Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 539.374

О РАЗРЫВАХ НАПРЯЖЕНИЙ И ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ СЖИМАЕМОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЛА

И. С. Дегтярев

(Свердловск)

Исследуются разрывы напряжений в случае модели тела, описанной в работах [1,2]. Формулируется принцип максимума скорости диссипации энергии и показывается, что при выпуклых условиях текучести на поверхностях разрыва напряжений скорости деформаций обращаются в нуль. Выводятся соотношения, связывающие компоненты тензора напряжений по обе стороны от поверхности разрыва.

Разрывы напряженного состояния в трехмерном идеальном жесткопластическом материале исследовались в [3]. Для произвольного условия пластичности выведены [3] соотношения на поверхностях разрыва напряженного состояния, накладывающие ограничения на разрыв тензора напряжений, и получены следствия этих соотношений для условий пластичности Мизеса и Треска. В [4] рассматривались разрывы напряжений в случае зависимости условия пластичности от первого инварианта тензора напряжений.

Экстремальные принципы в теории несжимаемого пластического тела рассматривались рядом авторов (см. [5]). Основанные на экстремальных принципах свойства предельной нагрузки для строительных конструкций были впервые выявлены в работах [5,6].

Ниже на основе сформулированного принципа максимума скорости диссипации энергии доказываются кинематическая и статическая теоремы о предельной нагрузке для сжимаемого жесткопластического тела.

1. Будем рассматривать изотропный жесткопластический материал, условие пластичности которого задано в виде

$$\Phi(\sigma, \Sigma_2, \Sigma_3) = 0, \quad \sigma = {}^1/_3\sigma_{ii} \tag{1.1}$$

Здесь σ — первый инвариант тензора напряжений, Σ_2, Σ_3 — соответственно второй и третий инварианты девиатора напряжений.

Ассоциированный закон течения для жесткопластического тела имеет вид (ε_{ij}' — компоненты тензора скоростей деформаций)

$$\varepsilon_{ij}' = \lambda_1 p_{ij}, \quad \lambda_1 \geqslant 0, \quad p_{ij} = \partial\Phi / \partial\sigma_{ij}$$

Предположим, что для рассматриваемого материала, кроме того, определена функция нагружения и ассоциированный с ней закон течения [7]

$$f = \varphi(\sigma) - e = 0, \quad e = {}^1/_3 e_{ii} \tag{1.2}$$

$$\varepsilon_{ij}'' = \lambda_2 q_{ij}, \quad q_{ij} = \partial f / \partial\sigma_{ij} \tag{1.3}$$

Здесь e_{ij} — тензор пластических деформаций, $\varphi(\sigma)$ — некоторая эмпирическая зависимость, ε_{ij}'' — компоненты тензора скоростей деформаций, λ_2 — неопределенный множитель.

В работах [2,7] отмечалось, что функция нагружения (1.2) в пространстве напряжений интерпретируется плоскостью постоянного гидростатического давления, положение которой определяется величиной объемной деформации e.

Плоскость нагружения (1.2) совместно с поверхностью текучести (1.1) составляет кусочно-гладкую поверхность нагружения, в угловых точках которой выполняется ассоциированный закон пластического течения [1,2]

$$\varepsilon_{ij} = {}^1/_2\,(v_{i,j} + v_{j,i}) = \lambda_1 p_{ij} + \lambda_2 q_{ij} \tag{1.4}$$

Дифференцируя функцию нагружения (1.2) по времени и учитывая закон течения (1.3), для неопределенного множителя λ_2 получаем выражение

$$\lambda_2 = 3d\sigma \,/\, dt \tag{1.5}$$

2. Предположим, что в деформируемом теле с ассоциированным законом течения (1.4) существует некоторая поверхность S, на которой, вообще говоря, компоненты тензоров напряжений и скоростей деформаций претерпевают разрыв, а скорости перемещения непрерывны. Считаем также, что материал с обеих сторон от поверхности S находится в пластическом состоянии.

Из условия непрерывности контактирующих напряжений на поверхности S следует

$$[\sigma_{ij}]\,\nu_j = (\sigma_{ij}^+ - \sigma_{ij}^-)\,\nu_j = 0 \tag{2.1}$$

Здесь индексами плюс и минус отмечены напряжения на противоположных сторонах поверхности S, ν_i — вектор единичной нормали к поверхности S.

Геометрические условия совместности на поверхности S имеют вид [8]

$$[\varepsilon_{ij}] = {}^1/_2\,(\omega_i\nu_j + \omega_j\nu_i) = [\lambda_1 p_{ij} + \lambda_2 q_{ij}], \quad \omega_i = [v_{i,j}]\,\nu_j \tag{2.2}$$

Определим в точке поверхности S локальную систему координат x_i таким образом, чтобы нормаль ν_i совпадала с направлением оси x_3. Тогда

$$\nu_1 = \nu_2 = 0, \quad \nu_3 = 1 \tag{2.3}$$

В локальной системе координат (2.3) из (2.1), (2.2) следует

$$[\sigma_{i3}] = 0, \quad [\varepsilon_{11}] = [\varepsilon_{12}] = [\varepsilon_{22}] = 0 \tag{2.4}$$

Из соотношений (2.4) на поверхности S получаем

$$[\sigma_{ij}][\varepsilon_{ij}] = 0 \tag{2.5}$$

По виду физических соотношений (1.4) можно установить, что для рассматриваемой модели тела вектор скоростей деформаций не ортогонален к поверхности текучести. Последнее обстоятельство вызвано способностью материала необратимо изменять свой объем независимо от того, удовлетворяет ли напряженное состояние условию пластичности (1.1) или нет.

Величину $\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - {}^1/_3\lambda_2 q_{kk}\delta_{ij}$ в отличие от девиатора

$$\varepsilon_{ij}^\circ = \varepsilon_{ij} - {}^1/_3\,(\lambda_1 p_{kk} + \lambda_2 q_{kk})\,\delta_{ij}$$

условимся называть неполным девиатором скоростей деформаций.

В случае рассматриваемой модели постулат Драккера следует формулировать по отношению к компонентам неполного девиатора скоростей деформаций

$$\varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}, \qquad \varepsilon = \frac{d\varphi}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt}$$

так как вектор неполного девиатора скоростей деформаций пропорционален вектор-градиенту к поверхности текучести (1.1). Это обстоятельство, как будет показано ниже, дает возможность сформулировать принцип максимума скорости диссипации энергии для пластического формоизменения, сопровождающегося «ассоциированной» сжимаемостью, и необратимого сжатия независимо.

Из принципа максимума скорости диссипации энергии, являющегося следствием постулата Драккера, сформулированного относительно компонент ε_{ij}^*, для невогнутых поверхностей текучести следует

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^\circ)\,\varepsilon_{ij}^* \geqslant 0 \tag{2.6}$$

Здесь σ_{ij} — действительные значения компонент напряжений, соответствующих данному распределению величин ε_{ij}^*, σ_{ij}° — компоненты любого возможного напряженного состояния, удовлетворяющего неравенству

$$\Phi\,(\sigma^\circ,\ \Sigma_2^\circ,\ \Sigma_3^\circ) \leqslant 0$$

В случае строго выпуклых поверхностей текучести неравенство (2.6) можно усилить и записать в виде

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^\circ)\,\varepsilon_{ij}^* > 0 \tag{2.7}$$

Отметим, что соотношения (2.6), (2.7) выражают лишь принцип максимума скорости диссипации энергии, затраченной на пластическое формоизменение и ассоциированное объемное изменение тела.

Для материалов, способных изменять свой объем при гидростатическом сжатии, следует сформулировать дополнительный принцип максимума скорости диссипации по отношению к объемному течению, описываемому уравнением (1.3). Принцип максимума скорости диссипации энергии при гидростатическом сжатии формулируем следующим образом: при фиксированном значении величины объемной деформации e для любого данного значения скорости объемного изменения ε имеет место неравенство

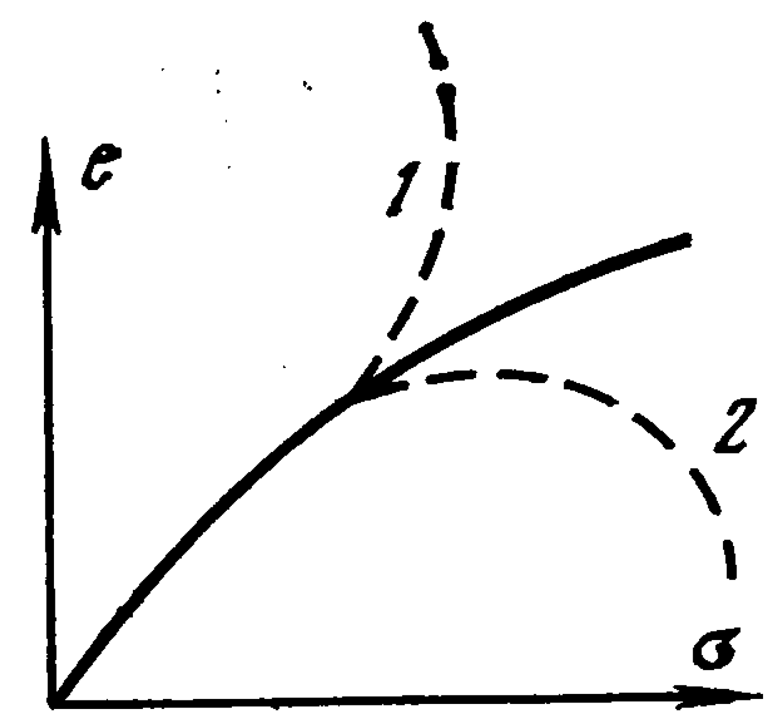
$$(\sigma - \sigma^\circ)\,\varepsilon \geqslant 0 \tag{2.8}$$

Здесь σ — действительное значение гидростатического давления, соответствующее данному значению ε, σ — любое возможное значение гидростатического давления, удовлетворяющее неравенству

$$f\,(\sigma^\circ,\ e) \leqslant 0 \tag{2.9}$$

Неравенство (2.8) накладывает ограничения на вид функции объемного нагружения (1.2).

Действительно, из (2.9) следует $\varphi(\sigma^\circ) \leqslant \varphi(\sigma)$. Так как функция $\varphi(\sigma)$ монотонная (из качественной картины сжатия), то $\sigma - \sigma^\circ > 0$, и при нагружении $(d\sigma / dt > 0)$ из (2.8) вытекает $d\varphi / d\sigma \geqslant 0$, т. е. на кривой $e = \varphi(\sigma)$ не может быть участков, показанных пунктирной линией (см. фигуру).



Участок пунктирной кривой 1 означает, что необратимая объемная деформация в теле возникает при снижающемся среднем напряжении, т. е. любое дополнительное среднее напряжение $\delta\sigma$ совершает на приращении деформации δe отрицательную работу $\delta W = \delta\sigma\delta e$. По аналогии с теорией пластичности несжимаемого тела сжимаемый материал со свойством $\delta W < 0$ будем называть неустойчивым. Примером устойчивого сжимаемого материала, для которого $\delta W > 0$, служит пластическое тело с функцией объемного нагружения, изображенной на фигуре сплошной линией. Очевидно, что изображенный пунктиром участок кривой 2 противоречит закону сохранения энергии.

Таким образом, дополнительный принцип максимума скорости диссипации энергии, записанный в виде (2.8), накладывает условие устойчивости на свойства сжимаемого материала.

В случае, если кривая $e = \varphi(\sigma)$ не содержит прямолинейных участков, на которых, согласно соотношению

$$\varepsilon = \frac{d\varphi}{d\sigma}\frac{d\sigma}{dt}$$

значение величины ε может соответствовать различным точкам кривой объемного нагружения, неравенству (2.8) можно придать вид

$$(2.10) \qquad (\sigma - \sigma^\circ)\,\varepsilon > 0$$

Используя принцип максимума скорости диссипации энергии в виде (2.7), на поверхности S можем записать

$$(2.11) \qquad [\sigma_{ij}][\varepsilon_{ij}] - 3\,[\sigma][\varepsilon] > 0$$

Из соотношений (2.5), (2.11) на поверхности S имеем

$$(2.12) \qquad (\sigma^+ - \sigma^-)\,\varepsilon^+ + (\sigma^- - \sigma^+)\,\varepsilon^- < 0$$

С другой стороны, из принципа максимума скорости диссипации (2.8) следует

$$(2.13) \qquad (\sigma^+ - \sigma^-)\,\varepsilon^+ \geqslant 0, \qquad (\sigma^- - \sigma^+)\,\varepsilon^- \geqslant 0$$

Сравнивая (2.12), (2.13), заключаем, что на поверхности S будет $\varepsilon^+ = \varepsilon^- = 0$. Отсюда и из соотношений (2.5), (2.11) находим

$$(2.14) \qquad \varepsilon_{ij}{}^+ = \varepsilon_{ij}{}^- = 0$$

Следовательно, для выпуклых поверхностей текучести в рамках рассматриваемой модели тела на поверхности разрыва напряжений компоненты тензора скоростей деформаций обращаются в нуль.

Из ассоциированного закона течения (1.4) и равенства (2.14) следует

(2.15) $\lambda_1^{\pm} = \lambda_2^{\pm} = 0$

Умножая соотношения (2.2) на ν_j и суммируя по повторяющимся индексам, с учетом (2.15) получаем $\omega_i = 0$. Отсюда следует, что первые производные скоростей перемещений непрерывны на поверхности S.

3. Для получения ограничений на разрывы напряжений следует, как предлагалось в [3], продифференцировать уравнение ассоциированного закона течения (1.4) по координатам $x_k, x_m, \ldots, x_l$ и воспользоваться геометрическими условиями совместности высших порядков Адамара.

Выполнив эти операции, на поверхности S получаем

(3.1) $$\begin{gathered}[c_{ij}] = {}^1/_2\,(a_i\nu_j + a_j\nu_i) = [\varkappa p_{ij} + \theta q_{ij}] \\ c_{ij} = \varepsilon_{ij,\,k\ldots l}\nu_k \ldots \nu_l, \quad a_i = [v_{i,\,jk\ldots l}]\,\nu_j\nu_k \ldots \nu_l \\ \varkappa = \lambda_{1,\,k\ldots l}\nu_k \ldots \nu_l, \quad \theta = \lambda_{2,\,k\ldots l}\nu_k \ldots \nu_l\end{gathered}$$

Умножением соотношений (3.1) на ν_j и последующим суммированием по повторяющимся индексам определяем величины

(3.2) $$a_i = 2\,[\varkappa p_{ik} + \theta q_{ik}]\,\nu_k - [\varkappa p_{kk} + \theta q_{kk}]\,\nu_i$$

Соотношения (3.1) с учетом (3.2) примут вид

(3.3) $$\begin{gathered}[\varkappa p_{ik} + \theta q_{ik}]\,\nu_k\nu_j + [\varkappa p_{jk} + \theta q_{jk}]\,\nu_k\nu_i - [\varkappa p_{kk} + \theta q_{kk}]\,\nu_i\nu_j = \\ = [\varkappa p_{ij} + \theta q_{ij}]\end{gathered}$$

Среди шести соотношений (3.3) линейно-независимых только три, так как после умножения на $\nu_i\nu_j$ система (3.3) преобразуется к одному уравнению.

Материал с обеих сторон от поверхности S находится в предельном состоянии, поэтому можем записать

(3.4) $$\begin{gathered}[\Phi(\sigma,\ \Sigma_2,\ \Sigma_3)] = \Phi(\sigma^+,\ \Sigma_2^+,\ \Sigma_3^+) - \Phi(\sigma^-,\ \Sigma_2^-,\ \Sigma_3^-) = 0 \\ [f(\sigma,\ e)] = [\varphi(\sigma)] - [e] = 0\end{gathered}$$

Условие неразрывности среды для сжимаемого материала имеет вид

$$d\rho\,/\,dt + \rho v_{i,i} = 0, \quad \rho = \rho(\sigma), \quad v_{i,i} = \lambda_1\Phi_{,\sigma} + \lambda_2 f_{,\sigma}$$

где $\rho(\sigma)$ — плотность среды как функция давления.

Учитывая (1.5), из уравнения неразрывности получаем

$$-\gamma(\sigma)\lambda_2 + v_{i,i} = 0, \quad \gamma(\sigma) = -\frac{1}{3\rho}\frac{d\rho}{d\sigma}$$

Дифференцируя это соотношение по координатам $x_k x_m, \ldots, x_l$ такое же число раз, как и при выводе уравнений (3.3), с использованием (3.1) на поверхности S находим

(3.5) $$[\theta\,\{\gamma(\sigma) - q_{33}\}] = [\varkappa p_{kk}]$$

Таким образом, для определения $\sigma_{ij}^-, \varkappa^-, \theta^-, e^-$ имеем замкнутую систему из девяти уравнений (2.1), (3.1), (3.4), (3.5). В канонической системе координат (2.3) эта система уравнений принимает вид

$$[\Phi(\sigma, \Sigma_2, \Sigma_3)] = 0, \quad [f(\sigma, e)] = 0$$
$$[\sigma_{i3}] = 0, \quad [\varkappa p_{11} + \theta q_{11}] = [\varkappa p_{12}] = [\varkappa p_{22} + \theta q_{22}] = 0$$
$$[\theta\{\gamma(\sigma) - q_{33}\}] = [\varkappa p_{33}]$$

Отметим, что приведенные рассуждения справедливы и для пластических тел, условия текучести которых выпуклы и не зависят от гидростатической части напряжения. В этом случае в системе (3.3) следует положить $\varkappa p_{kk} = 0$.

4. Рассмотрим пластическую среду, предельное состояние которой описывается функцией

$$\psi(S_{ij}) = k^2, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}, \quad k = \text{const} \tag{4.1}$$

а объемное течение — уравнением (1.3).

Пусть рассматриваемая среда объемом ω ограничена поверхностью $\Sigma = \Sigma_f + \Sigma_v$, причем на части поверхности тела Σ_f заданы внешние нагрузки $p_i = p_i^\circ$, а на оставшейся части поверхности Σ_v — скорости перемещений $v_i = v_i^\circ$. Для простоты пока будем предполагать, что поля скоростей v_i непрерывны во всем объеме тела. Тогда уравнение скорости виртуальных работ для действительных полей напряжений и скоростей в случае квазистатического течения сжимаемой среды запишется в виде

$$\int_\omega (S_{ij}\varepsilon_{ij}^* + 3\sigma\varepsilon)\, d\omega - \int_\Sigma p_i v_i d\Sigma = 0 \tag{4.2}$$

Рассмотрим произвольное кинематически допустимое поле скоростей v_i', удовлетворяющее условию неразрывности

$$d\rho/dt + \rho v'_{i,i} = 0, \quad \rho = \bar{\varkappa}(\sigma) \tag{4.3}$$

и кинематическим ограничениям на части поверхности Σ_v.

Полю скоростей v_i' согласно уравнениям Коши

$$\varepsilon'_{ij} = {}^1/_2 (v'_{i,j} + v'_{j,i})$$

будут соответствовать компоненты девиатора скоростей деформаций $\varepsilon_{ij}^{*\prime}$ и скорость объемного изменения ε'. Компонентам $\varepsilon_{ij}^{*\prime}$ по ассоциированному закону течения отвечает девиатор напряжений S_{ij}^*, не удовлетворяющий, вообще говоря, уравнениям равновесия.

Кинематически допустимая величина скорости объемного изменения ε' определяет относительное изменение объема среды за промежуток времени t [9]

$$e' = \int_0^t \varepsilon'\, d\tau$$

Последний интеграл подсчитывается вдоль траекторий движения частиц материала. В случае однородной простой деформации величину e' можно определить в виде суммы главных логарифмических деформаций [9]

$$e' = \ln\frac{X_1}{X_1^\circ} + \ln\frac{X_2}{X_2^\circ} + \ln\frac{X_3}{X_3^\circ} \tag{4.4}$$

Здесь X_i° $(i = 1, 2, 3)$ — начальные длины отрезков X_i, представляющих собой координаты Лагранжа, определяющиеся при известных $v_i'(x_i, t)$ из соотношений

$$dX_i / dt = v_i' \tag{4.5}$$

Интегрированием уравнения (4.3) получим связь [9]

$$\rho = \rho_0 \exp(-e'), \quad \rho_0 = \rho \mid_{t=0} \tag{4.6}$$

Определяя из (4.5) величины X_i и подставляя значение объемной деформации e', рассчитанное по формуле (4.4), в уравнение неразрывности (4.6), найдем величину гидростатического давления σ^*, соответствующего полю скоростей v_i'

$$\sigma^* = \bar{\varkappa}^{-1}[\rho_0 \exp(-e')]$$

Здесь $\bar{\varkappa}^{-1}$ — обратная по отношению к $\bar{\varkappa}$ функции.

Определенное таким образом гидростатическое давление σ^*, очевидно, в общем случае деформирования не удовлетворяет уравнениям равновесия.

Отметим, что в [10] для случая плоской деформации рассматривался метод определения гидростатического давления, согласованного с разрывным кинематически допустимым полем скоростей.

Рассмотрим случай нагружения тела, когда нагрузки p_i° на части поверхности Σ_f возрастают пропорционально одному параметру n, т. е. $p_i^\circ = nq_i^\circ$ (q_i° — некоторое фиксированное распределение нагрузок на Σ_f). Обозначим через n_0 значение параметра n, при котором достигается предельное состояние тела. Кроме того, будем предполагать, что на части поверхности тела $\Sigma_v v_i^\circ = 0$.

Напряжениям $\sigma_{ij}^* = S_{ij}^* + \sigma^*\delta_{ij}$, соответствующим кинематически допустимым скоростям v_i', отвечают поверхностные нагрузки $p_i^* = n_k q_i^\circ$ (n_k — кинематический коэффициент). Уравнение (4.2) справедливо и для кинематически допустимого поля скоростей v_i', поэтому

$$n_0 I = \int_\omega (S_{ij}\varepsilon_{ij}^{*\prime} + 3\sigma\varepsilon')\,d\omega, \quad I = \int_{\Sigma_f} q_i^\circ v_i'\,d\Sigma \tag{4.7}$$

Здесь S_{ij}, σ — составляющие действительного напряженного состояния, сообщающие телу предельное состояние.

Уравнение (4.2) в случае полей S_{ij}^*, σ^*, $\varepsilon_{ij}^{*\prime}$, ε', v_i' также выполняется и имеет вид

$$n_k I = \int_\omega (S_{ij}^*\varepsilon_{ij}^{*\prime} + 3\sigma^*\varepsilon')\,d\omega \tag{4.8}$$

Вычитая (4.7) из (4.8), находим

$$(n_k - n_0)\,I = \int_\omega [(S_{ij}^* - S_{ij})\,\varepsilon_{ij}^{*\prime} + 3\,(\sigma^* - \sigma)\,\varepsilon']\,d\omega \tag{4.9}$$

Неравенство (2.6) для условия пластичности (4.1) записывается в виде

$$(S_{ij} - S_{ij}^\circ)\,\varepsilon_{ij}^* \geqslant 0, \quad \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij} \tag{4.10}$$

В соответствии с неравенствами (2.8), (4.10) правая часть (4.9) неотрицательна. Тогда, учитывая положительность мощности заданных нагрузок на Σ_f, находим $n_0 \leqslant n_k$, т. е. для сжимаемого пластического материала с произвольной выпуклой поверхностью текучести коэффициент предельной нагрузки n_0 не может быть больше кинематического коэффициента n_k.

Отметим, что в случае наличия разрывных полей скоростей в формуле (4.2) должна быть учтена дополнительная часть диссипации мощности на поверхностях разрыва вектора скорости. Для сжимаемого материала Мизеса диссипация мощности на поверхностях разрыва скоростей определялась в [11]. Доказательство кинематической теоремы в этом случае принципиально не отличается от приведенного выше, а величина n_k имеет вид

$$n_k = \frac{1}{I}\left[\int\limits_\omega (k\mathrm{H}' + 3\sigma^*\varepsilon')\,d\omega + \sum_i \int\limits_{S_i} (\gamma' + \sigma^*[v_z'])\,dS\right], \quad \mathrm{H}' = (2\varepsilon_{ij}^{*\prime}\varepsilon_{ij}^{*\prime})^{1/2}$$

$$\gamma' = k/\sqrt{3}\{3(v_x'^+ - v_x'^-)^2 + 3(v_y'^+ - v_y'^-)^2 + 4(v_z'^+ - v_z'^-)^2\}^{1/2}, \quad [v_z'] = v_z'^+ - v_z'^-$$

Здесь S_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — поверхности разрыва скоростей, (x, y, z) — локальная система координат на поверхности S_k, причем ось z направлена по нормали к S_k, $v_i'^{\pm}$ — значения скоростей с разных сторон от поверхности разрыва.

Рассмотрим статически возможное поле напряжений σ_{ij}', удовлетворяющее соотношениям

$$\sigma'_{ij,\,j} = 0, \qquad \psi(S'_{ij}) \leqslant K^2, \qquad e - \varphi(\sigma') \geqslant 0$$

и граничным условиям на $\Sigma_f : p_i' = n_s q_i^\circ$ (n_s — статический коэффициент). Для действительного распределения скоростей и статически возможного поля напряжений из уравнения (4.2) имеем

$$n_s I = \int\limits_\omega (S'_{ij}\varepsilon^*_{ij} + 3\sigma'\varepsilon)\,d\omega \tag{4.11}$$

Из уравнений (4.2), (4.11) с использованием неравенств (2.8), (4.10) находим $n_s \leqslant n_0$, т. е. для необратимо сжимаемой от действия гидростатического давления жесткопластической среды коэффициент предельной нагрузки n_0 не может быть меньше статического коэффициента n_s.

Поступила 11 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ивлев Д. Д., Мартынова Т. Н.* К теории сжимаемых идеально пластических сред. ПММ, 1963, т. 27, вып. 3.
2. *Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.* Теория упрочняющегося пластического тела. М., «Наука», 1971.
3. *Быковцев Г. И., Ивлев Д. Д., Мяснянкин Ю. М.* О соотношениях на поверхностях разрыва напряжений в трехмерных идеальных жесткопластических телах. Докл. АН СССР, 1967, т. 177, № 5.
4. *Дегтярев И. С.* О разрывах напряжений и скоростей деформации в пространственной задаче сжимаемого жесткопластического тела. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
5. *Койтер В.* Общие теоремы теории упругопластических сред. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
6. *Гвоздев А. А.* Определение величины разрушающей нагрузки для статически неопределимых систем, претерпевающих пластические деформации. Тр. конф. по пластическим деформациям. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1938.
7. *Jenike A. W., Shild R. T.* On the plastic flow of Coulomb Solids beyond original failure. J. Appl. Mech., 1959, vol. 26, No. 4.
8. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М., «Мир», 1964.
9. *Ильюшин А. А.* Некоторые вопросы теории пластического течения. Изв. АН СССР. ОТН, 1958, № 2.
10. *Дегтярев И. С., Колмогоров В. Л.* К теории прессования сжимаемого жесткопластического материала. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 3.
11. *Дегтярев И. С., Колмогоров В. Л.* Диссипация мощности и кинематические соотношения на поверхностях разрыва скоростей в сжимаемом жесткопластическом материале. ПМТФ, 1972, № 5.