Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 532.5

О МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ РАВНОВЕСНОЙ ПОВЕРХНОСТИ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ

А. Д. Мышкис, Л. А. Слобожанин, А. Д. Тюпцов

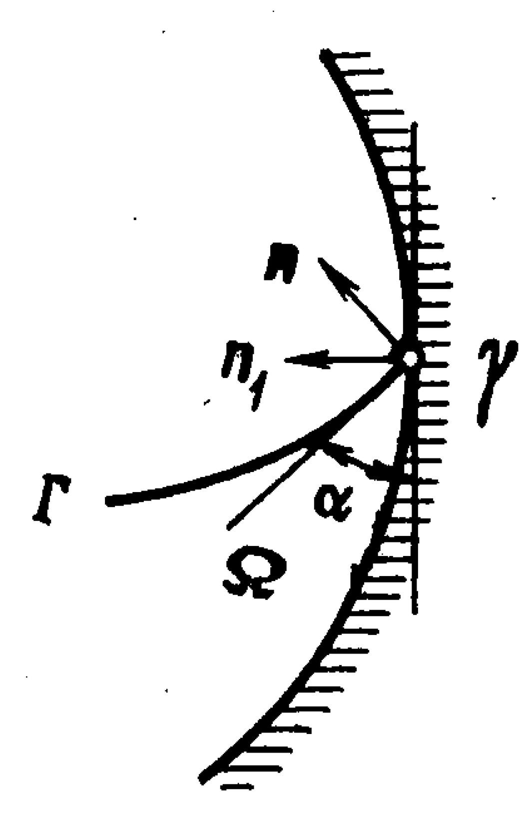
(Харьков)

Рассматривается задача о возмущении равновесного состояния капиллярной жидкости при малом изменении физических параметров. Основное внимание уделено возмущению слабым гравитационным полем сферической равновесной поверхности (осесимметричный случай), а также пространственным задачам о возмущении (при изменении угла смачивания) свободной поверхности, представляющей собой часть горизонтальной плоскости. В последнем случае найдены возмущенные поверхности жидкости, заключенной в двугранном угле между двумя вертикальными полубесконечными пластинами, а также в цилиндре прямоугольного или треугольного сечения.

1. Формулировка задачи. Пусть находящаяся в сосуде капиллярная жидкость имеет свободную поверхность Г, контактирующую с поверхностью сосуда по линии γ. Как известно (см., например, [1]), в состоянии равновесия должны выполняться следующие условия:

$$k_1 + k_2 = \sigma^{-1} \Pi + C \quad \text{на } \Gamma, \quad \mathbf{n}\cdot\mathbf{n}_1 = \cos\alpha \quad \text{на } \gamma, \ \int_\Omega d\Omega = v$$

Здесь k_1 и k_2 — главные кривизны поверхности Г, σ — коэффициент поверхностного натяжения, П — объемная плотность потенциальной энергии жидкости (будем считать ее заданной функцией координат), c — заранее неизвестная постоянная, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_1$ — орты нормалей соответственно к Г и к поверхности сосуда (см. фиг. 1), α — угол смачивания, Ω — занятая жидкостью часть пространства, v — объем жидкости.



Фиг. 1

Пусть при некоторых конкретных П (x), α и v равновесная поверхность Г (а с ней и постоянная c) известна. Задача состоит в описании возмущений равновесной поверхности, соответствующих заданным малым приращениям $\delta\Pi$ (x), $\delta\alpha$, δv.

Будем считать, что каждая точка $\mathbf{x} \in \Gamma$ получила малое смещение $\delta\mathbf{x} = \mathbf{h}(\mathbf{x})$, которому соответствует отклонение по нормали $N = \mathbf{h}\cdot\mathbf{n}$. Варьируя записанные выше условия равновесия, как это было сделано в [1], получим следующую задачу для отклонения N:

$$\Delta N - aN = \sigma^{-1}\delta\Pi + \delta c \quad \text{на } \Gamma \tag{1.1}$$

$$\chi N + \frac{\partial N}{\partial \nu} = -\delta\alpha \quad \text{на } \gamma, \ \int_\Gamma N d\Gamma = \delta v \tag{1.2}$$

$$a = \sigma^{-1}\frac{\partial \Pi}{\partial n} - k_1^2 - k_2^2, \quad \chi = \frac{k\cos\alpha - k_0}{\sin\alpha} \tag{1.3}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа — Бельтрами на Г, k и k_0 — кривизны сечений Г и поверхности сосуда плоскостью, перпендикулярной к γ (ориентация этих сечений видна из фиг. 1), ν — внешняя нормаль к γ в касательной плоскости к Г.

Задача (1.1), (1.2) относительно N и δc относится к фредгольмовскому типу. Далее будем предполагать, что эта задача однозначно разрешима при любых $\delta\Pi$, $\delta\alpha$ и δv (т. е. соответствующая однородная задача не имеет нетривиальных решений). Это соответствует тому, что исходная равновесная поверхность Г не является критической в смысле устойчивости и при возмущении не происходит ветвления равновесных состояний.

Заметим, что к решению задачи (1.1), (1.2) сводится метод Ньютона при построении равновесной поверхности капиллярной жидкости для заданных значений физических параметров.

2. Возмущения осесимметричных и плоских состояний равновесия. Пусть сосуд, исходная поверхность Г и потенциал П имеют ось симметрии z и r, θ, z — соответствующие цилиндрические координаты. В качестве криволинейных координат на Г удобно принять длину дуги s сечения полуплоскостью $\theta=\mathrm{const}$ и угол θ. Тогда для $N = N(s, \theta)$ задача (1.1), (1.2) принимает следующий вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial s}\left(r\frac{\partial N}{\partial s}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 N}{\partial \theta^2}-aN=\sigma^{-1}\delta\Pi+\delta c$$

$$\left.\left(\chi N-\frac{\partial N}{\partial s}\right)\right|_{s=0}=-\delta\alpha,\qquad \left.\left(\chi N+\frac{\partial N}{\partial s}\right)\right|_{s=s_1}=-\delta\alpha$$

$$\int_0^{s_1} r\left(\int_0^{2\pi} N d\theta\right) ds=\delta v$$

Здесь $r(s)$ и $a(s)$ — известные функции. Решение $N(s, \theta)$ легко получить в виде тригонометрического ряда по θ. М. Я. Барняком была построена [1] функция Грина для этой задачи.

В случае, когда и $\delta\Pi$ не зависит от θ, для $N = N(s)$ задача упрощается

$$N''+\frac{r'}{r}N'-aN=\sigma^{-1}\delta\Pi+\delta c \tag{2.1}$$

$$(\chi N-N')|_{s=0}=-\delta\alpha,\quad (\chi N+N')|_{s=s_1}=-\delta\alpha,\quad 2\pi\int_0^{s_1} rN ds=\delta v \tag{2.2}$$

Заметим, что в обоих случаях условия в начальной $s = 0$ и в конечной $s = s_1$ точках образующей поверхности Г ставятся, если $r(0)$ и $r(s_1)$ положительны. Если же концевая точка $s = 0$ или $s = s_1$ лежит на оси вращения, то соответствующее граничное условие нужно заменить условием ограниченности функции $N(s)$.

[1] Барняк М. Я. Приближенные методы решения задач статики и динамики жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости. Канд. диссертация, Киев, 1971.

Для плоской задачи (при очевидных предположениях) вместо (2.1), (2.2) будет (s — длина дуги поперечного сечения Г):

$$N'' - aN = \sigma^{-1}\delta\Pi + \delta c$$

$$(\chi N - N')|_{s=0} = -\delta\alpha, \quad (\chi N + N')|_{s=s_1} = -\delta\alpha, \quad \int_0^{s_1} N ds = \delta v$$

Перейдем к решению некоторых конкретных задач

3. Равновесные поверхности при малых числах Бонда. Пусть требуется определить форму односвязной осесимметричной поверхности жидкости, находящейся в однородном гравитационном поле интенсивности ηg, действующем параллельно оси z, при малых числах Бонда $B = \rho\eta g l^2\sigma^{-1}$($\rho$ — плотность жидкости, g — ускорение земного тяготения, η — коэффициент перегрузки, l — характерный линейный размер). Искомая поверхность будет близка к сферической поверхности, реализующейся при тех же α и v в условиях невесомости ($\Pi \equiv 0$). Эту сферу примем за невозмущенную поверхность Г и будем считать, что ее расположение в сосуде и радиус R известны (см., например, [2]). Направим ось z от жидкости к газу, а за начало координат примем точку пересечения этой оси с Г. Если выбрать R в качестве характерного линейного размера (здесь R предполагается конечным; случай, когда $R = \infty$ и сфера вырождается в плоскость, рассматривается в п. 4), то задача (2.1), (2.2) в безразмерной форме примет вид

$$N'' + \operatorname{ctg} s\, N' + 2N = \pm B\,(1 - \cos s) + \delta c \tag{3.1}$$

$$(\chi N + N')|_{s=s_1} = 0, \quad \int_0^{s_1} N \sin s ds = 0, \quad \chi = \pm\frac{\cos\alpha - k_0}{\sin\alpha} \tag{3.2}$$

Здесь знак плюс или минус, как и в уравнении (3.1), выбирается в зависимости от того, положительна или отрицательна координата z центра сферы.

Общее ограниченное решение уравнения (3.1) имеет вид

$$N = c_1 \cos s \pm B\,[{}^1\!/_6 + {}^1\!/_3 \cos s \ln(1 + \cos s)] + {}^1\!/_2\delta c$$

Постоянные c_1 и δc находятся из условий (3.2). Отметим, что решение поставленной задачи для цилиндрического сосуда было построено в [3].

В аналогичной плоской задаче, выбирая за невозмущенную поверхность круговой цилиндр

$$x = R\sin(s/R), \quad z = \pm R\,[1 - \cos(s/R)]$$

получим в безразмерных переменных (R — характерный размер)

$$N = c_1 \sin s + c_2 \cos s + \delta c \pm B\,(1 - {}^1\!/_2\, s\sin s)$$

4. Поверхности малого наклона. В поле сил тяжести любой интенсивности поверхности вида z=const удовлетворяют уравнению равновесия. Допустим, что плоскость $z = 0$ является равновесной поверхностью в некотором сосуде при $\alpha = \alpha_0$; нужно найти ее возмущение, вызванное заданным изменением $\delta\alpha$ угла смачивания. Тогда

$$N = z, \quad a = \rho\eta g\sigma^{-1} \equiv b, \quad \chi = -k_0/\sin\alpha_0, \quad \delta\Pi = \delta v = 0$$

В осесимметричном случае $r(s) \equiv s$, а общее решение уравнения (2.1) таково:

$$z = c_1 + c_2 \ln r + {}^1/_2\, \delta c \quad \text{при} \quad b = 0$$

$$z = c_1 I_0(\sqrt{b}r) + c_2 K_0(\sqrt{b}r) - \delta c / b \text{ при } b > 0$$

$$z = c_1 J_0(\sqrt{|b|}r) + c_2 N_0(\sqrt{|b|}r) - \delta c / b \text{ при } b < 0$$

где $J_0(\tau)$ и $I_0(\tau)$ — функции Бесселя действительного и мнимого аргумента нулевого порядка, $K_0(\tau)$ и $N_0(\tau)$ — функции Макдональда и Неймана.

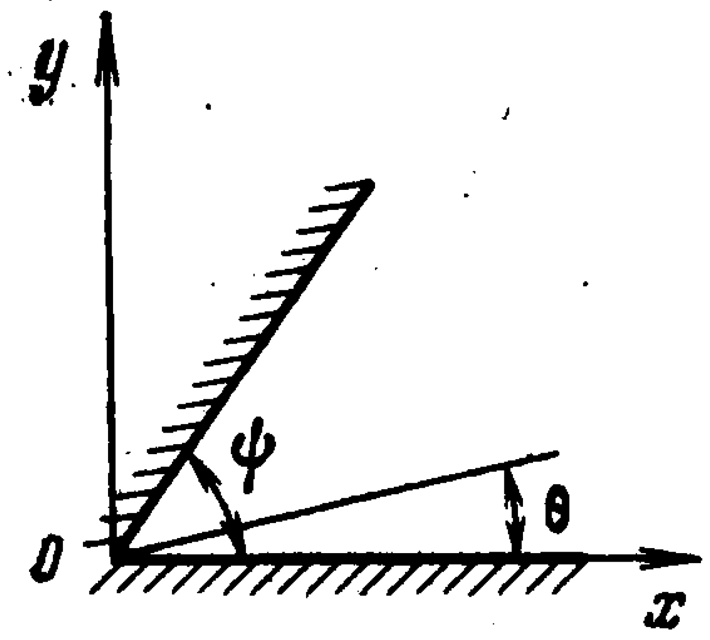
В плоской задаче $s \equiv x$, $N = z(x)$ и потому

$$z = c_1 + c_2 s + {}^1/_2\, s^2 \delta c, \quad b = 0$$

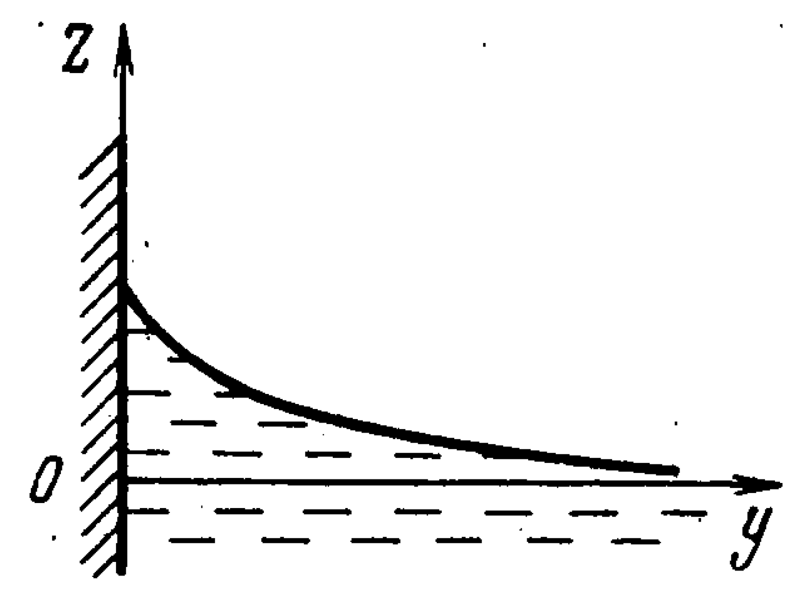
$$z = c_1 e^{\sqrt{b}x} + c_2 e^{-\sqrt{b}x} - \delta c / b, \quad b > 0$$

$$z = c_1 \sin(\sqrt{|b|}\, x) + c_2 \cos(\sqrt{|b|}\, x) - \delta c / b, \quad b < 0$$

Соответствующие задачи для жидкости, заключенной внутри кругового цилиндра и между параллельными вертикальными пластинами, решены в [2].



Фиг. 2



Фиг. 3

Пусть $b > 0$ и жидкость находится внутри двугранного угла ψ, образованного двумя полубесконечными вертикальными пластинами. В невозмущенном положении $\alpha = \pi / 2$, а на свободной поверхности $z \equiv 0$.

Ось z совместим с ребром двугранного угла, а оси x, y выберем, как показано на фиг. 2. В цилиндрической системе координат r, θ, z угол θ будем отсчитывать от полуплоскости xz.

Из-за линейности задачи достаточно рассмотреть случай, когда $\delta\alpha = -1$. Так как Γ неограничена, то в (1.2) второе условие отбрасываем, а от решения потребуем, чтобы оно стремилось к нулю при неограниченном удалении от пластин; тогда в уравнении (1.1) будет $\delta c = 0$. Учитывая сказанное выше и заменяя N на z, получим краевую задачу

$$\Delta z - bz = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \qquad \partial z / \partial \nu = 1 \quad \text{на} \ \gamma. \tag{4.1}$$

Поведение поверхности жидкости около угловой точки. Асимптотика малой гравитации. Прежде чем изучить решение задачи (4.1), отметим, что можно весьма просто найти величину подъема жидкости в угловой точке $N|_{r=0}$. Для этого воспользуемся формулой Грина

$$\int_\Gamma (vLu - uLv)\, d\Gamma = \int_\gamma \left(v \frac{\partial u}{\partial \nu} - u \frac{\partial v}{\partial \nu}\right) d\gamma, \quad Lu \equiv \Delta u - bu$$

Полагая

$$u = z(r), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\gamma = 1, \quad v = K_0(\sqrt{b}\,|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$$

(здесь $K_0(\sqrt{b}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)$ — функция Макдональда, которая является фундаментальным решением для уравнения $Lu = 0$), получим

$$\omega z(\mathbf{r}) = \int_{\gamma}\left[K_0(\sqrt{b}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|) - z(\mathbf{r}')\frac{\partial}{\partial\nu}K_0(\sqrt{b}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\right]d\gamma, \quad \mathbf{r}'\in\gamma$$

где $\omega = 2\pi$ для $\mathbf{r}\in\Gamma$, $\omega = \pi$ для $\mathbf{r}\in\gamma$ ($\mathbf{r}\neq 0$), $\omega = \psi$ для $\mathbf{r} = 0$. В частности, при $\mathbf{r} = 0$ будет $\partial K_0 / \partial\nu|_\gamma = 0$ и поэтому высота подъема жидкости в угловой точке равна

$$z|_{\mathbf{r}=0} = \frac{2}{\sqrt{b}\psi}\int_0^\infty K_0(\tau)\,d\tau = \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{\pi}{\psi} \tag{4.2}$$

Теперь заметим, что в задаче (4.1) можно добиться, чтобы было $b = 1$ (по предположению $b > 0$). Для этого нужно перейти к безразмерным переменным $x' = \sqrt{b}x$, $y' = \sqrt{b}y$, $z' = \sqrt{b}z$. Отсюда найдем асимптотическое поведение решения задачи (4.1) при малых значениях $\sqrt{b}\,r$. Именно, разлагая функцию $z'(x', y')$ в ряд Тейлора, возвращаясь затем к переменным x, y, z и учитывая (4.2), получим

$$z(x, y; b) = \frac{\pi}{\sqrt{b}\psi} + c_1x + c_2y + O(\sqrt{b}r^2), \quad z(r, \theta; b) =$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{b}\psi} + (c_1\cos\theta + c_2\sin\theta)r + O(\sqrt{b}r^2)$$

Здесь постоянные c_1, c_2 не зависят от b и находятся из граничного условия $\partial z / \partial\nu|_\gamma = 1$

$$1 = \lim_{r\to 0}\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)\Big|_{\theta=0} = -c_2, \quad 1 = \lim_{r\to 0}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial\theta}\right)\Big|_{\theta=\psi} =$$
$$= -c_1\sin\psi + c_2\cos\psi, \quad c_1 = -\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}$$

Таким образом

$$z(r, \theta; b) = \frac{1}{\sqrt{b}}\frac{\pi}{\psi} - \left(\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}\cos\theta + \sin\theta\right)r + O(\sqrt{b}r^2)$$

Эта формула описывает асимптотику всей поверхности жидкости при $b\to+0$, а также ее поведение вблизи угловой точки при любых конечных $b > 0$.

Далее будем считать $b = 1$, штрихи над переменными опустим. Таким образом, рассматривается краевая задача

$$\Delta z - z = 0 \quad \text{на } \Gamma, \quad \partial z/\partial\nu = 1 \quad \text{на } \gamma \tag{4.3}$$

Углы $\psi = \pi / n$ и другие частные случаи. Очевидно, что функции

$$e^{-x} = e^{-r\cos\theta}, \quad e^{-y} = e^{-r\sin\theta}, \quad e^{-r\cos(\theta-\delta)} = e^{-(x\cos\delta + y\sin\delta)} \tag{4.4}$$

(δ — произвольная постоянная) удовлетворяют уравнению задачи (4.3). При этом $z = e^{-y} = e^{-r\sin\theta}$ — решение краевой задачи (4.3), когда $\psi = \pi$, т. е. стенкой служит плоскость xz (фиг. 3).

Если $\psi = \pi / 2$, то

$$z = e^{-y} + e^{-x} = e^{-r\sin\theta} + e^{-r\sin(\theta+\pi/2)}$$

Для цилиндрического сосуда, поперечное сечение которого — прямоугольник с вершинами $(\pm a_x, \pm a_y)$

$$z = \operatorname{ch} x / \operatorname{sh} a_x + \operatorname{ch} y / \operatorname{sh} a_y$$

Функции вида (4.4) можно использовать для конструирования решений и других задач с помощью метода отражения. Так, для двугранного угла $\psi = \pi / n$ $(n = 1,2,3, \ldots)$ решение задачи (4.3) выражается формулой

$$z = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left[-r \sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)\right] \tag{4.5}$$

легко проверяемой прямой подстановкой в (4.3). Для цилиндра, поперечное сечение которого есть правильный треугольник высоты H, содержащий начало координат внутри себя

$$z = (1 - e^{-H})^{-1} \sum_{i=1}^{6} \exp(\alpha_i x + \beta_i y - p_i)$$

где $\alpha_i x + \beta_i y - p_i = 0$ $(\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 1,\ p_i > 0,\ i = 1,2, \ldots, 6)$ — уравнения сторон треугольника и параллельных им прямых, проходящих через его вершины.

Решение для произвольных углов $0 < \psi \leqslant 2\pi$. После перехода к полярным координатам r, θ $(0 \leqslant r < \infty,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \psi)$ задача (4.3) принимает вид

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 z}{\partial \theta^2} - z = 0, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=0} = -1, \quad \frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\psi} = 1 \tag{4.6}$$

Из полученных выше результатов для $\psi = \pi / n$ видно, что основными качественными свойствами искомого решения являются экспоненциальное убывание вдоль радиальных лучей (кроме граничных лучей $\theta = 0$ и $\theta = \psi$) при больших r и симметрия относительно полуплоскости $\theta = \psi / 2$. Такими свойствами обладают, например, следующие частные решения уравнения задачи (4.6) ($\tau > 0$ — произвольная постоянная, $K_{i\tau}(r)$ — функция Макдональда):

$$z = \operatorname{ch}[\tau(\theta - \psi / 2)]\, K_{i\tau}(r)$$

Будем искать $z(r, \theta)$ в виде интеграла

$$z(r, \theta) = \int_0^\infty \varphi(\tau) \operatorname{ch}[\tau(\theta - \psi/2)]\, K_{i\tau}(r)\, d\tau \tag{4.7}$$

При этом уравнение задачи (4.6) будет удовлетворено, а функцию $\varphi(\tau)$ выберем так, чтобы выполнилось одно из граничных условий (второе выполнится в силу симметрии). Подстановка выражения (4.7) в граничное условие при $\theta = \psi$ дает такой результат:

$$\int_0^\infty \varphi(\tau)\, \tau \operatorname{sh}\left(\frac{\tau\psi}{2}\right) K_{i\tau}(r)\, d\tau = r \tag{4.8}$$

Для нахождения отсюда функции $\varphi(\tau)$ естественно воспользоваться интегральным преобразованием Конторовича — Лебедева [4]

$$(4.9)\qquad F(\tau)=\frac{2}{\pi^2}\tau\,\mathrm{sh}(\pi\tau)\int_0^\infty f(r)\,K_{i\tau}(r)\frac{dr}{r},\qquad \int_0^\infty F(\tau)\,K_{i\tau}(r)\,d\tau=f(r)$$

Равенство (4.8) можно отождествить со второй из формул (4.9), если положить

$$f(r)=r,\quad F(\tau)=\varphi(\tau)\tau\,\mathrm{sh}(\tau\psi/2)$$

Тогда с помощью первой из формул (4.9) найдем

$$\varphi(\tau)=\frac{2}{\pi^2}\frac{\mathrm{sh}(\pi\tau)}{\mathrm{sh}(\psi\tau/2)}\int_0^\infty K_{i\tau}(r)\,dr=\frac{2}{\pi}\frac{\mathrm{sh}(\pi\tau/2)}{\mathrm{sh}(\psi\tau/2)}$$

Итак, решение рассматриваемой здесь задачи выражается следующим образом:

$$(4.10)\qquad z(r,\theta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Lambda_z(\tau,\psi,\theta)\,K_{i\tau}(r)\,d\tau$$

$$\Lambda_z(\tau,\psi,\theta)=\mathrm{sh}(\pi\tau/2)\,\mathrm{ch}[\tau(\theta-\psi/2)]/\mathrm{sh}(\psi\tau/2)$$

Интеграл в правой части сходится только при $0<\theta<\psi$, так как при $\tau\to\infty$

$$K_{i\tau}(r)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2\tau}}\,e^{-\pi\tau/2}$$

На границе γ значение функции $z(r,\theta)$ и ее нормальной производной можно получить, переходя к пределу $\theta\to 0$ или $\theta\to\psi$ лишь после выполнения интегрирования по τ. Этого можно избежать при $0<\psi\leqslant\pi$, полагая

$$z(r,\theta)=e^{-r\sin\theta}+e^{-r\sin(\psi-\theta)}+u(r,\theta)$$

Отыскивая $u(r,\theta)$ аналогично тому, как была найдена функция $z(r,\theta)$, получим

$$u(r,\theta)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Lambda_u(\tau,\psi,\theta)\,K_{i\tau}(r)\,d\tau$$

$$\Lambda_u(\tau,\psi,\theta)=\mathrm{sh}[\tau(\pi/2-\psi)]\,\mathrm{ch}[\tau(\theta-\psi/2)]/\mathrm{sh}(\psi\tau/2)$$

Отсюда найдем высоту подъема поверхности жидкости на твердой стенке

$$z(r,0)=z(r,\psi)=1+e^{-r\sin\psi}+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \Lambda_u(\tau,\psi,0)\,K_{i\tau}(r)\,d\tau$$

Наконец, учитывая, что при больших r

$$K_{i\tau}(r)\sim\sqrt{\frac{\pi}{2r}}\,e^{-r}e^{-\pi\tau/2}$$

найдем поведение поверхности жидкости вдоль прямых, параллельных твердым стенкам: $\lim\limits_{x\to\infty} z(x, y) = e^{-y}$, т. е. вдали от начала координат поверхность жидкости около каждой из твердых стенок ведет себя как при $\psi = \pi$.

Покажем, как формула (4.10) может быть преобразована к виду (4.5), когда $\psi = \pi / n$. Для этого заметим, что [5]

$$\Lambda_z\left(\tau, \frac{\pi}{n}, \theta\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{ch}\left[\tau\left(\theta + \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Учитывая, что $|\beta| = |\theta + k\pi / n - \pi / 2| < \pi / 2$ при $0 < \theta < \psi$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$ и в этом случае [5]

$$\int_0^\infty \operatorname{ch}(\beta\tau) K_{i\tau}(r)\, d\tau = \frac{\pi}{2} e^{-r\cos\beta}$$

приходим к нужному результату

$$z(r, \theta) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\infty \operatorname{ch}\left[\tau\left(\theta + \frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2}\right)\right] K_{i\tau}(r)\, d\tau = \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left[-r\sin\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right)\right]$$

В заключение отметим еще случай, когда решение задачи (4.3) можно получить в виде суммы ряда. Именно так будет, если Γ представляет собой сектор $0 \leqslant \theta \leqslant \psi$, $0 \leqslant r \leqslant r_0$. Здесь можно написать

$$z = -\left(\operatorname{ctg}\frac{\psi}{2}\cos\theta + \sin\theta\right) r + \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r) \cos\left[\frac{2\pi n}{\psi}\left(\theta - \frac{\psi}{2}\right)\right]$$

Для функций $u_n(r)$ получим уравнения с граничными условиями (A_n — заданные коэффициенты разложения функции $\operatorname{ctg}(\psi / 2)\cos\theta + \sin\theta$)

$$u_n'' + \frac{1}{r} u_n' - \left(1 + \frac{4\pi^2 n^2}{\psi^2 r^2}\right) u_n = -A_n r, \quad u_0'(r_0) = 1 + A_0, \quad u_k'(r_0) = A_k$$

$$A_0 = 2 / \psi, \quad A_k = (-1)^{k+1} \psi / (\pi^2 k^2 - \psi^2 / 4), \quad k \geqslant 1$$

Отсюда $u_n(r)$ выражаются через цилиндрические функции.

Поступила 4 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беляева М. А., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидростатика в слабых силовых полях. В сб.: Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости, М., ВЦ АН СССР, 1968.
2. *Черноусько Ф. Л.* Задача о равновесии жидкости, подверженной действию сил тяжести и поверхностного натяжения. В сб.: Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М., ВЦ АН СССР, 1958.
3. *Concus P.* Static menisci in a vertical right circular cylinder. J. Fluid Mech., 1968, vol. 34, pt. 3.
4. *Диткин В. А., Прудников, А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.