Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 533.95

МЕТОД ПОЛУЧЕНИЯ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА — ДЕ ВРИЗА — БЮРГЕРСА

М. С. Рудерман

(Москва)

Дается метод получения уравнения Кортевега — де Вриза — Бюргерса (КдВБ) для сред с дисперсией и диссипацией, поведение которых описывается уравнениями довольно общего вида. На основе метода получены уравнение КдВБ для столкновительной плазмы с холловской дисперсией и уравнение Кортевега — де Вриза (КдВ) для волн, распространяющихся в горячей бесстолкновительной плазме поперек магнитного поля.

В последние годы большое внимание уделялось исследованию уравнения Кортевега — де Вриза (КдВ), которое, как оказалось, хорошо описывает слабонелинейные волны в присутствии дисперсии в различных средах (волны на мелкой воде, ионный звук в плазме и т. д.). В настоящее время уравнение КдВ исследовано весьма хорошо. Поэтому при изучении волновых движений в какой-либо среде важной задачей является вывод этого уравнения. На основе рассмотрения ряда примеров было высказано утверждение [1], что уравнение КдВ справедливо для волновых движений в данной среде всегда, если только в пренебрежении дисперсией существуют решения в виде простых волн, а закон дисперсии при малых волновых числах имеет вид $\omega = c_0k - \beta k^3$, где ω — частота, k — волновое число, c_0 — скорость распространения колебаний в отсутствие дисперсии, β — дисперсионный параметр. В данной работе это утверждение доказывается при некоторых ограничивающих предположениях и дается общий метод получения уравнения Кортевега — де Вриза — Бюргерса (КдВБ) для таких сред. Уравнение КдВ можно получить из уравнения КдВБ, пренебрегая диссипацией. Уравнение Бюргерса получим, положив $\beta = 0$.

Отметим, что методом, аналогичным изложенному в работе, пользовался в своих лекциях А. Г. Куликовский для вывода уравнения Бюргерса.

1. Вывод уравнения КдВБ в случае существования полной системы собственных векторов. Пусть состояние некоторой системы определяется векторной переменной $\mathbf{u}$. Представим ее в виде $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}'$, где $\mathbf{u}_0$ описывает стационарное однородное состояние среды. В дальнейшем штрих писать не будем. Пусть поведение среды описывается системой уравнений вида

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = \mathbf{f}\left(\mathbf{u}_0 + \mathbf{u},\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^q \mathbf{u}}{\partial x^q}\right) \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{u}$, $\mathbf{f}$ — векторы с компонентами $u_1, \ldots, u_n, f_1, \ldots, f_n$ соответственно, A — матрица. Наложим на $\mathbf{f}$ следующие условия:

1°. Если $\mathbf{u} \equiv 0$, то $\mathbf{f} \equiv 0$.

2°. Функция $\mathbf{f}$ может быть разложена в ряд Тейлора по крайней мере до квадратичных членов.

3°. В разложении $\mathbf{f}$ в ряд Тейлора отсутствует член $\alpha\, \partial\mathbf{u}/\partial x$, где α — постоянная матрица.

Матрицу A назовем матрицей системы. В дальнейшем будем считать, что все собственные числа матрицы A действительны, и λ_1 — однократный корень. Наложим также условие $(\lambda_i - \lambda_j) / \lambda_1 \sim 1$, если $\lambda_i \neq \lambda_j$. Кроме того, здесь будет рассматриваться только тот случай, когда матрица A имеет n линейно-независимых собственных векторов $\mathbf{C}_1, \ldots, \mathbf{C}_n$. В этом случае система уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0 \tag{1.2}$$

имеет ровно n линейно-независимых решений вида $\varphi(t) \exp(ikx)$, которые можно записать в виде

$$\mathbf{u}_j = \mathbf{C}_j \exp\,[ik\,(x - \lambda_j t)], \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Это решение описывает волны, бегущие со скоростью $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. В дальнейшем рассматриваем первую из этих волн. При этом считаем, что в присутствии дисперсии и диссипации выражения для частоты и инкремента затухания любой из волн имеют вид

$$\omega_i = \lambda_i k - \beta_i k^3, \quad \gamma_i = \nu_i k^2 \tag{1.3}$$
$$(\,|\beta_i| \lesssim |\beta_1|\,, \; \nu_i \geqslant 0, \; \nu_i \lesssim \nu_1)$$

В дальнейшем λ_1 будем обозначать через c_0, β_1 и ν_1 — через β и ν.

Введем новые переменные по формуле

$$\mathbf{v} = C^{-1}\mathbf{u} \tag{1.4}$$

где матрица C имеет в качестве i-го столбца вектор $\mathbf{C}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Система (1.1) в этих переменных принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + B \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \mathbf{g}\left(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^q \mathbf{v}}{\partial x^q}\right)$$

$$B = C^{-1}AC = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

$$\mathbf{g}\left(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}, \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^q \mathbf{v}}{\partial x^q}\right) = C^{-1}\mathbf{f}\left(C(\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}), C\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, \ldots, C\frac{\partial^q \mathbf{v}}{\partial x^q}\right)$$

Введем три малых параметра: ε — отношение амплитуд возмущений к соответствующим невозмущенным величинам, параметр дисперсии $\delta = (\beta / c_0)^{1/3} L^{-1}$, где L — характерная длина задачи, и параметр затухания $\eta = \nu\,(c_0 L)^{-1}$. В дальнейшем будем удерживать члены порядка ε, ε^2, $\varepsilon\delta$, $\varepsilon\delta^2$ и $\varepsilon\eta$.

Все последующее рассмотрение посвящено изучению задачи Коши в бесконечном пространстве. Наложим некоторые ограничения на начальные условия, означающие, что рассматривается волна, бегущая со скоростью, близкой к $\lambda_1 \equiv c_0$. Именно, считаем, что $v_1 \sim \varepsilon$, $v_i = O(\varepsilon^2 + \varepsilon\delta + \varepsilon\eta)$, $i = 2, \ldots, n$ при $t = 0$.

В частности, можно положить $v_i = 0$, $i = 2, \ldots, n$ при $t = 0$.

Уравнение для v_1 записывается в виде

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + c_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = g_1 \tag{1.5}$$

Учитывая, что $g \equiv 0$ при $v \equiv 0$, получим

$$g_1 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{q} \alpha_{1ij} \frac{\partial^j v_i}{\partial x^j} + \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{l,s=0}^{q} \beta_{1ijls} \frac{\partial^l v_i}{\partial x^l} \frac{\partial^s v_j}{\partial x^s} + o(\varepsilon^2) \tag{1.6}$$

Введем длину дисперсии и длину диссипации по формулам

$$l_1 = (\beta / c_0)^{1/2}, \quad l_2 = \nu / c_0$$

Из соображений размерности получим, что

$$\alpha_{1i0} = c_0 (a_{1i} l_1^{-1} + b_{1i} l_2^{-1}), \quad \alpha_{1ij} = c_0 \sum_{r=0}^{j-1} l_1^r l_2^{j-r-1} \alpha_{1ij}^{(r)}, \quad (j > 0)$$

$$\beta_{1ij00} = c_0 (a_{1ij} l_1^{-1} + b_{1ij} l_2^{-1})$$

$$\beta_{1ijls} = c_0 \sum_{r=0}^{l+s-1} l_1^r l_2^{l+s-r-1} \beta_{1ijls}^{(r)}, \quad l + s > 0$$

где a_{1i}, b_{1i}, $\alpha_{1ij}^{(r)}$, a_{1ij}, b_{1ij}, $b_{1ijls}^{(r)}$ — безразмерные величины. Предельный переход $l_1 \to 0$, $l_2 \to 0$ соответствует отсутствию дисперсии и диссипации. Поскольку такой переход допустим для рассматриваемой системы, то $a_{1i} = b_{1i} = a_{1ij} = b_{1ij} = 0$. Кроме того, в силу предположения 3°, $\alpha_{1i1} = 0$.

Видно, что члены $\beta_{1ijls}^{(r)} l_1^r l_2^{l+s-r-1} (\partial^l v_i / \partial x^l)(\partial^s v_j / \partial x^s)$ имеют порядок $\delta^r \eta^{l+s-r-1} v_i (\partial v_j / \partial x)$, и поскольку $v_i = o(\varepsilon)$ при $i > 1$, то в (1.6) можно пренебречь всеми квадратичными членами, кроме $(\beta_{11101} + \beta_{11110}) v_1 \partial v_1 / \partial x$. Член вида $l_1^r l_2^{j-r-1} \alpha_{1ij}^{(r)} \partial^j v_i / \partial x^j$ имеет порядок $\delta^r \eta^{j-r-1} \partial v_i / \partial x$, поэтому в (1.6) можно пренебречь всеми линейными членами, кроме

$$\alpha_{112} \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}, \quad \alpha_{113} \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3}, \quad \alpha_{1i2} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2}, \quad i = 2, \ldots n$$

Таким образом, в принятом приближении получаем для g_1 формулу

$$g_1 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} + \zeta \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} + \varkappa v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \tag{1.7}$$

Уравнение для v_j, где $j = 2, \ldots, n$, запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial v_j}{\partial x} = g_j \tag{1.8}$$

Поскольку в (1.7) член $\xi_j \partial^2 v_j / \partial x^2$ имеет порядок $c_0 \delta \partial v_j / \partial x$, то после разложения g_j в ряд Тейлора в правой части (1.7) следует оставить лишь член порядка $c_0 \delta \partial v_1 / \partial x$, отбросив члены более высокого порядка. Таким образом, (1.7) сводится к уравнению

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial v_j}{\partial x} = \theta_j \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}, \quad \theta_j = \left. \frac{\partial g_j}{\partial (\partial^2 v_1 / \partial x^2)} \right|_{v=0} \tag{1.9}$$

Введем преобразование Фурье по формулам

$$v_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} v_j e^{-ikx} dx, \quad v_{jk\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} v_{jk} e^{i\omega t} dt, \quad \operatorname{Im} \omega > 0$$

Тогда уравнение (1.9) преобразуется к виду

$$i(k\lambda_j - \omega)\, v_{jk\omega} = -\theta_j k^2 v_{1k\omega} - \dot{v}_{jk}, \quad \overset{\circ}{v}_{jk} = v_{jk}\big|_{t=0}$$

Сделав преобразование Фурье уравнения (1.5), получим

$$i(kc_0 - \omega) v_{1k\omega} = -v_{1k}^{\circ} + O(\delta\varepsilon + \eta\varepsilon + \varepsilon^2)$$

Член $\theta_j k^2 v_{1k\omega}$ имеет порядок $\delta\varepsilon$, поэтому в принятом приближении получим

$$v_{jk\omega} = -\frac{\theta_j k^2 \overset{\circ}{v}_{1k}}{(kc_0 - \omega)(k\lambda_j - \omega)} + \frac{i\overset{\circ}{v}_{jk}}{k\lambda_j - \omega}$$

Используя обратное преобразование, получим

$$v_j = -\frac{\theta_j}{c_0 - \lambda_j}\frac{\partial v_1^{\circ}}{\partial x}(x - c_0 t) + \frac{\theta_j}{c_0 - \lambda_j}\frac{\partial v_1^{\circ}}{\partial x}(x - \lambda_j t) + v_j^{\circ}(x - \lambda_j t) \tag{1.10}$$

Здесь $v_j^{\circ} = v_j\big|_{t=0}$. Будем считать, что

$$v_j^{\circ} = -\frac{\theta_j}{c_0 - \lambda_j}\frac{\partial v_1^{\circ}}{\partial x} \tag{1.11}$$

Тогда в принятом приближении справедливо соотношение

$$\frac{\partial v_j}{\partial t} + c_0\frac{\partial v_j}{\partial x} = 0 \tag{1.12}$$

Из (1.9) и (1.12) следует

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = \frac{\theta_j}{\lambda_j - c_0}\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \tag{1.13}$$

после чего уравнение (1.5) примет вид

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + c_0\frac{\partial v_1}{\partial x} = \varkappa v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + \xi_1\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \left(\zeta + \sum_{j=2}^{n}\frac{\theta_j}{\lambda_j - c_0}\right)\frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} \tag{1.14}$$

Из соотношений (1.3) следует, что должны с необходимостью выполняться соотношения

$$\xi_1 = \nu \quad \left(\zeta + \sum_{j=2}^{n}\frac{\xi_j\theta_j}{\lambda_j - c_0}\right) = -\beta\,. \tag{1.15}$$

Считая $\varkappa \neq 0$ и делая замену $w = -\varkappa v_1$, получим для w уравнение КдВБ

$$\frac{\partial w}{\partial t} + (c_0 + w)\frac{\partial w}{\partial x} + \beta\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{1.16}$$

Следует заметить, что условие (1.11) не существенно.

Действительно, если соотношение (1.11) не выполнено, то кроме волны, бегущей со скоростью, близкой к c_0, и амплитудой порядка ε, появляются волны, бегущие со скоростями λ_j, где $j > 1$, и амплитудами порядка $\delta\varepsilon$. В связи с этим в правой части (1.14) появятся дополнительные члены порядка $\delta^2\varepsilon$, описывающие воздействие этих волн на основную волну. Однако время взаимодействия волн, бегущих со скоростями λ_j и основной волны, имеет порядок $t_1 = L / (c_0 - \lambda_j) \sim L / c_0$ при $c_0 - \lambda_j \sim c_0$, где L — характерная ширина начального возмущения. С другой стороны, время, за которое эти члены могут существенно повлиять на v_1, можно оценить как $T = \delta^{-2} L / c_0$. Поэтому членами, связанными с появлением волн, бегущих со скоростями λ_j, можно пренебречь, и уравнение (1.14) остается неизменным. Однако все это верно лишь для задачи с локализованным начальным возмущением. В случае задачи с периодическими начальными условиями условие (1.11) является существенным.

2. Вывод уравнений КдВБ в случае отсутствия полной системы собственных векторов. Рассмотрим случай, когда число линейно-независимых собственных векторов матрицы A меньше n. Для любой матрицы A существует такая матрица C, что матрица $B = C^{-1}AC$ — жорданова. Пусть B имеет $M < h$ клеток, причем клетка с номером p имеет размер N_p. В силу наложенного выше требования однократности λ_1 имеем $N_1 = 1$. Кроме того, $\lambda_{S_p+1} = \ldots = \lambda_{S_p+N_p} = \lambda_p^*$, где $S_p = N_1 + \ldots + N_{p-1}$, $S_1 = 0$. Столбцы матрицы C, как и в п. 1, обозначим C_j. Отметим, однако, что теперь уже не все C_j — собственные векторы матрицы A.

Полная система линейно-независимых решений уравнения (2.2) вида $\varphi(t)\exp(ikx)$ теперь запишется

$$
\mathbf{u}_{S_p+j} = \sum_{r=1}^{j} \frac{(-ikt)^{j-r}}{(j-r)!} C_{S_p+r} \exp[ik(x - \lambda_p^* t)]
$$

$$
1 \leqslant j \leqslant N_p, \quad p = 1, \ldots, M
$$

Как видим, те моды колебаний, которым соответствуют жордановы клетки размерности больше единицы, неустойчивы из-за появления вековых членов. Поэтому все дальнейшие рассуждения будут справедливы лишь для не слишком больших интервалов времени, когда неустойчивость еще не успела развиться. Заметим, что учет затухания и дисперсии при рассмотрении моды, которой соответствует жорданова клетка с размерностью больше единицы, может привести к исчезновению членов, пропорциональных степеням t, и, таким образом, устранить неустойчивость данной моды.

Поступая дальше так же, как в п. 1, находим, что единственное отличие заключается в том, что вместо уравнения (1.8) для нахождения v_j при $j > 1$ необходимо рассмотреть систему уравнений

$$
\frac{\partial v_{S_p+1}}{\partial t} + \lambda_p^* \frac{\partial v_{S_p+1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{S_p+2}}{\partial x} = g_{S_p+1}
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

$$
\frac{\partial v_{S_p+N_p-1}}{\partial t} + \lambda_p^* \frac{\partial v_{S_p+N_p-1}}{\partial x} + \frac{\partial v_{S_p+N_p}}{\partial x} = g_{S_p+N_p-1}
$$

$$
\frac{\partial v_{S_p+N_p}}{\partial t} + \lambda_p^* \frac{\partial v_{S_p+N_p}}{\partial x} = g_{S_p+N_p}
$$

Как и в п. 1, заключаем, что в принятом приближении можно считать $g_{S_p+j} = \theta_{S_p+j}\partial^2 v_1/\partial x^2$. Сделав преобразование Фурье, получим с принятой точностью

$$
v_{S_p+jk\omega} = -\frac{k^2 \overset{\bullet}{v}_{1k}}{(kc_0 - \omega)(k\lambda_p^* - \omega)} \sum_{l=0}^{N_p-j} \theta_{S_p+j+l} \left(\frac{k}{\omega - \lambda_p^* k}\right)^l -
$$

$$
- \frac{i}{\omega - k\lambda_p^*} \sum_{l=0}^{N_p-j} \overset{\circ}{v}_{S_p+j+lk} \left(\frac{k}{\omega - \lambda_p^* k}\right)^l, \quad j = 1, \ldots, N_p
$$

Применив обратное преобразование, получим

$$(2.1)\qquad v_{S_p+j} = -\sum_{l=0}^{N_p-j} \frac{\theta_{S_p+j+l}}{(c_0-\lambda_p{}^*)^{l+1}} \frac{\partial v_1{}^\circ}{\partial x}(x-c_0t) + \sum_{l=0}^{N_p-j} \left[(-1)^l \frac{\theta_{S_p+j+l}}{c_0-\lambda_p{}^*} \frac{\partial^{l+1} v_1{}^\circ}{\partial x^{l+1}}(x-\lambda_p{}^*t) + \frac{\partial^l v_{S_p+j+l}}{\partial x^l}(x-\lambda_p{}^*t)\right] \frac{t^l}{l!}$$

Здесь, как легко видеть, нельзя в общем случае наложить на начальные условия ограничения, приводящие к обращению в нуль выражения в квадратных скобках (это можно было бы сделать, если бы выражение $(-1)^l \times \theta_{S_p+j+l}$ не зависело от l при $l = 0, \ldots, N_p - j$; $j = 1, \ldots, N_p$; $p = 1, \ldots, M$). Однако для задачи о распространении локализованного возмущения и не слишком больших времён t, т. е. таких, для которых амплитуды неустойчивых мод остаются малыми, можно пренебречь второй суммой в (2.1). Тогда, как и в п. 1, v_{S_p+j} удовлетворяет уравнению (1.12). После этого остаются в силе все рассуждения п. 1, только вместо (1.15) получим

$$\zeta - \sum_{p=1}^{M}\sum_{j=1}^{N_p}\sum_{l=0}^{N_p-j} \frac{\theta_{S_p+j+l}}{(c_0-\lambda_p{}^*)^{l+1}} = -\beta$$

Система уравнений вида (1.1) с матрицей A, имеющей кратные корни, возникает, например, при рассмотрении нелинейных волн, распространяющихся под углом к магнитному полю в холодной плазме (см. [1]). Именно, в рассматриваемом случае нуль является двукратным корнем.

3. Уравнение КдВ для волн, распространяющихся поперёк магнитного поля в горячей бесстолкновительной плазме. Поведение слабонелинейных волн в бесстолкновительной замагниченной плазме при условии, что направление магнитного поля остаётся постоянным, движение происходит поперёк магнитного поля, характерная длина возмущения много больше ионного ларморовского радиуса и кинетическое давление плазмы больше либо порядка магнитного давления, в одномерном случае описывается следующими уравнениями [2] (Ω, R — ларморовские частота и радиус ионов, m_i — масса иона, ρ_0, $p_{\perp 0}$, B_0 — параметры невозмущённой плазмы):

$$(3.1)\qquad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{c_m{}^2}{\rho_0} = -U\frac{\partial U}{\partial x} + \Omega R^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \Omega = \frac{eB_0}{cm_i}, \quad R^2 = \frac{p_\perp{}^0}{4\rho_0\Omega^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -U\frac{\partial V}{\partial x} - \Omega R^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial U}{\partial x} = -\rho\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial \rho}{\partial x}$$

$$c_m{}^2 = (2p_{\perp 0} + B_0{}^2/4\pi)/\rho_0$$

Здесь c_m — скорость распространения малых возмущений при отсутствии дисперсии. Как видим, система (3.1) является системой вида (1.1). Матрица системы имеет три различных собственных числа: c_m, $-c_m$ и 0.

Матрица C может быть взята в виде

$$C = \begin{Vmatrix} c_m & c_m & 0 \\ 0 & 0 & c_m \\ \rho_0 & -\rho_0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Для g_1 получим (в обозначениях п. 1)

$$g_1 = -\frac{3}{2} c_m v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\Omega R^2}{2} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}$$

причем в принятом приближении $\partial v_3 / \partial t = -\Omega R^2 \partial^2 v_1 / \partial x^2$. Отсюда по формуле (1.15) имеем $\beta = -\Omega^2 R^4 / 2c_m$. Таким образом, для v_1 получаем следующее уравнение:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + c_m \left(1 + \frac{3}{2} v_1\right) \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\Omega^2 R^4}{2c_m} \frac{\partial^3 v_1}{\partial x^3} = 0 \tag{3.2}$$

А поскольку $U = c_m (v_1 + v_2)$, v_2 — величина более высокого порядка малости, чем v_1 и, согласно (1.12), в принятом приближении

$$\partial v_2 / \partial t + c_m \partial v_2 / \partial x = 0$$

то из (3.2) получается аналогичное уравнение для U.

4. Уравнение КдВБ для волн в плазме с холловской дисперсией и джоулевой диссипацией. Система уравнений, описывающая плазму с холловской дисперсией приведена в [3]. В [4] показано, что несмотря на присутствие джоулевой диссипации уравнение изменения энтропии в принятом приближении может быть заменено условием адиабатичности $p = \rho^\gamma \cdot \mathrm{const}$. Таким образом, чтобы учесть джоулеву диссипацию, в системе уравнений, приведённой в [3], необходимо изменить лишь уравнение индукции, как это сделано в [4] (см. уравнение (1)). Таким образом, система уравнений, описывающих плазму с холловской дисперсией и джоулевой диссипацией, после линеаризации дисперсионных и диссипативных членов и отбрасывания членов, имеющих порядок выше ε^2, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial U}{\partial x} = -\rho \frac{\partial U}{\partial x} - U \frac{\partial \rho}{\partial x} \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{a_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{B_0 \sin\alpha}{4\pi\rho_0} \frac{\partial b_z}{\partial x} = -U \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{b_z}{4\pi\rho_0} \frac{\partial b_z}{\partial x} +$$
$$+ \frac{B_0 \sin\alpha}{4\pi\rho_0} \rho \frac{\partial b_z}{\partial x} + \frac{a_0^2}{\rho_0} \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{a_0^2 (\gamma - 1)}{\rho_0^2} \rho \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{b_y}{4\pi\rho_0} \frac{\partial b_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{B_0 \cos\alpha}{4\pi\rho_0} \frac{\partial b_y}{\partial x} = -U \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{B_0 \cos\alpha}{4\pi\rho_0^2} \rho \frac{\partial b_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} - \frac{B_0 \cos\alpha}{4\pi\rho_0} \frac{\partial b_z}{\partial x} = -U \frac{\partial W}{\partial x} - \frac{B_0 \cos\alpha}{4\pi\rho_0^2} \rho \frac{\partial b_z}{\partial x}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} - B_0 \cos\alpha \frac{\partial V}{\partial x} = -U \frac{\partial b_y}{\partial x} - b_y \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{m_i c B_0}{4\pi e \rho_0} \cos\alpha \frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} + \nu_m \frac{\partial^2 b_y}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} + B_0 \sin\alpha \frac{\partial U}{\partial x} - B_0 \cos\alpha \frac{\partial W}{\partial x} =$$
$$= -U \frac{\partial b_z}{\partial x} - b_z \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{c m_i B_0}{4\pi e \rho_0} \cos\alpha \frac{\partial^2 b_y}{\partial x^2} + \nu_m \frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2}, \quad a_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$$

Здесь ρ_0 — невозмущённая плотность, ρ — возмущение плотности, U, V, W — x-, y-, z-компоненты вектора скорости, p_0 — невозмущенное давление, B_0 — величина индукции невозмущенного магнитного поля, b_y, b_z — y- и z-компоненты возмущения вектора индукции магнитного поля (в силу уравнений соленоидальности магнитного поля и индукции $b_x \equiv 0$), α — угол между невозмущенным вектором магнитного поля и и осью x (система координат выбрана так, что этот вектор лежит в плоскости xz), σ — проводимость. Считаем $\operatorname{tg}\alpha \sim 1$.

Нетрудно видеть, что система (4.1) имеет вид (1.1). При этом матрица системы имеет шесть различных собственных чисел

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm a_{+,-} = \pm {}^1/_2 \left(\sqrt{a_0^2 + V_A^2 + 2a_0V_A\cos\alpha} \pm \right.$$
$$\left. \pm \sqrt{a_0^2 + V_A^2 - 2a_0V_A\cos\alpha}\right)$$
$$\lambda_{5,6} = \pm V_A\cos\alpha, \qquad V^2{}_A = B^2{}_0/4\pi\rho_0$$

Матрица C может быть взята в виде

$$C = \left\| \begin{matrix} a_+ & -a_+ & a_- & -a_- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & V_A\cos\alpha & -V_A\cos\alpha \\ -D_+ & D_+ & -D_- & D_- & 0 & 0 \\ \rho_0 & \rho_0 & \rho_0 & \rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & B_0 & B_0 \\ Q_+ & Q_+ & Q_- & Q_- & 0 & 0 \end{matrix} \right\|$$

$$D_\pm = \frac{a_\pm^2 - a_0^2}{a_\pm}\operatorname{ctg}\alpha, \qquad Q_\pm = \frac{a_\pm^2 - a_0^2}{V_A^2\sin\alpha}B_0$$

Уравнение КдВБ может быть получено как для быстрой магнитозвуковой волны ($c_0 = a_+$), так и для медленной ($c_0 = a_-$). В первом случае считаем, что в начальный момент $v_1 \sim \varepsilon$, $v_i = o(\varepsilon)(i = 2, 3, 4, 5, 6)$, во втором — $v_3 \sim \varepsilon$, $v_i = o(\varepsilon)(i = 1, 2, 4, 5, 6)$ (все в обозначениях п. 1).

Для $g_{1,3}$ получим следующую формулу:

$$g_{1,3} = -A_\pm v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{V_A^2\chi\sin\alpha}{2(a_+^2 - a_-^2)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v_5 + v_6) + \overset{*}{\nu}_\pm\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}$$

где знаки плюс и минус у A и $\nu_m{}^*$ относятся соответственно к быстрой и и медленной волнам. Здесь

$$A_\pm = a_+\left[1 + \frac{|a_0^2 - a_\mp^2|}{a_+^2 - a_-^2}\frac{\gamma - 2}{2} + \frac{|a_0^2 - a_\mp^2|\,(a_\pm^2 - a_0^2)^2}{2a_0^2(a_+^2 - a_-^2)V_A^2\sin^2\alpha}\right]$$

$$\overset{*}{\nu}_{m\pm} = \frac{\nu_m}{2}\frac{|a_\pm^2 - a_0^2|}{a_+^2 - a_-^2}, \qquad \chi = \frac{cm_iB_0\cos\alpha}{4\pi e\rho_0}$$

причем верхние индексы у величин соответствуют быстрой волне, нижние — медленной. Используя соотношение (1.15) и замечая, что

$$\frac{\partial v_5}{\partial t} + V_A\cos\alpha\frac{\partial v_5}{\partial x} = \frac{\chi}{2}\frac{|a_\pm^2 - a_0^2|}{V_A^2\sin\alpha}\frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial v_6}{\partial t} - V_A\cos\alpha\frac{\partial v_6}{\partial x} = \frac{\chi}{2}\frac{|a_\pm^2 - a_0^2|}{V_A^2\sin\alpha}\frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}$$

где $p = 1$ для быстрой волны, $p = 3$ для медленной волны, получим

$$\frac{\partial v_p}{\partial t} + a_\pm \frac{\partial v_p}{\partial x} + A_\pm v_p \frac{\partial v_p}{\partial x} + \beta_\pm \frac{\partial^3 v_p}{\partial x^3} = \overset{*}{\nu}_{m\pm} \frac{\partial^2 v_p}{\partial x^2}$$

$$\beta_\pm = -\frac{\chi^2 a_\pm |a_\pm^2 - a_0^2|}{2(a_+^2 - a_-^2)(a_\pm^2 - V_A^2 \cos^2 \alpha)}$$

Воспользовавшись (1.15) и тем, что b_z — линейная комбинация v_i, получим окончательно для b_z

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} + a_\pm \frac{\partial b_z}{\partial x} + \frac{V_A^2 \sin \alpha}{a_\pm^2 - a_0^2} A_\pm \frac{b_z}{B_0} \frac{\partial b_z}{\partial x} + \beta_\pm \frac{\partial^3 b_z}{\partial x^3} = \overset{*}{\nu}_{m\pm} \frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} \tag{4.2}$$

На основании уравнения (4.2) могут быть легко воспроизведены результаты работ [3, 4], касающиеся распространения солитонов в плазме с холловской дисперсией и структуры слабых ударных волн в присутствии джоулевой диссипации.

Следует заметить, что переход к новым переменным по формуле (2.5) может оказаться полезным при выводе приближенных уравнений для нелинейных волн и в том случае, когда закон дисперсии отличен от (2.3).

В заключение автор благодарит В. Б. Баранова за постановку задачи и ценные замечания.

Поступила 31 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
2. *Kennel C. F., Sagdeev R.* Collisionless shock wave in high β plasmas. II. J. Geophys. Res., 1967, vol. 72, No. 13.
3. *Баранов В. Б., Рудерман М. С.* Волны в плазме с холловской дисперсией. Изв. АН СССР, МЖГ, 1974, № 3.
4. *Baranov V. B., Ruderman M. S.* On waves in plasma with the Hall dispersion. Rarefied Gas. Dynam. Proc. 9th Internat. Sympos., Göttingen, 1974, vol. 1. Porz-Wahn, Germany, 1974.