно определенных A и B) тогда и только тогда, когда система уравнений (2.5) имеет хотя бы одно вещественное решение относительно c_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Всякая вещественная матрица, элементы которой удовлетворяют системе уравнений (2.5), является оптимальной матрицей для задачи 2. Отметим, что в системе (2.5) имеются n дополнительных произвольных вещественных параметров Ω_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$. Этот произвол можно использовать для удовлетворения некоторым условиям, например, для того, чтобы матрица C была положительно определенной.

3. Системы с $n \leqslant 3$. Рассмотрим одномерную, двумерную и трехмерную системы. Решая задачу 1, предположим что $A = E$ — единичная матрица, C — диагональная матрица

$$C = \operatorname{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_n^2), \qquad \omega_i^2 \neq 0, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

Решая задачу 2, предположим что $A = E$ — единичная матрица, B — диагональная матрица с положительными диагональными элементами

$$B = \operatorname{diag}(b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn})$$

Эти предположения не ограничивают общности, так как в задаче 1 матрицы A и C, а в задаче 2 матрицы A и B, по условию, положительно определены. Следовательно, одним неособенным преобразованием можно привести матрицу A к единичной, а матрицу C (в задаче 1) или B (в задаче 2) к диагональной с положительными диагональными элементами.

1) $n = 1$. В этом случае характеристический полином имеет вид $\Delta(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + \omega^2$.

Решение задачи 1. В соответствии с результатами, изложенными в п. 2, оптимальное значение b равно 2ω, и соответствующая максимальная степень устойчивости равна ω. Оптимальный параметр здесь определится единственным образом.

Замечание 1. Для произвольной размерности n в случае, когда $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \ldots = \omega_n^2 = \omega^2$, диагональная матрица $B = \operatorname{diag}(2\omega, 2\omega, \ldots, 2\omega)$ является оптимальной матрицей для задачи 1, а соответствующая степень устойчивости равна ω.

Решение задачи 2. В случае $n = 1$ равенство (2.4) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + \Omega^2 + b^2/4$$

Система (2.5) состоит из единственного уравнения, $c = b^2/4 + \Omega^2$, оптимальное значение $c = b^2 / 4 + \Omega^2$, а соответствующая степень устойчивости равна $b / 2$. В этом случае, в отличие от задачи 1, значение оптимального коэффициента определяется не однозначно, а с точностью до произвольного положительного слагаемого.

Замечание 2. Для произвольной размерности n в случае, когда $b_{11} = b_{22} = \ldots = b_{nn} = b$, диагональная матрица

$$C = \operatorname{diag}\left(\frac{b^2}{4} + \Omega_1^2,\ \frac{b^2}{4} + \Omega_2^2, \ldots,\ \frac{b^2}{4} + \Omega_n^2\right)$$

является оптимальной матрицей для задачи 2, а соответствующая степень устойчивости равна $b / 2$.

2) $n = 2$. *Решение задачи 1.* Система уравнений (2.3) в этом случае имеет вид

$$b_{11} + b_{22} = 4\sqrt{\omega_1\omega_2} \tag{3.1}$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21} = 6\omega_1\omega_2 \tag{3.2}$$

$$\omega_2^2 b_{11} + \omega_1^2 b_{22} = 4(\omega_1\omega_2)^{3/2} \tag{3.3}$$

Если $\omega_1^2 \neq \omega_2^2$, то b_{11}, b_{22} определяются однозначно из уравнений (3.1), (3.3), а произведение $b_{12}b_{21}$ однозначно определяется из (3.2)

$$b_{11} = \frac{4\omega_1\sqrt{\omega_1\omega_2}}{\omega_1+\omega_2}, \quad b_{22} = \frac{4\omega_2\sqrt{\omega_1\omega_2}}{\omega_1+\omega_2} \tag{3.4}$$

$$b_{12}b_{21} = (\omega_1 - \omega_2)^4/(\omega_1 + \omega_2)^2$$

Таким образом, при $\omega_1^2 \neq \omega_2^2$ оптимальная матрица определяется из уравнений (3.1) — (3.3) с точностью до произведения недиагональных элементов. Произведение $b_{12}b_{21}$ положительно, поэтому матрицу B, максимизирующую степень устойчивости, можно выбрать симметричной. Если наложить требование симметричности, то оптимальная матрица определяется с точностью до знака недиагональных элементов.

Если $\omega_1^2 = \omega_2^2$, то уравнения (3.1) и (3.3) линейно зависимы, и элементы b_{11}, b_{22} можно выбрать бесконечным числом способов. Заметим, что b_{11}, b_{22}, определяемые равенствами (3.4), являются решением системы (3.1), (3.3) и при $\omega_1^2 = \omega_2^2$. В этом случае $b_{12}b_{21} = 0$, и матрица может быть выбрана диагональной.

Получим условия положительной определенности оптимальной матрицы. Для положительной определенности необходимо и достаточно, чтобы $b_{11} > 0$ и $\det B > 0$. Выполнение первого неравенства следует из (3.4). Следовательно, оптимальная матрица положительно определена тогда и только тогда, когда

$$\det B = 6\omega_1\omega_2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 > 0$$

Это неравенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$3 - 2\sqrt{2} < \omega_1/\omega_2 < 3 + 2\sqrt{2} \tag{3.5}$$

В этом случае верхняя граница степени устойчивости может быть обеспечена диссипативными силами.

Решение задачи 2. Система уравнений (2.5) в двумерном случае имеет вид

$$c_{11} + c_{22} + b_{11}b_{22} = {}^3/_8\,(b_{11} + b_{22})^2 + \Omega_1^2 + \Omega_2^2 \tag{3.6}$$

$$c_{11}b_{22} + c_{22}b_{11} = {}^1/_2\,(\Omega_1^2 + \Omega_2^2)(b_{11} + b_{22}) + {}^1/_{16}\,(b_{11} + b_{22})^3 \tag{3.7}$$

$$c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = {}^1/_{256}\,(b_{11} + b_{22})^4 + {}^1/_{16}\,(b_{11} + b_{22})^2(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + \Omega_1^2\Omega_2^2 \tag{3.8}$$

Если $b_{11} \neq b_{22}$, то система уравнений (3.6), (3.7) при заданных Ω_1, Ω_2 имеет единственное решение относительно c_{11}, c_{22}

$$c_{11} = {}^1/_2\,(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + {}^1/_{16}\,(b_{11} - b_{22})^2 + {}^1/_4\, b_{11}^2$$

$$c_{22} = {}^1/_2\,(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + {}^1/_{16}\,(b_{11} - b_{22})^2 + {}^1/_4\, b_{22}^2$$

Из уравнения (3.8) определяется произведение $c_{12}c_{21}$

$$c_{12}c_{21} = {}^1/_{64}\,(b_{22} - b_{11})^4 + {}^1/_8\,(b_{22} - b_{11})^2(\Omega_1^2 + \Omega_2^2) + {}^1/_4\,(\Omega_1^2 - \Omega_2^2)^2$$

Это произведение положительно при любых Ω_1, Ω_2. Следовательно, оптимальную матрицу C можно выбрать симметричной.

Отметим, что матрицу C всегда можно выбрать положительно определенной. Действительно, для положительной определенности необходимо и достаточно, чтобы матрица была симметричной и чтобы выполнялись неравенства

$$c_{11} > 0, \quad c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} > 0$$

а эти неравенства непосредственно следуют соответственно из выражения для c_{11} и из уравнения (3.8).

Если $b_{11} = b_{22}$, то уравнения (3.6), (3.7) линейно зависимы, и диагональные элементы могут быть выбраны бесконечным числом способов.

Таким образом, в двумерном случае достигается верхняя граница степени устойчивости, равная $\sqrt{\omega_1\omega_2}$ для задачи 1 и $(b_{11} + b_{22}) / 4$ для задачи 2.

3) $n = 3$. Для трехмерной системы ограничимся доказательством существования матрицы, доставляющей степени устойчивости ее верхнюю границу.

Решение задачи 1. Уравнения (2.3) в трехмерном случае имеют вид

$$b_{11} + b_{22} + b_{33} = 6\sqrt[6]{\omega_1^2\omega_2^2\omega_3^2} \tag{3.9}$$

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2 + b_{11}b_{22} + b_{11}b_{33} + b_{23}b_{33} - b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21} - b_{13}b_{31} = \tag{3.10}$$

$$= 15\sqrt[6]{\omega_1^4\omega_2^4\omega_3^4} \tag{3.11}$$

$$(\omega_2^2 + \omega_3^2)\, b_{11} + (\omega_1^2 + \omega_3^2) b_{22} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\, b_{33} +$$
$$+ b_{11}b_{22}b_{33} - b_{11}b_{23}b_{32} - b_{12}b_{21}b_{33} + b_{12}b_{31}b_{23} + b_{13}b_{21}b_{32} - b_{13}b_{31}b_{22} =$$
$$= 20\omega_1\omega_2\omega_3$$

$$\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_1^2\omega_3^2 + \omega_2^2\omega_3^2 + \omega_2^2 b_{11}b_{33} + \omega_3^2 b_{11}b_{22} + \omega_1^2 b_{22}b_{33} - \tag{3.12}$$
$$- \omega_1^2 b_{23}b_{32} - \omega_3^2 b_{12}b_{21} - \omega_2^2 b_{13}b_{31} = 15\sqrt[6]{\omega_1^8\omega_2^8\omega_3^8}$$

$$\omega_2^2\omega_3^2 b_{11} + \omega_1^2\omega_3^2 b_{22} + \omega_1^2\omega_2^2 b_{33} = 6\sqrt[6]{\omega_1^{10}\omega_2^{10}\omega_3^{10}} \tag{3.13}$$

Если $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_3^2$, то решение существует (см. замечание 1). Рассмотрим случай, когда $\omega_1^2 \neq \omega_2^2$ (аналогично можно рассмотреть случаи $\omega_1^2 \neq \omega_3^2$, $\omega_2^2 \neq \omega_3^2$).

Уравнения (3.9), (3.13), представляющие собой систему двух линейных уравнений для трех неизвестных диагональных элементов матрицы B, имеют совместные решения, если $\omega_1^2 \neq \omega_2^2$, так как в этом случае ранг матрицы коэффициентов при неизвестных равен двум. Уравнения (3.10), (3.12), представляющие собой систему двух линейных уравнений для трех неизвестных произведений $b_{12}b_{21}$, $b_{13}b_{31}$, $b_{23}b_{32}$, имеют совместные решения при любых диагональных элементах матрицы B и любом значении произведения $b_{12}b_{21}$. Положим $b_{12} = 0$. Тогда уравнение (3.11) разрешимо относительно b_{21}, так как всегда можно сделать, чтобы $b_{13}b_{32} \neq 0$. Таким образом, существование решения доказано. Следовательно, верхняя граница степени устойчивости, равная $(\omega_1\omega_2\omega_3)^{1/3}$, достигается.

Достижимость верхней границы для задачи 2 доказывается аналогично.

Автор благодарит Ф. Л. Черноусько за постановку задачи и ценные замечания и В. Б. Лидского за обсуждение работы.

Поступила 27 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Цыпкин Я. З., Бромберг П. В.* О степени устойчивости линейных систем. Изв. АН СССР. ОТН, 1945, № 12.
2. *Цыпкин Я. З., Бромберг П. В.* Степень устойчивости линейных систем. Тр. НИСО, 1946, № 9.
3. *Цыпкин Я. З.* Теория линейных импульсных систем. М., Физматгиз, 1963.
4. *Фельдбаум А. А., Бутковский А. Г.* Методы теории автоматического управления. М., «Наука», 1971.
5. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962.