ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Лидский Э. А.* Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 9.
2. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
3. *Соляник А. И., Черноусько Ф. Л.* Приближенный метод синтеза оптимального управления системой, подверженной случайным возмущениям. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
4. *Fleming W. H.* Stochastic control for small noise intensities. SIAM J. Control, 1971, vol. 9, No. 3.
5. *Колмановский В. Б., Черноусько Ф. Л.* Задачи оптимального управления при неполной информации. Тр. 4-й зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам. М., 1971, вып.1.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.
7. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. М., «Наука», 1971.
8. *Fleming W. H.* Controlled diffusions under polynomial growth conditions. In: Control theory and calculus of variations. N. Y.— London, Acad. Press, 1969.
9. *Колмановский В. Б.* О приближенном синтезе некоторых стохастических квазилинейных систем управления. Автоматика и телемеханика, 1975, № 1.
10. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1965.

УДК 531.36

УСТОЙЧИВОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА НА ВОЗМУЩЕННОЙ КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

А. Л. Куницын, Т. Мырзабеков

(Москва, Чимкент)

Исследуется устойчивость относительного равновесия тела, центр масс которого вследствие наличия возмущающих или управляющих сил описывает некеплерову круговую орбиту, не содержащую притягивающего центра. Задача решается в ограниченной постановке с учетом только гравитационных моментов от центрального поля. С помощью теоремы Рауса и метода ее применения к аналогичным задачам, разработанного в [1], получены достаточные условия устойчивости найденных положений равновесия.

Задача об относительном равновесии твердого тела на круговой невозмущенной орбите и его устойчивости в последнее время была подробно исследована многими авторами [1,2]. Однако в некоторых прикладных задачах небесной механики и динамики космического полета возникает необходимость обобщения этой задачи на возмущенные круговые орбиты, реализующиеся вследствие наличия возмущающих или управляющих сил. Одним из примеров могут служить круговые некеплеровы орбиты в гравитационном поле осесимметричной планеты. В этой задаче [3] было доказано, в частности, и существование круговых орбит, плоскость которых параллельна экваториальной плоскости планеты.

Для космодинамики представляет интерес задача создания синхронного 24-х часового спутника на произвольной широте. Для центра масс спутника эта задача рассматривалась в [4,5], а в [6] было изучено поступательно-вращательное движение такого спутника в предположении, что к центру масс его приложена еще постоянная по величине реактивная сила. Было показано, что при круговых движениях центра масс, плоскость которых не содержит притягивающего центра, возможно относительное равновесие тела, не изученное ранее.

Цель данной работы — получение достаточных условий относительного равновесия твердого тела в ограниченной постановке задачи, т. е. в предположении, что движение тела относительно центра масс не влияет на движение его центра масс. Кроме того, будем предполагать, что движение тела относительно центра масс происходит лишь под действием гравитационного момента от центрального ньютоновского поля.

Пусть φ и r — соответственно постоянные широта и расстояние центра масс тела, движущегося по круговой орбите, от притягивающего центра O, с которым свяжем неподвижную прямоугольную систему координат $O\xi\eta\zeta$ с осью $O\zeta$, перпендикулярной плоскости орбиты. В центр масс тела C поместим начала двух прямоугольных систем координат: оси одной $(Cxyz)$, которую назовем орбитальной, направим соответственно по скорости центра масс, по касательной к меридиану и по радиусу-вектору центра масс, а оси другой $(Cx'y'z')$ — по главным осям инерции тела.

Используя известное разложение силовой функции притяжения твердого тела в центральном ньютоновском поле [1], составим выражение для измененной потенциальной энергии тела

$$W_* = \frac{3}{2}\frac{k}{r^3}(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2) - \frac{\omega^2}{2}(A\beta_1^2 + B\beta_2^2 + C\beta_3^2)$$

Здесь A, B, C — моменты инерции тела относительно осей Cx', Cy', Cz' соответственно, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ и $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ — направляющие косинусы оси Cz и $O\zeta$ относительно тех же (связанных) осей, ω — угловая скорость обращения центра масс по орбите, k — гравитационный параметр центрального поля.

Имея в виду воспользоваться теоремой Рауса для доказательства существования положений относительного равновесия тела и исследования их устойчивости, применим метод решения аналогичных задач, разработанный В. В. Румянцевым [2]. Для этого, исключив с помощью известных геометрических соотношений косинусы β_2 и γ_3, запишем W_* в виде

$$W_* = \frac{\omega^2}{2}[3\mu^2(A-C)\gamma_1^2 + 3\mu^2(B-C)\gamma_2^2 + (B-C)\beta_3^2 + (B-A)\beta_1^2 - B] \tag{1}$$

где $\mu^2 = \omega^2 r^3 / k$. Используя еще одно очевидное геометрическое соотношение

$$\chi \equiv \beta_1\gamma_1 + (1-\beta_1^2-\beta_3^2)^{1/2}\gamma_2 + \beta_3(1-\gamma_1^2-\gamma_2^2)^{1/2} - \sin\varphi = 0$$

будем искать экстремум функции

$$W = 2\omega^{-2}W_* + \lambda\chi$$

где λ — множитель Лагранжа. Тогда положениям относительного равновесия тела будут соответствовать решения уравнений

$$\frac{\partial W}{\partial\gamma_1} = 6\mu^2(A-C)\gamma_1 + \lambda\left[\beta_1 - \frac{\gamma_1\beta_3}{(1-\gamma_1^2-\gamma_2^2)^{1/2}}\right] = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial\beta_1} = 2(B-A)\beta_1 + \lambda\left[\gamma_1 - \frac{\beta_1\gamma_2}{(1-\beta_1^2-\beta_3^2)^{1/2}}\right] = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial\gamma_2} = 6\mu^2(B-C)\gamma_2 + \lambda\left[(1-\beta_1^2-\beta_3^2)^{1/2} - \frac{\gamma_2\beta_3}{(1-\gamma_1^2-\gamma_2^2)^{1/2}}\right] = 0$$

$$\frac{\partial W}{\partial\beta_3} = 2(B-C)\beta_3 + \lambda\left[(1-\gamma_1^2-\gamma_2^2)^{1/2} - \frac{\gamma_2\beta_3}{(1-\beta_1^2-\beta_3^2)^{1/2}}\right] = 0$$

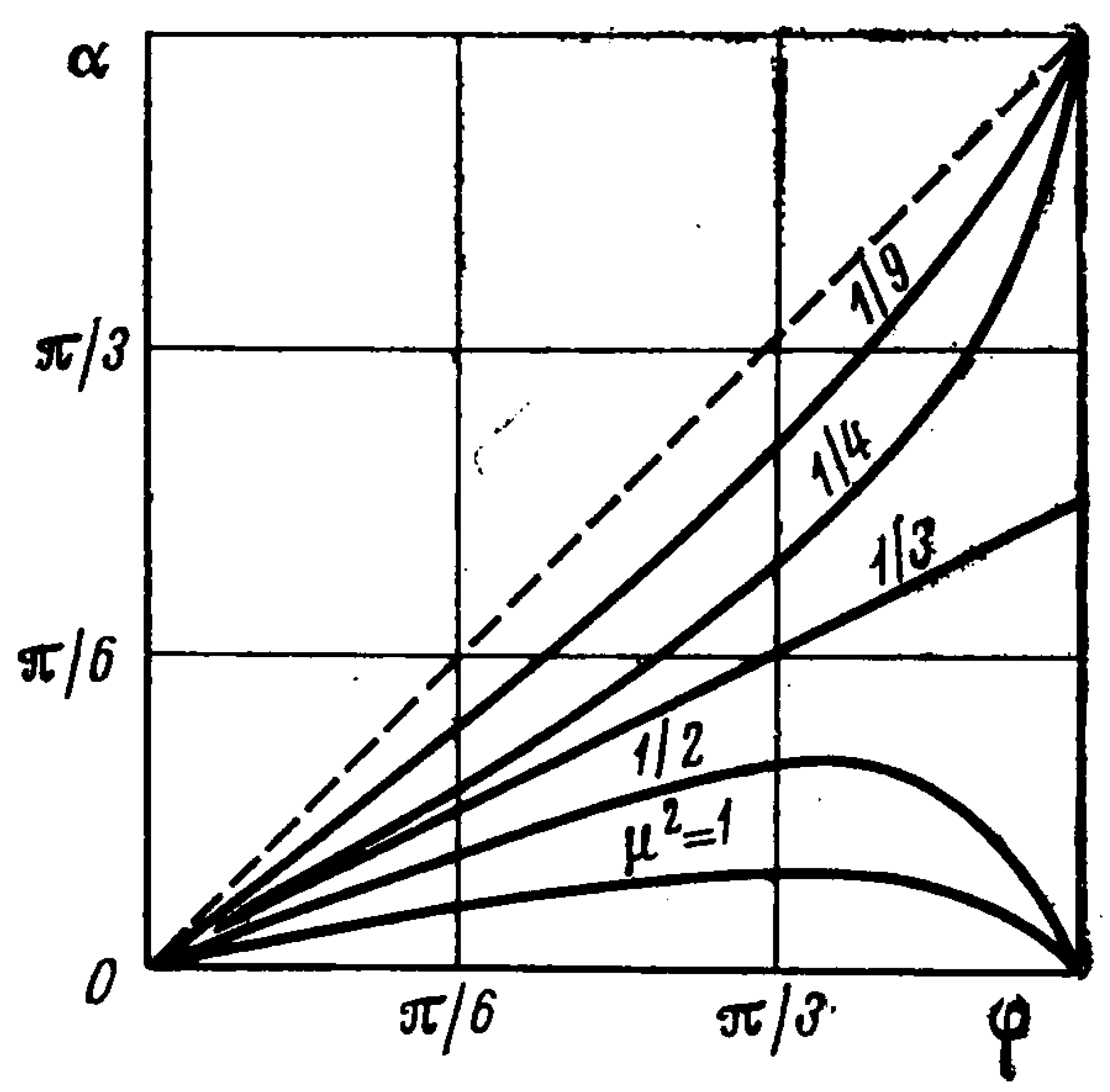
дающие условный экстремум функции (1). Это решение имеет вид

$$\gamma_1 = \beta_1 = 0, \quad \gamma_2 = \sin\alpha, \quad \beta_3 = \sin(\varphi-\alpha) \tag{2}$$

$$\lambda = (C-B)\frac{\sin 2(\varphi-\alpha)}{\cos\varphi}, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\varphi}{3\mu^2 + \cos 2\varphi}$$

и соответствует положению относительного равновесия тела, в котором одна из его главных осей инерции (Cx') совпадает со скоростью центра масс, а две другие составляют с осями орбитальной системы угол α, определяемый последней формулой (2).

Найденное положение равновесия переходит в известное положение равновесия твердого тела на круговой кеплеровой орбите при $\varphi = 0$ независимо от величины μ. Любопытно отметить, что это двухпараметрическое семейство относительных равновесий не зависит от геометрии масс тела и радиуса орбиты, а целиком определяется ее широтой φ и параметром μ. На фигуре представлена зависимость $\alpha(\varphi)$ для разных значений μ.



Для исследования устойчивости найденных решений запишем условия положительной знакоопределенности функции W, что в соответствии с теоремой Рауса даст достаточные условия устойчивости.

Составляя вторые производные от W с учетом соотношений (2), получим на основании критерия Сильвестра следующие условия положительной знакоопределенности функции W:

$$(B - C)(1 - \Phi) > 0, \qquad A - C + (C - B)\Phi > 0 \tag{3}$$

$$[C - A + (B - C)\Phi][(B - C)\Phi + A - B] + \frac{3\mu^2 \sin^2\varphi}{p}(B - C)^2 > 0$$

$$(B - C)^2 F(\mu^2, \varphi) > 0$$

Здесь

$$p = 9\mu^4 + 6\mu^2 \cos 2\varphi + 1, \qquad \Phi = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1 + 3\mu^2}{\sqrt{p}}\right)$$

$$F(\mu^2, \varphi) = \frac{6(1 + 3\mu^2)^2 \mu^2}{1 + 6\mu^2 \cos^2\varphi + 9\mu^4 + \sqrt{p}\,(1 + 3\mu^2)}$$

Видно, что при $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi / 2$ имеем $1 - \Phi > 0$, и следовательно, первое из условий (3) дает $B > C$. Третье из неравенств (3) после элементарных вычислений неожиданным образом приводится к виду

$$(C - A)(A - B) > 0$$

откуда с учетом ранее полученного неравенства $B > C$ выводим известное условие В. В. Белецкого

$$B > A > C \tag{4}$$

Покажем, что второе из условий (3) удовлетворяется при всех μ и φ $0 < \mu < \infty$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi / 2$) при выполнении (4). Для этого запишем это неравенство в виде

$$\varkappa(B - A) > C - A, \qquad \varkappa = \frac{1 + 3\mu^2 - \sqrt{p}}{1 + 3\mu^2 + \sqrt{p}} \tag{5}$$

Как легко установить, при всех μ и φ из указанного интервала имеем $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$, и следовательно, (5) всегда выполняется, если имеет место (4).

Из последнего неравенства (3) при $B \neq C$ получим

$$F(\mu^2, \varphi) > 0$$

что, очевидно, имеет место во всем рассматриваемом интервале изменения μ и φ.

Таким образом, проведенное исследование показывает, что рассмотренное положение относительного равновесия может быть устойчивым при всех значениях широты φ, а достаточные условия устойчивости полностью совпадают с условиями В. В. Белецкого (4) и не содержат параметров орбиты центра масс.

Авторы благодарят участников семинара кафедры небесной механики и гравиметрии ГАИШ за обсуждение работы.

Поступила 14 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М., ВЦ АН СССР, 1967.
2. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
3. *Дегтярев В. Г.* Об устойчивости орбит искусственных спутников Земли. Инж. ж., 1963, т. 3, вып. 3.
4. *Нита М. М.* Орбитальная устойчивость стационарного спутника Земли на произвольной широте. Механика, Сб. перев. т. 5, вып. 123, М., «Мир», 1970, № 5.
5. *Мырзабеков Т.* О движении широтного спутника в нормальном гравитационном поле Земли. В сб.: Проблемы механики управляемого движения, № 2. Изд-во Пермск. ун-та, 1973.
6. *Куницын А. Л., Шибанов А. С.* О поступательно-вращательном движении стационарного орбитального корабля. В сб.: Проблемы механики управляемого движения, № 3. Изд-во Пермск. ун-та, 1973.

УДК 531.36

О МАКСИМИЗАЦИИ СТЕПЕНИ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОЙ КОЛЕБАТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

Н. Н. Болотник

(Москва)

Для линейных колебательных систем рассматривается задача выбора оптимальных параметров, обеспечивающих максимальное значение степени устойчивости [1]. Получены оценки степени устойчивости сверху. Сформулированы необходимые и достат очные условия достижимости верхней границы. Детально изучены системы с одной двумя и тремя степенями свободы. Вопросы, близкие к рассмотренным, ранее изучались в работах [1–4].

1. Постановка задачи. Рассматривается система, движение которой описывается линейным дифференциальным уравнением

$$Ax^{\cdot\cdot} + Bx^{\cdot} + Cx = 0 \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный вектор, A, B, C — матрицы размера $n \times n$, точка обозначает производную по времени. Уравнение (1.1) может описывать, например, малые колебания механической системы в окрестности положения равновесия $x = 0$. В [5] детально изучены вопросы устойчивости систем вида (1.1). Рассмотрим две задачи о выборе параметров системы.

Задача 1. Пусть A и C — заданные положительно определенные матрицы. Требуется выбрать вещественную матрицу B, такую, чтобы система (1.1) была устойчивой и чтобы ее степень устойчивости (степенью устойчивости для устойчивых систем называется величина $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant 2n} |\operatorname{Re} \lambda_j^\circ|$ [1]) была максимальной. Через λ_j° ($j = 1, 2, \ldots, 2n$) обозначены корни характеристического полинома системы (1.1).

Задача 2. Пусть A и B — заданные положительно определенные матрицы. Требуется выбрать вещественную матрицу C, такую, чтобы система (1.1) была устойчивой и чтобы ее степень устойчивости была максимальной.