Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 539.3

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА О ВНЕДРЕНИИ В УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО ТОНКОЙ ЖЕСТКОЙ ГЛАДКОЙ СВАИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

В. А. Свекло, Л. Ф. Шмойлов

(Калининград)

Решение указанной в заглавии задачи дано в квадратурах.

При наличии угловых точек (например, свая с коническим наконечником) на участке, занятой сваей, вблизи ее конца возможны растягивающие напряжения, если допустить, что на этом участке имеет место сцепление без трения. В противном случае необходим учет трещины. Установлено, что напряжения на границе осесимметричной сваи отличаются от соответствующих напряжений в плоской задаче о расклинивании. Особенно простые формулы получены в задаче о внедрении в упругое пространство полубесконечной сваи.

1. Плоская задача. Решение плоской задачи о расклинивании тонким жестким гладким клином вдоль оси ox упругой полуплоскости дано в работе [1]. Укажем относящиеся сюда результаты, исходя из представления решения в форме [2]

$$2\mu \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \operatorname{Re}\left[k^{\pm}\Phi \pm iy\Phi' + k^{\mp}\Psi \mp x\Psi'\right] \begin{Bmatrix} 1 \\ -i \end{Bmatrix} \tag{1.1}$$

$$k^{+} = k_0, \quad k^{-} = 1 + k_0, \quad k_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

Аналитические функции комплексного аргумента $z = x + iy$ для рассматриваемой задачи имеют значение

$$\Phi(z) = -\frac{q_0}{\pi}\int\limits_L v_x' \ln\frac{z - x}{z + x}\,dx, \quad \Psi(z) = \frac{2q_0}{\pi}\int\limits_L \frac{xv_x'}{x + z}\,dx, \quad q_0 = \frac{2\mu}{1 + k_0}$$

Здесь под логарифмами понимаются их главные значения, L — участок оси ox, где производная v_x' отлична от нуля, $v(x)$ — смещения точек оси ox, вызванные тонким клином. Соответственно выводим

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = \operatorname{Re}\left[\Phi' \pm iy\Phi'' + \Psi' \mp x\Psi''\right], \quad \tau_{xy} = -\operatorname{Re}\left[y\Phi'' + ix\Psi''\right]$$

2. Расклинивание полупространства. Для решения соответствующей пространственной задачи воспользуемся представлением решения, данным в работе [3]

$$u = \langle \alpha u_0 - \beta u_3 \rangle, \quad v = \langle \beta u_0 - \alpha u_3 \rangle$$

$$w = \langle w_0 \rangle, \quad \alpha = \cos\theta, \quad \beta = \sin\theta$$

Здесь и далее угловые скобки означают интегрирование по θ от 0 до 2π. В случае изотропного тела функции $u_0(\xi, z, \theta)$, $w_0(\xi, z, \theta)$, $\xi = \alpha x + \beta y$ — решения уравнений равновесия плоской теории упругости на плоскости ξz, а функция u_0 (ξ, z, θ) обращает в нуль двумерный оператор Лапласа на той же плоскости.

Если u_0, w_0 зависят только от ξ, z, то при отсутствии кручения ($u_3 \equiv \equiv 0$) получим решение, обладающее осевой симметрией

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \frac{1}{\rho} \langle \alpha u_0(\rho\alpha, z)\rangle, \quad w = \langle w_0(\rho\alpha, z)\rangle, \quad \rho^2 = x^2 + y^2 \tag{2.1}$$

Пусть в полупространство $z \geqslant 0$, граница которого $z = 0$ свободна от напряжений, вдоль оси oz на глубину H забита тонкая жесткая свая заданной формы

$$u_\rho(0, z) = f(z), \quad 0 \leqslant z \leqslant H$$

Функция $f(z)$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывную первую производную. Требуется найти напряженное и деформированное состояние полупространства. Предполагается, что искомые напряжения исчезают на бесконечности, а упругие перемещения всюду ограничены.

Решение поставленной задачи получим вращением решения (1.1) вокруг оси oz, т. е. полагая в (2.1)

$$2\mu \begin{Bmatrix} u_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \mathrm{Re}\,[k^{\mp}\Phi_0 \mp i\xi\Phi_0' + k^{\pm}\psi_0 \pm z\psi_0'] \begin{Bmatrix} -i \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{2.2}$$

Здесь Φ_0, Ψ_0 зависят от $\Omega = z + i\xi$, $\xi = \rho\alpha$ и определяются формулами

$$\begin{Bmatrix} \Phi_0 \\ \Psi_0 \end{Bmatrix} = \int_L f'(\eta) \begin{Bmatrix} \Phi_{00} \\ \Psi_{00} \end{Bmatrix} d\eta, \quad \Phi_{00} = -\frac{q_0}{4\pi} \ln \frac{\Omega - \eta}{\Omega + \eta} \tag{2.3}$$

$$\Psi_{00} = \frac{q_0}{2\pi} \frac{\eta}{\eta + \Omega}$$

Пользуясь общими соотношениями между компонентами напряжений и формулами (5.3) работы [3], получим

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\rho \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \left\langle \sigma_\xi{}^\circ - 2\mu\alpha_\pm^2 \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \right\rangle \quad \begin{pmatrix} \alpha_+ = \beta \\ \alpha_- = \alpha \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

$$\sigma_z = \langle \sigma_z{}^\circ \rangle, \quad \tau_{z\rho} = \langle \alpha \mathring{\tau}_{z\xi} \rangle$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\xi{}^\circ \\ \sigma_z{}^\circ \end{Bmatrix} = \mathrm{Re}\,[\Phi_0' \mp i\xi\Phi_0'' + \Psi_0' \pm z\Psi_0'']$$

$$\mathring{\tau}_{z\xi} = -\mathrm{Re}\,[\xi\Phi_0'' + iz\Psi_0'']$$

Остальные компоненты напряжений легко находятся. В частности, в рассматриваемых условиях $\tau_{\rho\theta} \equiv 0$. Нетрудно проверить, что компоненты напряжения (2.4) удовлетворяют уравнениям равновесия в цилиндрических координатах. Отметим, что решение поставленной задачи единственно, так как решение соответствующей однородной задачи, отвечающей нулевым краевым данным и условиям на бесконечности, равно нулю.

Соотношения (2.1) — (2.3) позволяют записать радиальное и осевое перемещения в виде

$$\begin{Bmatrix} u_\rho(\rho, z) \\ w(\rho, z) \end{Bmatrix} = \int\limits_L f'(\eta) \left\langle \begin{Bmatrix} \alpha u_{00} \\ w_{00} \end{Bmatrix} \right\rangle d\eta \tag{2.5}$$

Здесь u_{00}, w_{00} связаны с Φ_{00}, Ψ_{00} соотношениями (2.2). Аналогично записываются формулы для напряжений

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \tau_{z\rho} \end{Bmatrix} = \int\limits_L f'(\eta) \left\langle \begin{Bmatrix} \sigma_z^{\infty} \\ \tau_{z\rho}^{\infty} \end{Bmatrix} \right\rangle d\eta \tag{2.6}$$

Связь между σ_z^∞, $\tau_{z\rho}^\infty$ и Φ_{00}, Ψ_{00} определяется формулами (2.4). Внутренние интегралы в (2.6) и в формулах для других компонент тензора напряжений вычисляются в элементарных функциях. Некоторые свойства решения устанавливаются непосредственно с помощью представления (2.5), (2.6). Покажем, что построенное решение удовлетворяет всем условиям поставленной задачи. Легко проверяется, что $\sigma_z = \tau_{z\rho} = 0$ при $z = 0$. Рассмотрим далее значения $\tau_{z\rho}$ и u_ρ на оси oz. Имеем

$$\tau_{z\rho} = -\int\limits_L f'(\eta) \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{Re} iz\Psi_{00}'' \alpha d\theta d\eta = 0$$

в силу того, что при $\rho=0$ Ψ''_{00} вещественна. Так как при этом Ψ_{00}, Ψ_{00}' также вещественны, то

$$u_\rho(0, z) = -\frac{1}{q_0}\int\limits_L f'(\eta) \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{Re}\Phi^+ i\alpha d\theta d\eta$$

Здесь Φ_{00}^+ — предельное значение функции Φ_{00} на верхнем берегу разреза $(0, \eta)$ и на вещественной оси oz плоскости εz при $z > \eta$. Имеем, учитывая выбор ветвей логарифмов

$$\operatorname{Re} i\Phi_{00}^+ = \begin{cases} q_0\pi, & \eta > z \\ 0, & \eta < z \end{cases}$$

Поэтому на оси oz при $z > H$ радиальное перемещение $u_\rho(0, z) = 0$, при $z < H$

$$u_\rho(0, z) = -\int\limits_z^H f'(\eta)\, d\eta = f(z)$$

так как в силу непрерывности $f(H) = 0$.

Можно проверить, что упругие перемещения u_ρ, w, а следовательно, и компоненты напряжения исчезают на бесконечности, если глубина погружения сваи H конечна. Найдем, например, перемещения $w(\rho, 0)$ на границе полупространства $z = 0$. Из (2.5) выводим

$$w(\rho, 0) = \frac{1}{q_0}\int\limits_L f'(\eta) \int\limits_0^{\pi/2} \operatorname{Re}\Psi_{00} d\theta\, d\eta = \int\limits_L \frac{f'(\eta)\, \eta d\eta}{\sqrt{\rho^2 + \eta^2}}$$

Если $f'(\eta)$ не возрастает, то под влиянием забитой сваи происходит выпучивание границы полупространства. Например, для сваи постоянной толщины $2h$ на участке $(0, H_1)$, имеющей конический наконечник на участке (H_1, H_2) оси oz, имеем

$$w(\rho, 0) = -h\frac{H_1 + H_2}{\sqrt{\rho^2 + H_1^2} + \sqrt{\rho^2 + H_2^2}}$$

Вычисляя в (2.4) внутренние интегралы, получим

$$\sigma_\rho = \frac{q_0}{2}\int\limits_L f'(\eta)\{[z_1|z_1|^{-1}R_1 - R_2 - 2\eta z_2 R_2^3]\,k_1 - [z_1R_1R_1^* -$$
$$- z_2R_2R_2^* + 2\eta(z_2R_2^3 - R_2R_2^*)]\,k_0 - 2(z_1R_1R_1^* - z_2R_2R_2^*) +$$
$$+ z_1|z_1|R_1^3 - z_2R_2^3\}\,d\eta$$
$$\sigma_\theta = \frac{q_0}{2}\int\limits_L f'(\eta)\{2(R_2R_2^* - z_1|z_1|^{-1}R_1^* - \eta^2R_2^3) +$$
$$+ [z_1R_1R_1^* - z_2R_2R_2^* + 2\eta(z_2R_2^3 - R_2R_2^*)]\,k_0\}\,d\eta$$
$$\sigma_z = -\frac{q_0}{2}\int\limits_L f'(\eta)\,[z_1(|z_1|R_1^3 - z_2R_2^3) + 2\eta z(2z_2^2 - \rho^2)R_2^5]\,d\eta$$
$$\tau_{z\rho} = -\frac{q_0}{2}\int\limits_L f'(\eta)\,[|z_1|R_1^3 - z_2R_2^3 + R_1R_1^* - R_2R_2^* + 6\eta z z_2 R_2]\,d\eta$$
$$z_1 = z - \eta, \quad z_2 = z + \eta, \quad R_j^{-2} = \rho^2 + z_j^2$$
$$\frac{1}{R_j^*} = \frac{1}{R_j} + |z_j|, \quad j = 1, 2, \quad k_1 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

На оси oz имеем

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = q_0 z\int\limits_L f'(\eta)\,[(1 - k_0)z + (3 - k_0)\eta]\,z_1^{-1}z_2^{-1}\eta\,d\eta \tag{2.7}$$

Для круглой сваи постоянного сечения, имеющей на участке $H < z < H + l$, $H \geqslant 0$ наконечник заданной формы $f(z)$, интеграл в (2.7) берется от H до $H + l$. Если на этом участке $f'(z)$ не возрастает, то материал полупространства на участке $(0, H)$ сжат, на участке $(H + l, \infty)$ растянут. Поведение материала на участке $(H, H + l)$ зависит от вида функции $f(z)$. Например, для сваи с коническим наконечником получим

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = q_0\left(1 - \frac{k_0}{2}\right)he^{-1} \times \tag{2.8}$$
$$\times \{\chi(\xi) - (1 - \gamma)\xi[\xi^2 + (1 + \gamma)k_2\xi + \gamma(2k_2 - 1)](1 + \xi)^{-2}(\gamma + \xi)^{-2}\}$$
$$\chi(\xi) = {}^1/_2 \ln(1 + \xi)(\gamma - \xi)(1 - \xi)^{-1}(\gamma + \xi)^{-1}, \quad \gamma < \xi < 1$$
$$k_2 = (3 - k_0)(2 - k_0)^{-1}, \quad \gamma = H(H + l)^{-1}, \quad \xi = z(H + l)^{-1}$$

Видно, что правая часть в (2.8) обращается в нуль при $\xi = \xi_0$, $\xi_0 < 1$, и на участке $\xi_0 < \xi < 1$ напряжения становятся растягивающими, что соответствует условию прилипания без трения. Если оно отсутствует, то здесь возникает трещина, учет которой необходим для более точного описания поведения полупространства под влиянием сваи, имеющей конический наконечник. Левый конец трещины на может располагаться правее $\xi = \xi_0$.

Устремляя в (2.8) $l \to 0$, $\gamma \to 1$, получим результаты, относящиеся к круглой цилиндрической свае радиуса h, забитой на глубину H

$$\sigma_p = \sigma_\theta = -q_0 h H^{-1} \xi \left[(1-k_0)\xi + (3-k_0)\right](1-\xi)^{-1}(1+\xi)^{-3} \tag{2.9}$$

Из (2.8), (2.9) видно, что напряжения на границе сваи отличаются от соответствующих напряжений в плоской задаче о расклинивании [1].

Если круглая свая радиуса h имеет наконечник в виде эллипсоида вращения, то интеграл в (2.7) вычисляется в элементарных функциях. Получаемые при этом формулы громоздки, поэтому ограничимся записью результата в виде (h, l — полуоси эллипсоида)

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = -q_0 \frac{h}{l} \int_0^l \frac{\xi}{\sqrt{l^2-\xi^2}} \left\{ \frac{z\xi}{(\xi+z_2^\circ)} + \frac{2-k_0}{4} \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{1}{\xi - z_1^\circ} - \frac{1}{\xi + z_2^\circ} + \frac{2z}{(\xi+z_2^\circ)^2} \right] \right\} d\xi$$
$$\xi = \eta - H, \quad z_1^\circ = z - H, \quad z_2^\circ = z + H, \quad z > H$$

Имеем

$$\int_0^l \frac{\xi}{\sqrt{l^2-\xi^2}} \left[\frac{1}{\xi - z_1^\circ} - \frac{1}{\xi + z_2^\circ} \right] d\xi =$$
$$= \frac{1}{2}(1-\tau_1^2)\tau_1^{-1} \ln(1+\tau_1)(1-\tau_1)^{-1} \tau_2^{-1} \operatorname{arctg} \tau_2$$
$$\tau_j^2 = (l - z_j^\circ)(l + z_j^\circ)^{-1}, \qquad j = 1, 2$$

Таким образом, напряжения σ_ρ, σ_θ на участке оси oz, где расположена свая, ограничены всюду, включая концы наконечника. Материал на участке сваи сжат, вне его на оси oz растянут. Однако при подходе вдоль оси oz к концу сваи справа растягивающие напряжения σ_ρ, σ_θ становятся неограниченными.

3. Внедрение полубесконечной сваи. Если в неограниченное упругое пространство забита тонкая гладкая круглая свая формы

$$f(z) = \begin{cases} h, & -\infty < z < 0 \\ f(z), & 0 \leqslant z \leqslant l \end{cases} \qquad (f(0) = h, \ f(l) = 0)$$

то соответствующие результаты получим из предыдущего, положив $\eta = \xi + H$ и устремляя H к бесконечности. Например, из (2.7) выводим на оси oz

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = q_0 \frac{2-k_0}{4} I, \qquad I = \int_0^l \frac{f'(\xi)\, d\xi}{\xi - z} \tag{3.1}$$

В случае конического наконечника

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = -q_0 \frac{h}{l} \frac{2-k_0}{4} \ln \frac{l-z}{z} \tag{3.2}$$

На участке сваи материал сжат всюду, за исключением участка $z_0 < z < l$, $z_0 = {}^1/_2 l$.

Устремляя в (3.2) l к нулю, получим напряжения на границе тонкой полубесконечной цилиндрической сваи

$$\sigma_\rho = \sigma_\theta = \frac{2-k_0}{4} q_0 \frac{h}{z}$$

При наличии здесь в конце сваи трещины функцию, определяющую ее форму, находим, обращая интеграл $I = 0$.

В заключение отметим, что если, пользуясь тонкостью сваи, снести напряжения $\sigma_\rho(0, z)$ на ее поверхность, то получим, вообще говоря, неуравновешенную нагрузку, равнодействующая которой, направленная вдоль оси oz, имеет значение

$$R = -2\pi \int\limits_L \sigma_\rho(0, z)\, ff'dz$$

Здесь L — участок оси oz, где подынтегральное выражение отлично от нуля. Такую силу, но противоположного направления нужно приложить к гладкой тонкой свае, чтобы удержать ее в заданном положении. Например, для полубесконечной сваи постоянного радиуса h, имеющей на участке $0 \leqslant z \leqslant l$ эллиптический наконечник, имеем

$$\sigma_\rho = -q_0 \frac{2-k_0}{8} \frac{h}{l}\left[\pi + \frac{1-\tau}{\tau} \ln \frac{1+\tau}{1-\tau}\right], \qquad \tau = \frac{l-z}{l+z}$$

Поэтому на бесконечности к свае должна быть приложена сила

$$R_1 = \left(1 - \frac{k_0}{2}\right) q_0 S h l^{-1} \chi_0, \qquad S = \pi h^2$$

$$\chi_0 = \frac{\pi}{2} + 8 \int\limits_1^\infty t^2 (1+t^2)^{-3} \ln t\, dt$$

Поступила 16 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Свекло В. А.* Об одном комплексном представлении решения в плоской теории упругости. Инж. ж. МТТ, 1966, № 2.
2. *Свекло В. А.* О совместном действии на упругую полуплоскость клина и штампа. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
3. *Свекло В. А.* Задачи типа Буссинеска для анизотропного полупространства. ПММ, 1964, т. 28, вып. 5.