Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 533.6.011

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ СЛАБО ВОЗМУЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ ЧИСЛЕ НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ

Р. А. Ткаленко

(Москва)

Рассматриваются пространственные неравновесные течения при произвольном числе релаксационных процессов, свойственных как гомогенным, так и гетерогенным средам. Формулируются достаточные условия существования областей поля течения, в которых обычная линейная теория неприменима. Для этих областей предлагается метод построения нелинейной теории слабо возмущенных течений.

Применимость обычной линейной теории для исследования равновесных и неравновесных течений ограничена. Это частично обусловлено некорректным ее построением, а частично тем, что некоторые области течения невозможно описать линейными уравнениями [1–3]. Модификация обычной линейной теории равновесных и неравновесных течений (см., например, [4]) позволила расширить диапазон ее применения и значительно улучшить точность. Нелинейные уравнения для описания неравновесных слабо возмущенных течений при одном релаксационном процессе использованы в работах [5–8]. При произвольном числе неравновесных процессов линейной теории слабо возмущенных течений посвящены работы [9–13].

1. Рассмотрим пространственное нестационарное течение невязкого и нетеплопроводного газа, в котором могут протекать различные неравновесные процессы. Пусть ρ — плотность, p — давление, x, y, z — система декартовых координат, t — время, $\mathbf{V}$ — вектор скорости с проекциями u, v, w, c — скорость звука (если особо не оговорено, то будем считать c скоростью распространения малых возмущений, когда все релаксационные процессы заморожены). Основные уравнения сохранения можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\nabla\mathbf{V}=L_1,\quad \rho\frac{d\mathbf{V}}{dt}+\nabla p=\mathbf{l},\quad \frac{dp}{dt}-c^2\frac{d\rho}{dt}=L_5 \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{l}=\{L_2, L_3, L_4\}$, а вектор $\mathbf{L}=\{L_k\}$ $(k=1, 2, \ldots, 5)$ определяется неравновесными процессами. Предполагается, что в $\mathbf{L}$ производные от ρ, p и $\mathbf{V}$ не входят.

Введем новые независимые переменные

$$\xi_j=\xi_j(t, x, y, z)\qquad (j=1, 2, 3, 4) \tag{1.2}$$

с отличным от нуля якобианом преобразования и обозначим

$$A_{j1}=\frac{\partial\xi_j}{\partial t},\quad A_{j2}=\frac{\partial\xi_j}{\partial x},\quad A_{j3}=\frac{\partial\xi_j}{\partial y},\quad A_{j4}=\frac{\partial\xi_j}{\partial z}$$

$$U_j=A_{j1}+\mathbf{A}_j\mathbf{V},\quad \mathbf{A}_j=\{A_{j2}, A_{j3}, A_{j4}\},\quad \omega_j^2=|\mathbf{A}_j|^2$$

В новых переменных основная система уравнений (1.1) примет вид

$$\sum_{j=1}^{4}\left(\rho \mathrm{A}_j\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi_j}+U_j\frac{\partial \rho}{\partial \xi_j}\right)=L_1,\quad \sum_{j=1}^{4}\left(\rho U_j\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi_j}+\mathrm{A}_j\frac{\partial p}{\partial \xi_j}\right)=1 \tag{1.3}$$

$$\sum_{j=1}^{4}U_j\left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j}-c^2\frac{\partial \rho}{\partial \xi_j}\right)=L_5$$

Система уравнений (1.3) в общем случае является квазилинейной. Матрица из коэффициентов при производных состоит из пяти строк и 20 столбцов. Ее можно разделить на четыре квадратных матрицы 5×5, элементы которых совпадают с коэффициентами при производных по ξ_i от u, v, w, p и ρ соответственно

$$\begin{Vmatrix} \rho A_{i2} & \rho A_{i3} & \rho A_{i4} & 0 & U_i \\ \rho U_i & 0 & 0 & A_{i2} & 0 \\ 0 & \rho U_i & 0 & A_{i3} & 0 \\ 0 & 0 & \rho U_i & A_{i4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_i & -c^2 U_i \end{Vmatrix} \tag{1.4}$$

Вычислим определитель этой матрицы

$$\Delta_i=\rho^3 U_i\,(U_i^2-c^2\omega_i^2)$$

Систему уравнений (1.3) можно разрешить относительно производных по ξ_i, если $\Delta_i\neq 0$. В случае $\Delta_i=0$ гиперповерхности $\xi_i=\mathrm{const}$ являются характеристическими, и строки матрицы (1.4) линейно зависимы [14]. Определим коэффициенты этой линейной зависимости, т. е. найдем собственный вектор транспонированной матрицы, соответствующий нулевому собственному значению. Его можно записать в таком виде:

$$\mathrm{S}=\{c^2U_i;\ -c^2A_{i2};\ -c^2A_{i3};\ -c^2A_{i4};\ U_i\} \tag{1.5}$$

Умножая уравнения (1.3) на соответствующие проекции вектора S и складывая, получим

$$\sum_{j=1}^{4}\left[\rho c^2(\mathrm{A}_jU_i-\mathrm{A}_iU_j)\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi_j}+(U_iU_j-c^2\mathrm{A}_i\mathrm{A}_j)\frac{\partial p}{\partial \xi_j}\right]=\mathbf{L}\cdot\mathrm{S} \tag{1.6}$$

В уравнение (1.6) входит только одна производная по ξ_i — от p, и не входит ни одной, если ξ_i — характеристическая переменная. (Для $j=i$ коэффициенты при $\partial\mathbf{V}/\partial\xi_i$ тождественно равны нулю, а коэффициент при $\partial p/\partial\xi_i$ равен Δ_i/ρ^3U_i.)

Будем решать систему уравнений (1.3) методом малых возмущений. Представим зависимые и независимые переменные в следующем виде:

$$\Omega_k=\Omega_k^\circ+\varepsilon^{\alpha_k}\Omega_k',\qquad \xi_j'=\varepsilon^{r_j}\xi_j \tag{1.7}$$

Здесь ε — некоторый малый параметр, Ω_k при $k=1,\ldots,5$ обозначает u, v, w, p и ρ соответственно, α_k и r_j — постоянные, $j=1,2,3,4$. Предполагается, что выполнены следующие условия:

$$\Omega_k^\circ=\mathrm{const},\ \alpha_k>0,\ \rho^\circ,\ p^\circ\neq 0$$

а равенство $\mathbf{V}^\circ = 0$ возможно только при нестационарном течении. Нулевое приближение $\Omega_k{}^\circ$ может соответствовать равномерному набегающему потоку (сверхзвуковое обтекание тонкого профиля) или некоторой точке поля течения (например, значениям параметров в центре сопла).

Подставим (1.7) в (1.3) и рассмотрим по отдельности каждое выражение, содержащее частную производную по какой-либо переменной, сохранив в нем только член низшего порядка по ε. В результате получим систему линейных уравнений в частных производных, по внешнему виду не отличающуюся от (1.3). Различие состоит в том, что коэффициенты при производных $\partial\Omega_k{}' / \partial\xi_j{}'$ заменяются их значениями, вычисленными по нулевому приближению, и что каждый член умножается на ε в некоторой степени (обозначим ее через β_{jk}), формально определяющей его порядок малости. Из (1.3) и (1.7) можно получить

$$\beta_{jk} = \alpha_k + r_j \tag{1.8}$$

Все величины в полученных уравнениях удобно считать безразмерными. Отнесем параметры размерности длины к какому-нибудь характерному линейному размеру, скорости — к c°, плотности — к ρ°, давления — к $\rho^\circ c^{\circ 2}$ и т. д. Штрихи у возмущенных величин опустим.

Предположим, что все члены в полученных уравнениях имеют одинаковый порядок, тогда (1.3) примет вид

$$\begin{gathered}
\mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi_i} + U_i{}^\circ \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} = L_1 - \sum_{j\neq i} \left(\mathbf{A}_j \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi_j} + U_j{}^\circ \frac{\partial \rho}{\partial \xi_j}\right) \\
U_i{}^\circ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi_i} + \mathbf{A}_i \frac{\partial p}{\partial \xi_i} = \mathbf{l} - \sum_{j\neq i} \left(U_j{}^\circ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi_j} + \mathbf{A}_j \frac{\partial p}{\partial \xi_j}\right) \\
U_i{}^\circ \frac{\partial p}{\partial \xi_i} - U_i{}^\circ \frac{\partial \rho}{\partial \xi_i} = L_5 - \sum_{j\neq i} U_j{}^\circ \left(\frac{\partial p}{\partial \xi_j} - \frac{\partial \rho}{\partial \xi_j}\right)
\end{gathered} \tag{1.9}$$

Из условия $\beta_{jk} = \beta$ и (1.8) следует, что все α_k и r_j выражаются через два параметра: $\alpha_k = \alpha$, $r_j = \beta - \alpha$. Эти условия отвечают обычной линейной теории (течение описывается линейной системой уравнений). В классической линейной теории рассматриваются члены первого порядка по ε ($\alpha = \beta = 1$), причем ε определяется граничными условиями.

Рассмотрим матрицу из коэффициентов при производных по ξ_i в (1.9) (формально она совпадает с (1.4), если вместо ее элементов подставить нулевое приближение). Ясно, что условие $\Delta_i = 0$ определяется как выбором независимых переменных (величинами A_{ij}), так и выбором нулевого приближения (значениями $\mathbf{V}^\circ$). Предположим, что в некоторой области течения выполняются следующие три условия:

$$1^\circ.\ U_i{}^\circ \neq 0, \quad 2^\circ.\ \Delta_i{}^\circ = 0, \quad 3^\circ.\ \partial\Omega_k/\partial\xi_i \gg \partial\Omega_k/\partial\xi_j \quad (i \neq j) \tag{1.10}$$

Условия (1.10) являются достаточными для того, чтобы в указанной области обычная линейная теория была неприменима. Действительно, при выполнении условий 1° (по крайней мере один элемент каждой строки матрицы (1.4) отличен от нуля) и 3° производными по ξ_j в (1.9) можно пренебречь по сравнению с производными по ξ_i. Наконец, в силу 2° между левыми частями уравнений (1.9) имеет место линейная зависимость, из-за которой соответствующая система является либо неполной, либо противоречивой (при отсутствии такой же зависимости между ее правыми частями).

2. Определим области течения, удовлетворяющие условиям (1.10), для плоского стационарного течения совершенного газа ($L = 0$). Положим $\xi_2 = \xi$, $\xi_3 = \eta$ и рассмотрим задачу обтекания тонкого профиля. Выберем систему координат так, чтобы $v^\circ = 0$, $u^\circ = M_\infty$. За нулевое приближение примем значения параметров в равновесном набегающем потоке, тогда $U_2{}^\circ = A_{22}M_\infty$, $U_3{}^\circ = A_{32}M_\infty$, $\omega_2{}^2 = A_{22}{}^2 + A_{23}{}^2$ и условие 2° запишется

$$A_{23}{}^2 = A_{22}{}^2\,(M_\infty{}^2 - 1) \tag{2.1}$$

При сверхзвуковом течении ($M_\infty > 1$) (2.1) удовлетворяется, если ξ — характеристическая переменная. Условия 1° и 2° выполняются, например, при $A_{22} = A_{33} = 1$, $A_{23} = -\sqrt{M_\infty{}^2 - 1}$, $A_{32} = 0$. Это равносильно выбору переменных $\eta = y$, $\xi = \xi_0 = x - y\sqrt{M_\infty{}^2 - 1}$. Следовательно, в тех областях течения, где производные по ξ и η имеют разный порядок (условие 3°), обычная линейная теория неприменима.

Построим для этих областей модифицированную линейную теорию [4]. Предположим, что ξ — характеристическая переменная исходной системы (1.3) (т. е. $\Delta_2 = 0$ выполняется в точности, а не в нулевом приближении), тогда в (1.6) не входят производные по ξ. Из (1.9) и (1.6) получим

$$u = -M_\infty^{-1}p = -M_\infty^{-1}\rho = (M_\infty^2 - 1)^{-1/2}v \tag{2.2}$$

$$M_\infty \frac{\partial v}{\partial \eta} + \sqrt{M_\infty^2 - 1}\,\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \tag{2.3}$$

Решение для скорости имеет вид $u = F(\xi)$, причем функция F определяется граничными условиями.

Если, согласно методу деформированных координат [15], положить $\xi = \xi_0 + \Psi(\xi_0, \eta)$, то для определения Ψ из условия $\Delta_2 = 0$ получим уравнение

$$2\sqrt{M_\infty^2 - 1}\,\frac{\partial \Psi}{\partial \eta} + (\varkappa + 1)\,M_\infty^2 F(\xi_0) = 0$$

где $\varkappa$ — показатель адиабаты газа. Приведенные соотношения определяют решение задачи в области непригодности обычной линейной теории.

Используем другой метод. Предположим, что $\xi = \xi_0$ — характеристическая переменная линеаризованной системы уравнений (1.9), т. е. $\Delta_2 = 0$ выполняется только в нулевом приближении. С точностью до малых более высокого порядка с учетом (2.2) можно получить, что $\Delta_2 = (\varkappa + 1)\,M^3_\infty u$. С использованием (2.2) и выражения для Δ_2 уравнение (1.6) сводится к нелинейному уравнению

$$(\varkappa + 1)\,M_\infty^3 u\,\frac{\partial u}{\partial \xi_0} + 2\sqrt{M_\infty^2 - 1}\,\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0$$

Решение этого уравнения в точности совпадает с решением, полученным методом деформированных координат. Таким образом, для совершенного газа модифицированная линейная теория и нелинейная теория слабовозмущенных течений приводят к одинаковым результатам.

При трансзвуковом течении ($M_\infty = 1$) из (2.1) следует, что $A_{23} = 0$. Примем для простоты $A_{32} = 0$, $A_{22} = A_{33} = 1$, т. е. $\xi = x$, $\eta = y$, тогда $U_2^\circ = 1$, $U_3^\circ = 0$, $\omega_2^2 = 1$ и условия 1° и 2° выполнены. Предположим, что удовлетворяется и условие 3°, тогда из первых двух уравнений (1.9) получим $p = \rho = -u$. Чтобы решение не было тривиальным, в третьем уравнении (1.9) следует положить $\partial v / \partial\xi = -\partial p / \partial\eta$. Проводя с (1.6) такие же преобразования, как и в предыдущем случае, получим окончательно

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = (\varkappa + 1)\, u \frac{\partial u}{\partial x}$$

Это известные уравнения трансзвуковой теории малых возмущений.

Из рассмотрения (1,8) и порядка нелинейного члена, получим $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha$, $\alpha_2 = 3\alpha / 2$, $r_1 = \beta - \alpha$, $r_2 = \beta - \alpha / 2$. Обычно принимают $\alpha = \beta = 1$. В этом случае $u = O(\varepsilon)$, $v = O(\varepsilon^{3/2})$, $x = O(1)$, $y = O(\varepsilon^{1/2})$ — известные оценки теории слабовозмущенных околозвуковых течений.

Если течение дозвуковое ($M_\infty < 1$), то условию (2.1) удовлетворить невозможно, т. е. при дозвуковых скоростях рассматриваемые области непригодности линейной теории отсутствуют. Известные задачи особых возмущений для уравнений эллиптического типа [15] обусловлены граничными условиями.

3. Перечислим все области нестационарного пространственного течения, для которых удовлетворяются условия (1.10) и выведем нелинейные уравнения, описывающие слабовозмущенное течение в этих областях.

Допустим, что минимальный порядок малости имеют производные по ξ_i, причем индексы i и °, если это не вызовет путаницы, будем опускать ($U_i^\circ = U$, $\omega_i^\circ = \omega$, $\xi_i = \xi$ и т. д.). Обозначим через β_j минимальное значение показателей степени β_{jk} при $k = 1, 2, \ldots, 5$ ($\beta_i = \beta$). Предположим, что A_{ij} — постоянные, а условие 2° выполняется только в нулевом приближении. Условия 1° — 3° можно записать в следующем виде:

$$1°.\ U \neq 0,\ 2°.\ U^2 = \omega^2,\ 3°.\ \beta < \beta_j \quad (j \neq i) \tag{3.1}$$

Существует пять принципиально различных случаев, когда условия (3.1) удовлетворяются.

Первый случай: $\beta_{ik} = \beta$ для любого k, т. е. все производные по ξ одного порядка. Из (1.8) сразу находим, что $\alpha_k = \alpha$, $\beta_{jk} = \beta_j$, $r = \beta - \alpha$, $r_j = \beta_j - \alpha$. Система (1.3) после подстановки в нее (1.7), использования полученных равенств и пренебрежения правыми частями (см. ниже) имеет следующее решение:

$$\rho^{\cdot} = p, \quad U\mathbf{V} = -\mathbf{A}_i p \tag{3.2}$$

Из этих соотношений и условия 2° можно получить

$$\Delta_i = -U\omega^2\gamma p \tag{3.3}$$

Здесь γ — постоянная (для совершенного газа $\gamma = \varkappa + 1$).

При применении метода малых возмущений к (1.6) будем считать, что нелинейный член, содержащий производную по ξ, того же порядка, что и производные по ξ_j, т. е. $\alpha + \beta = \beta_j$. Таким образом, порядки величин в данном случае таковы:

$$(3.4) \qquad a_k = \alpha,\ r = \beta - \alpha,\ r_j = \beta \quad (j \neq i)$$

Уравнение (1.6) примет вид

$$(3.5) \qquad -2\sum_{j\neq i} B_j \frac{\partial p}{q\xi_j} - \omega^2\gamma p \frac{\partial p}{\partial \xi} = \mathrm{L}\cdot\mathrm{S}, \quad B_j = \mathrm{A}_i\mathrm{A}_j - U_iU_j$$

Отметим, что если равенство $\alpha + \beta = \beta_j$ выполняется для одного значения j, то производные по другим переменным под знак суммы в (3.5) не войдут.

Из (3.4) и (3.5) следует, что $\mathrm{L} = O(\varepsilon^{\alpha+\beta})$. По этой причине при получении (3.2) правые части в (1.3) не учитывались.

Второй случай: $\beta_{ik} = \beta\ (k \neq n),\ B_j \neq 0$ хотя бы для одного значения j. В этом случае все производные по ξ, за исключением $\partial\Omega_n / \partial\xi$, имеют одинаковый порядок. Из (1.4) следует, что при $n = 4, 5$ система (1.3) имеет тривиальное решение (все производные по ξ равны нулю), поэтому будем считать $n = 1, 2, 3$. Ниже для определенности рассмотрим случай $n = 2$.

Условие $B_j \neq 0$ используется для того, чтобы можно было приравнять порядок нелинейного члена порядку производной $\partial p / \partial\xi_j$. Чтобы решение не было тривиальным в третьем уравнении (1.3), необходимо положить $A_{i3} = 0$. Окончательная система уравнений имеет вид

$$(3.6) \qquad \rho = p = -\frac{U}{A_{i2}} u = -\frac{U}{A_{i4}} w, \quad U\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\sum_{j\neq i} A_{j3}\frac{\partial p}{\partial \xi_j}$$

$$A_{i3} = 0, \quad -2\sum_{j\neq i} B_j \frac{\partial p}{\partial \xi_j} - \omega^2\gamma p\frac{\partial p}{\partial \xi} = \mathrm{L}\cdot\mathrm{S}$$

Порядки членов таковы:

$$(3.7) \qquad a_k = \alpha,\ a_n = 2\alpha,\ r = \beta - \alpha,\ r_l = \beta,\ r_j \geqslant \beta \quad (j \neq i, l)$$

Если $B_l = 0\ (l \neq i, j)$, то соответствующие члены просто выпадают из последнего уравнения (3.6).

Третий случай: $\beta_{ik} = \beta\ (k \neq n),\ B_l = 0$ хотя бы для одного значения l. Если $B_l = 0$, то порядок нелинейного члена можно приравнять порядку наибольшей производной по ξ_l. При $n = 2$ этой производной является $\partial v / \partial\xi_l$. Таким образом, $\beta + \alpha = a_n + r_l$. Кроме того, из условия нетривиальности решения третьего уравнения (1.3) следует, что $a_n + \beta - \alpha = \alpha + r_l$. С учетом (1.8) получим окончательно

$$(3.8) \qquad a_k = \alpha,\ a_n = 3\alpha/2,\ r = \beta - \alpha,\ r_l = \beta - \alpha/2,\ r_j \geqslant \beta \text{ при}$$

$$B_j \neq 0,\ r_j \geqslant \beta - \alpha/2 \text{ при } B_j = 0 \quad (j \neq i, l)$$

Основные уравнения, определяющие течение в этой области, запишутся

$$\rho = p = -\frac{U}{A_{i2}}u = -\frac{U}{A_{i4}}w, \quad A_{i3} = 0, \quad U\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\sum_{l\neq i} A_{l3}\frac{\partial p}{\partial \xi_l} \tag{3.9}$$

$$-2\sum_{j\neq i,l} B_j\frac{\partial p}{\partial \xi_j} + U\sum_{l\neq i} A_{l3}\frac{\partial v}{\partial \xi_l} - \omega^2\gamma p\frac{\partial p}{\partial \xi} = \mathrm{L\cdot S}$$

Индекс l соответствует тем переменным ξ_l, для которых $B_l = 0$, а j — тем, для которых $B_j \neq 0$. Отметим, что все коэффициенты B могут обратиться в нуль только для околозвукового стационарного течения. В случае нестационарного течения это условие означало бы равенство нулю якобиана преобразования (1.2).

Четвертый случай: $\beta_{ik} = \beta$ $(k \neq n, s)$, $B_j \neq 0$ хотя бы для одного значения j. Все производные по ξ, за исключением двух, имеют одинаковый порядок. Нетривиальное решение имеет место только при $n, s = 1, 2, 3$. Примем $n = 2$, $s = 3$, тогда из третьего и четвертого уравнений (1.3) следует, что $A_{i3} = A_{i4} = 0$. Рассуждая, как и в предыдущем случае, получим систему уравнений

$$\rho = p = -\frac{U}{A_{i2}}u, \quad U\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\sum_{j\neq i} A_{j3}\frac{\partial p}{\partial \xi_j}, \quad U\frac{\partial w}{\partial \xi} = -\sum_{j\neq i} A_{j4}\frac{\partial p}{\partial \xi_j} \tag{3.10}$$

$$A_{i3} = A_{i4} = 0, \quad -2\sum_{j\neq i} B_j\frac{\partial p}{\partial \xi_j} - \omega^2\gamma p\frac{\partial p}{\partial \xi} = \mathrm{L\cdot S}$$

Если $B_l = 0$ $(l \neq i, j)$, то соответствующий член просто выпадает из последнего уравнения (3.10). Порядки членов в данном случае таковы:

$$\alpha_k = \alpha \ (k \neq n, s), \quad \alpha_n = \alpha_s = 2\alpha, \quad r = \beta - \alpha, \quad r_j \geqslant r_l = \beta \tag{3.11}$$

Следует отметить, что в третьем и четвертом уравнениях (3.10), на первый взгляд, необходимо было бы сохранить в правых частях L_n и L_s. Однако ближайшее рассмотрение релаксационных процессов показывает, что их можно не учитывать.

Пятый случай: $\beta_{ik} = \beta$ $(k \neq n, s)$, $B_l = 0$. Будем приписывать индекс l тем переменным, для которых $B_l = 0$, а индекс j — тем, для которых $B_j \neq 0$. Считая порядки нелинейного члена и члена, содержащего $\partial v / \partial \xi_l$ или $\partial w / \partial \xi_l$, одинаковыми, как в предыдущем случае, получим ($n = 2$, $s = 3$)

$$\rho = p = -\frac{U}{A_{i2}}u, \quad U\frac{\partial v}{\partial \xi} = -\sum_{l\neq i} A_{l3}\frac{\partial p}{\partial \xi_l}, \quad U\frac{\partial w}{\partial \xi} = -\sum_{l\neq i} A_{l4}\frac{\partial p}{\partial \xi_l} \tag{3.12}$$

$$A_{i3} = A_{i4} = 0, \quad -2\sum_{j\neq i} B_j\frac{\partial p}{\partial \xi_j} + U\sum_{l\neq i}\frac{\partial}{\partial \xi_l}(A_{l3}v + A_{l4}w) -$$

$$-\omega^2\gamma p\frac{\partial p}{\partial \xi} = \mathrm{L\cdot S}$$

Здесь также справедливы все замечания относительно B, сделанные при рассмотрении третьего случая. Порядки величин таковы:

$$\alpha_k = \alpha, \quad \alpha_n = \alpha_s = 3\alpha / 2, \quad r = \beta - \alpha, \quad r_l = \beta - \alpha / 2, \quad r_j = \beta \tag{3.13}$$

Дальнейшее увеличение количества производных по ξ, имеющих более высокий порядок, приводит к тривиальным уравнениям.

Из проведенных выкладок следует, что для всех случаев

(3.14) $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} = UL_1^\circ - A_i l^\circ + UL_5^\circ = O(\varepsilon^{\alpha+\beta})$

4. Рассмотрим гомогенную или гетерогенную среду, в которой может протекать N неравновесных процессов (колебательная релаксация, химические реакции, рассогласование скоростей и температур твердых или жидких частиц и газа, массообмен между фазами и т. д.).

Обозначим через q_j параметр релаксации (полноту неравновесного процесса), а через $Q_j = q_{je} - q_j$ — сродство этого процесса (q_{je} — равновесное значение параметра релаксации). Не будем приводить общее выражение для $\mathbf{L}$, а запишем его сразу в линеаризованном виде. Для этого разделим все релаксационные процессы на несколько типов. Допустим, что k релаксационных процессов при небольшом изменении параметров течения слабо отклоняются от равновесного состояния (околоравновесное течение, $Q_k^\circ = 0$), $l + m$ процессов протекают очень медленно (околозамороженное состояние, $Q_l^\circ = 0$, $Q_m^\circ \neq 0$), а n релаксационных процессов могут протекать от замороженного до равновесного состояния ($Q_n^\circ = 0$). Выражение для $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$ можно представить в следующем общем виде:

(4.1) $$\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} = U^2 \sum_k H_k \frac{\partial Q_k}{\partial \xi} + U^2 \sum_{j=l,m,n} H_j \frac{\partial q_j}{\partial \xi} \qquad (k + l + m + n = N)$$

Кинетические уравнения после применения к ним метода малых возмущений запишутся так [9,11] (Λ_j — времена релаксации):

(4.2) $$U \frac{\partial q_j}{\partial \xi} = Q_j^\circ \Lambda_j^{-1} + Q_j \Lambda_j^{-1}$$

В дальнейшем равновесные значения релаксационных параметров представим в таком виде:

(4.3) $$q_{je} = E_j p$$

Уравнения (4.1) и (4.2) будут использованы в тех областях течения, в которых обычная линейная теория неприменима (т. е. в областях, соответствующих рассмотренным пяти случаям), поэтому для неравновесных процессов, обусловленных обменом энергии, (4.3) следует из $q_e = q_e(\rho, p)$, так как для всех пяти случаев $\rho = p$. Если неравновесные процессы обусловлены обменом количества движения, то $q_e = u$, v или w [16], причем составляющие скорости или выражаются через p, или не входят в $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$ (вследствие $A_{i3} = 0$ или $A_{i4} = 0$).

При помощи (4.3) кинетические уравнения (4.2) можно записать в следующих двух альтернативных формах:

(4.4) $$\frac{\partial Q_k}{\partial \xi} = E_k \frac{\partial p}{\partial \xi} - \frac{Q_k}{U\Lambda_k}, \qquad U\Lambda_j \frac{\partial q_j}{\partial \xi} = Q_j^\circ + E_j p - q_j \quad (j = l, m, n)$$

Зная порядки величин $\xi = O(\varepsilon^{\beta-\alpha})$, $p = O(\varepsilon^\alpha)$ и $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} = O(\varepsilon^{\alpha+\beta})$, которые одинаковы для всех пяти рассмотренных областей непригодности линейной теории, оценим порядки параметров, характеризующих релаксационные процессы. Предположим, что $H = O(\varepsilon^s)$, тогда из (4.1) сразу определим $Q_k = O(\varepsilon^{2\alpha-s})$, $q_j = O(\varepsilon^{2\alpha-s})$ $(j = l, m, n)$.

Считая, что $Q_m{}^\circ = O(1)$, и сохраняя в (4.4) только члены низшего порядка, получим

$$
\begin{aligned}
&Q_k = \Lambda_k E_k U \frac{\partial p}{\partial \xi}, \quad q_k = E_k p, \quad \Lambda_k = O(\varepsilon^{2\alpha-\beta-s}) \\
&U\frac{\partial q_l}{\partial \xi} = E_l \Lambda_l^{-1} p, \quad Q_l = E_l p, \quad \Lambda_l = O(\varepsilon^{s-\beta}) \\
&\frac{\partial q_m}{\partial \xi} = \mathring{Q}_m \Lambda_m^{-1}, \qquad \Lambda_m = O^{(s-\beta-\alpha)} \\
&U\Lambda_n \frac{\partial q_n}{\partial \xi} = E_n p - q_n, \quad s = \alpha, \quad \Lambda_n = O(\varepsilon^{\alpha-\beta})
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

В (4.5) для общности введены оценки для Λ_j, однако если $\Lambda_j = O(1)$, то $s = 2\alpha - \beta$, $s = \beta$, $s = \beta + \alpha$, $s = \alpha = \beta$ для каждого из четырех типов релаксационных процессов соответственно. Введем обозначения

$$
\mu = U^2 \sum_k \Lambda_k E_k H_k, \quad \chi = -\sum_l \Lambda_l^{-1} E_l H_l, \quad \delta = -\sum_m \Lambda_m^{-1} E_m H_m
$$

и подставим первые три соотношения (4.5) в (4.1), тогда

$$
U^{-1}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} - \mu \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + \chi p + \delta = U \sum_n H_n \frac{\partial q_n}{\partial \xi} = K \tag{4.6}
$$

Используя выражение $q_n = E_n p + Q_n$ и первое уравнение (4.4), из (4.6) можно исключить q_n. Результат следующий:

$$
(-1)^n a_0 K + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial^r}{\partial \xi^r} [(-1)^{n-r} a_r K + b_r p] = 0 \tag{4.7}
$$

где a_r— коэффициенты многочлена $P(x) = (x - U^{-1}\Lambda_1^{-1}) \ldots (x - U^{-1}\Lambda_n^{-1})$, а b_r получаются в процессе вывода уравнения (4.7).

Отметим, что при построении нелинейной теории слабовозмущенных течений в соответствии с выражением (4.1) для $\mathbf{L}\cdot\mathbf{S}$ скорость звука должна быть равновесной для k релаксационных процессов и замороженной по отношению к остальным. Условие, что в $\mathbf{L}$ не входят производные от Ω_j, в данном случае выполняется.

5. С использованием (4.6), (4.7), (3.5), (3.6), (3.9), (3.10) или (3.12) можно получить различные нелинейные уравнения, описывающие течения в тех областях, где обычная линейная теория неприменима.

Рассмотрим, например, пространственное нестационарное сверхзвуковое течение для релаксационных процессов первых трех типов. Условия (1.10) выполняются, если выбрать $A_{11} = A_{22} = A_{33} = A_{44} = 1$, $A_{21} = -2M_\infty$, $A_{24} = -B_\infty$ ($u^\circ = M_\infty$, $v^\circ = w^\circ = 0$, $B_\infty{}^2 = M_\infty{}^2 - 1$). Тогда $U_1 = 1$, $U_2 = -M_\infty$, $U_3 = U_4 = 0$. Это соответствует выбору переменных $\xi_1 = t$, $\xi_2 = \xi = -2M_\infty t + x - B_\infty z$, $\xi_3 = y$, $\xi_4 = z$. Уравнения

$$
\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{B_\infty}{M_\infty}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 u \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\chi}{2} u + \frac{\delta}{2M_\infty}
$$

описывают течение в области непригодности обычной линейной теории, соответствующей второму случаю. Порядки величин в этих уравнениях определяются по формулам (3.7).

Рассмотрим пространственное нестационарное трансзвуковое течение. Условия (1.10) выполняются, если выбрать $A_{11} = A_{22} = A_{33} = A_{44} = M_\infty = 1$, положив остальные A_{ij} нулю, тогда $U_1 = U_2 = 1$, $U_3 = U_4 = 0$, $B_1 = -1$, $B_2 = B_3 = B_4 = 0$. Для релаксационных процессов, близких к замороженному или равновесному состояниям, получим из (3.12) и (4.6)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad -2\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - \gamma u\frac{\partial u}{\partial x} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \chi u + \delta = 0$$

Для совершенного газа эти уравнения изучал О. С. Рыжов [17].

Отметим, что в данном случае не обязательно полагать в нулевом приближении $M_\infty^m = 1$. Можно, например, считать $U^2 - \omega^2 = O(\varepsilon^\alpha)$, тогда, вводя потенциал скорости φ, из (3.12) для одного релаксационного процесса четвертого типа (течение с близкими скоростями звука) с использованием (4.7) получим

$$\Lambda\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(M_\infty^2 - 1 - \gamma\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}\right] +$$
$$+\left(M_e^2 - 1 - \gamma_e\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x} = 0$$

Автор признателен А. Н. Крайко за ценные замечания при обсуждении работы.

Поступила 5 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lighthill M. J.* Viscosity effects in sound waves of finite amplitude. In: Surveys in mechanics. Cambridge Univ. Press, 1956.
2. *Whitham G. B.* The flow pattern supersonic projectile. Communs. Pure and Appl. Math., 1952, vol. 5, No. 3.
3. *Fox P. A.* Perturbation theory of wave propagation based on the method of characteristics. J. Math. and Phys., 1955, vol. 34, No. 3.
4. *Крайко А. Н., Ткаленко Р. А.* К построению линейной теории неравновесных и равновесных течений. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 6.
5. *Jones J. G.* On the near-equilibrium and near-frozen regions in an expansion wave in a relaxing gas. J. Fluid Mech. 1964, vol. 19, pt. 1.
6. *Blythe P. A.* Non-linear wave propagation in a relaxing gas. J. Fluid Mech., 1969, vol. 37, pt. 1.
7. *Рыжов О. С.* О нелинейной акустике химически активных сред. ПММ, 1971, т. 35, вып. 6.
8. *Наполитано Л., Рыжов О. С.* Об аналогии между неравновесными и вязкими инертными течениями при околозвуковых скростях. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 5.
9. *Ткаленко Р. А.* Сверхзвуковое неравновесное течение газа около тонких тел вращения. ПМТФ, 1964, № 2.
10. *Napolitano L. G.* Generalized velocity potential equation for plurireacting mixture. Arch. Mech. Stosowanej, 1964, vol. 16, No. 2.
11. *Крайко А. Н.* Исследование слабо возмущенных сверхзвуковых течений при произвольном числе неравновесных процессов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
12. *Ткаленко Р. А.* К линейной теории сверхзвуковых течений смеси газа и частиц. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 1.
13. *Becker E. Böhme G.* Steady one-dimensional flow; structure of compression waves. In: Gas dynamics, vol. 1, Nonequilibrium flows. N. Y., 1969.
14. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными, М., Физматгиз, 1961.
15. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости. М., «Мир», 1967.
16. *Крайко А. Н., Стернин Л. Е.* К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
17. *Рыжов О. С.* Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. М., ВЦ АН СССР, 1965.