УДК 62—50

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ НЕКОТОРЫМИ КВАЗИЛИНЕЙНЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ

В. Б. Колмановский

(Москва)

Рассматривается задача оптимального управления квазилинейными системами при наличии внешних случайных возмущений типа белого шума. Получены последовательные приближения к оптимальному управлению и установлены оценки погрешности по траектории и оптимизируемому функционалу.

1. Ряд работ в области оптимального управления стохастическими системами, появившихся за последнее время, посвящен исследованию управляемых систем, содержащих некоторые малые члены. Это объясняется, в частности, тем, что, хотя основные постановки задач стохастического управления известны довольно давно [1,2], однако сколько-нибудь законченные результаты удается получить лишь для линейных систем и квадратического функционала. Возникает вопрос о построении приближенного оптимального управления путем разложения по малому параметру. Для случая, когда интенсивности внешних возмущений малы, т. е. в роли порождающей системы выступает детерминированная управляемая система, задача синтеза приближенного управления рассмотрена в работах [3–5]. В работах [3–5] предполагается, что решение задачи управления детерминированной системой известно и получено в виде синтеза.

Наряду с этим подходом к задаче приближенного синтеза оптимального управления возможен и иной подход, развиваемый ниже, при котором в роли порождающей выступает линейная управляемая стохастическая система с квадратическим критерием, для которой оптимальное управление можно получить в явном аналитическом виде. Точнее говоря, в данной работе предполагается, что управляемая система имеет вид

$$x^{\cdot}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) + \varepsilon f(t, x(t)) + \sigma(t)\,\xi^{\cdot}(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \qquad x(0) = a_0 \tag{1.1}$$

Здесь вектор фазовых координат $x(t)$ принадлежит евклидову пространству E_n размерности n, управление $u \in E_e$, винеровский процесс $\xi \in E_n$, заданные матрицы A, B, σ имеют измеримые ограниченные элементы на отрезке $[0, T]$, малый параметр $\varepsilon \geqslant 0$, постоянная $T \in [0, \infty)$, вектор $a_0 \in E_n$.

Винеровский процесс $\xi(t)$ нормирован условиями

$$\xi(0) = 0, \qquad M\xi(t) = 0, \qquad M\xi_i^2(t) = t$$

где M — математическое ожидание. Матрица σ при шуме ξ в (1.1) такова, что $\sigma\sigma'$, где штрих — знак транспонирования, положительно определена. Наконец, считается, что вектор-функция $f(t, x) \in E_n$ измерима по совокупности аргументов, имеет ограниченную производную по x и удовлетворяет требованиям

$$|f(t, x_1)|^2 \leqslant \alpha_2 + \alpha_3 |x_1|^2, \qquad \left|\frac{\partial f(t, x)}{\partial x}\right| \leqslant \alpha_1 \tag{1.2}$$

Здесь x, x_1 — произвольные векторы из E_n, заданные постоянные $\alpha_i \geqslant 0$ и через $|x|$ обозначена евклидова норма вектора x. Управление $u(t)$ требуется выбрать так, чтобы минимизировать функционал

$$J(u) = M\left[x'(T)\,L_1 x(T) + \int_0^T (x'(s)\,L_2(s)\,x(s) + u'(s)\,L_3(s)\,u(s))\,ds\right] \tag{1.3}$$

где L_i — заданные матрицы с измеримыми ограниченными элементами, причем L_1, L_2 неотрицательно определены, а $L_3(t)$ равномерно положительно определена на отрезке $[0, T]$.

При сделанных предположениях и управлении $u(t) = 0$ существует и притом единственное решение задачи (1.1) [6].

Если же $\varepsilon = 0$, то разрешима в явном аналитическом виде задача оптимального управления (1.1), (1.3).

Приведем некоторые формулы [7], необходимые для дальнейшего. При $\varepsilon = 0$ оптимальное управление $u_0(t)$ равняется

$$u_0(t) = -L_3^{-1} B'P(t)\,x(t) \tag{1.4}$$

где квадратная неотрицательно-определенная матрица $P(t)$ размером $n \times n$ — решение уравнения

$$\begin{gathered} P^{\cdot}(t) = -P(t)A(t) - A'(t)P(t) - L_2(t) + \\ + P(t)B(t)L_3^{-1}(t)B'(t)P(t) = 0, \quad P(T) = L_1 \end{gathered} \tag{1.5}$$

2. Обозначим через $V(t, x)$ функцию Беллмана задачи (1.1), (1.3). На основании [8] она является единственным решением задачи Коши

$$\begin{gathered} LV + \varepsilon f' \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)' B_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) + x'L_2x = 0 \\ L = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\left(\sigma\sigma' \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right), \quad B_1 = BL_3^{-1}B', \quad V(T, x) = x'L_1x \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь и далее без ограничения общности [9] можно положить $A = 0$. При этом оптимальное управление $v(t, x)$ равняется

$$v(t, x) = -{}^1/_2\, L_3^{-1}(t)\,B'(t)\,\partial V(t, x)\,/\,\partial x \tag{2.2}$$

В частности, при $\varepsilon = 0$ функция Беллмана $V_0(t, x)$ ввиду [7] есть

$$V_0(t, x) = x'P(t)\,x \tag{2.3}$$

Опишем теперь алгоритм построения i-го приближения к оптимальному управлению. Представим $V(t, x)$ в виде

$$V(t, x) = \sum_{j=0}^{i} \varepsilon^j V_j(t, x) + r_i(t, x) \tag{2.4}$$

Здесь V_0 задается (2.3), уравнения для V_j получаются подстановкой (2.4) в (2.1) и приравниванием членов при ε^j, не содержащих r_i, все же остальные члены определяют уравнение для r_i. Зададим i-е приближение $u_i(t, x)$ к оптимальному управлению (2.2)

$$u_i(t, x) = -\frac{1}{2} L_3^{-1}(t)\,B'(t) \sum_{j=0}^{i} \varepsilon^j \frac{\partial V_j}{\partial x} \tag{2.5}$$

Для обоснования формулы (2.5) необходимо показать, что разность $V(0, a_0) - J(u_i)$ — величина порядка ε^{i+1}. Это доказательство для разных i осуществляется по одной схеме, состоящей в том, что образуются два решения системы (1.1) — одно при управлении (2.5), а другое при управлении (2.2), (2.4) и затем оценивается момент разности этих процессов.

Поясним сказанное подробнее на примере нулевого приближения. В этом случае из уравнения для r_0 следует, что $r_0(t, x)$ есть функция Беллмана следующей задачи управления: найти управление ω, минимизирующее функционал

$$M = \int_0^T [2\varepsilon y'(t)\,P(t)\,f(t, y(t)) + \omega'(t)\,L_3(t)\,\omega(t)]\,dt \tag{2.6}$$

на траекториях $y(t)$ системы стохастических дифференциальных уравнений Ито

$$dy(t) = [\varepsilon f(t, y(t)) - B_1Py(t) + B\omega]\,dt + \sigma d\,\xi(t) \tag{2.7}$$

Существование решения задачи управления (2.7), (2.6) следует из существования решения уравнения Беллмана (2.5). Обозначим через $\omega_0(t, y)$ оптимальное управление в задаче (2.6), (2.7). В силу [8], (2.6), (2.7) существует такая ограниченная на $[0, T]$ матрица $W(t)$, что

$$\frac{\partial r_0(t_0, x_0)}{\partial x} = M\int_{t_0}^{T} W(t)\frac{\partial}{\partial y}[2\varepsilon y'(t, \omega_0) f(t, y(t, \omega_0))]\,dt$$

Отсюда и из [9] вытекает, что

$$|\partial r_0(t, x) / \partial x| \leqslant \varepsilon c(1 + |x|) \tag{2.8}$$

Таким образом, оптимальное управление v в задаче (1.1), (1.3) отличается от управления (1.4) на величину, растущую при $|x| \to \infty$ не быстрее линейной функции от $|x|$. Поэтому с учетом (2.8) и [6] заключаем, что

$$|J(u_0) - J(v)| \leqslant \varepsilon c(1 + |a_0|^2) \tag{2.9}$$

Замечание. Подставим $x(t, u_0)$ в управление (1.4), а $x(t, v)$ в оптимальное управление и образуем разность полученных величин. Тогда аналогично (2.9) заключаем, что математическое ожидание квадрата этой разности имеет порядок ε^2, т. е. в этом смысле разность оптимального управления (2.17) и приближенного управления (1.4) имеет порядок ε^2.

3. Дальнейшие приближения к оптимальному управлению определяются формулой (2.5). Из (2.4), (2.1) видно, что все V_i $i \geqslant 1$ определяются квадратурами через функцию f, предыдущие приближения V_j, $j \leqslant i - 1$ и фундаментальное решение $\alpha(t, x, \tau, y)$ линейного однородного параболического уравнения

$$L_0 q = 0, \qquad L_0 = L - x'PB_1\frac{\partial}{\partial x}$$

Нетрудно вычислить, что

$$\alpha(t, x, \tau, y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \Delta}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(y - m)'D^{-1}(y - m)\right\} \tag{3.1}$$

$$m = z_1(t, \tau), \qquad D = \int_t^{\tau} z_1(s, \tau)\sigma\sigma' z_1'(s, \tau)\,ds$$

Здесь z_1 — фундаментальное решение уравнения (2.7) при $\varepsilon = B = \sigma = 0$, Δ — определитель матрицы D.

Справедливость дальнейших приближений к оптимальному приближению обосновывается так же, как и справедливость нулевого приближения (1.4). Дополнительно, однако, необходимо показать, что $\partial V_i / \partial x$ растет при $|x| \to \infty$ не быстрее линейной функции $|x|$, а $\partial^2 V / \partial x^2$ растет не быстрее некоторой степени $|x|$.

Эти оценки для всех приближений устанавливаются одинаковым образом. Поэтому ограничимся их обоснованием для V_1. Из (2.4) вытекает уравнение для определения V_1

$$L_0 V_1 + 2f'Px = 0, \qquad V_1(T, x) = 0 \tag{3.2}$$

Значит, подобно выводу (2.8), получаем, что $\partial V_1 / \partial x$ растет как линейная функция $|x|$.

Для оценки второй производной $\partial^2 V_1 / \partial x^2$ заметим, что ввиду (3.2), (3.1) функция V_1 растет при $|x| \to \infty$ не быстрее многочлена второй степени от $|x|$. Следовательно, с учетом неравенства (см. [10], гл. 3)

$$|\partial^2 V_1(t, x) / \partial x^2| \leqslant c[1 + |x|^2]$$

Поступила 10 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Лидский Э. А.* Аналитическое конструирование регуляторов в системах со случайными свойствами. Автоматика и телемеханика, 1961, т. 22, № 9.
2. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
3. *Соляник А. И., Черноусько Ф. Л.* Приближенный метод синтеза оптимального управления системой, подверженной случайным возмущениям. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
4. *Fleming W. H.* Stochastic control for small noise intensities. SIAM J. Control, 1971, vol. 9, No. 3.
5. *Колмановский В. Б., Черноусько Ф. Л.* Задачи оптимального управления при неполной информации. Тр. 4-й зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам. М., 1971, вып.1.
6. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М., «Наука», 1965.
7. *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. М., «Наука», 1971.
8. *Fleming W. H.* Controlled diffusions under polynomial growth conditions. In: Control theory and calculus of variations. N. Y.— London, Acad. Press, 1969.
9. *Колмановский В. Б.* О приближенном синтезе некоторых стохастических квазилинейных систем управления. Автоматика и телемеханика, 1975, № 1.
10. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М., «Наука», 1965.

УДК 531.36

УСТОЙЧИВОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНОГО РАВНОВЕСИЯ ТЕЛА НА ВОЗМУЩЕННОЙ КРУГОВОЙ ОРБИТЕ

А. Л. Куницын, Т. Мырзабеков

(Москва, Чимкент)

Исследуется устойчивость относительного равновесия тела, центр масс которого вследствие наличия возмущающих или управляющих сил описывает некеплерову круговую орбиту, не содержащую притягивающего центра. Задача решается в ограниченной постановке с учетом только гравитационных моментов от центрального поля. С помощью теоремы Рауса и метода ее применения к аналогичным задачам, разработанного в [1], получены достаточные условия устойчивости найденных положений равновесия.

Задача об относительном равновесии твердого тела на круговой невозмущенной орбите и его устойчивости в последнее время была подробно исследована многими авторами [1,2]. Однако в некоторых прикладных задачах небесной механики и динамики космического полета возникает необходимость обобщения этой задачи на возмущенные круговые орбиты, реализующиеся вследствие наличия возмущающих или управляющих сил. Одним из примеров могут служить круговые некеплеровы орбиты в гравитационном поле осесимметричной планеты. В этой задаче [3] было доказано, в частности, и существование круговых орбит, плоскость которых параллельна экваториальной плоскости планеты.

Для космодинамики представляет интерес задача создания синхронного 24-х часового спутника на произвольной широте. Для центра масс спутника эта задача рассматривалась в [4,5], а в [6] было изучено поступательно-вращательное движение такого спутника в предположении, что к центру масс его приложена еще постоянная по величине реактивная сила. Было показано, что при круговых движениях центра масс, плоскость которых не содержит притягивающего центра, возможно относительное равновесие тела, не изученное ранее.