Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 531.36

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

А. А. Розенблюм

(Горький)

Рассматриваются почти линейные симметрические гиперболические системы с постоянными коэффициентами в линейной части и содержащие малый параметр при нелинейных членах. Используемый для построения приближенных решений асимптотический метод основан на работах Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского [1] и применялся к системам с одной независимой пространственной переменной [2, 3]. Наряду с медленным временем вводятся медленные координаты. Для приближенного решения получается не бесконечная, как в [4], а конечная система почти линейных дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, которая проще исходной. Излагается алгоритм получения приближенных решений. Обосновывается близость приближенного решения к точному на произвольном конечном интервале.

1. Рассмотрим систему

$$u_t+\sum_{l=1}^{s}A^{(l)}u_l+Bu=\mu f(x,t)\,P(u) \tag{1.1}$$

$$u(x,t)=\{u^{(1)},\ldots,u^{(n)}\},\qquad x=\{x_1,\ldots,x_s\}$$

$$u_l=\partial u/\partial x_l$$

$$f(x,t)=\{f^{(1)},\ldots,f^{(n)}\},\qquad f\in C_{r+3},\qquad r>s/2+1$$

$$fP=\{f^{(1)}P^{(1)},\ldots,f^{(n)}P^{(n)}\}$$

$$f(x,t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f_m\exp\Big[i\Big(m_0\nu t-\sum_{l=1}^{s}m_l\varkappa_l x_l\Big)\Big]$$

$$m=\{m_0,m_1,\ldots,m_s\},\qquad P=\{P^{(1)},\ldots,P^{(n)}\}$$

Здесь $A^{(l)}$, B — постоянные действительные квадратные матрицы порядка n, причем $A^{(l)}$ — симметричные матрицы, μ — малый параметр, $P(u)$ — многочлен по u.

Наряду с системой (1.1) рассмотрим порождающую линейную систему с постоянными коэффициентами

$$u_t+\sum_{l=1}^{s}A^{(l)}u_l+Bu=0 \tag{1.2}$$

Эта система имеет решения вида (сокращение к.с. означает выражение, комплексно-сопряженное написанному перед ним)

$$u(x,t)=a\psi\exp[i(\omega t-kx)]+\text{к.с.},\qquad k=\{k_1,\ldots,k_s\} \tag{1.3}$$

Здесь a — произвольное комплексное число, ψ — правый нуль вектор матрицы H, ω и k связаны дисперсионным уравнением (I — единичная матрица)

(1.4) $$D(\omega, k) = \det H = 0, \quad H = \omega I - \sum_{l=1}^{s} A^{(l)} k_l - iB$$

Пусть существует непустое множество Ω действительных частот ω_c, соизмеримых между собой и соизмеримых с ν, и волновых векторов $k_c = \{k_{c1}, \ldots, k_{cl}\}$ с действительными компонентами, причем одноименные компоненты $k_{1s}, \ldots, k_{cl}, \ldots$ соизмеримы между собой и соизмеримы с $\varkappa_l$, удовлетворяющих дисперсионному уравнению $D(\omega_c, k_c) = 0$. Будем предполагать также, что

(1.5) $$\partial D(\omega_c, k_c) / \partial\omega \neq 0$$

Следовательно, уравнение (1.4) в окрестностях точек (ω_c, k_c) определяет ω как однозначную функцию k.

Далее предположим, что значения $d\omega / dk_l |_{k=k_{cl}}$ действительны.

Каждому набору значений (ω_c, k_c) соответствует собственная волна системы (1.1) вида (1.3).

Поставим задачу построения приближенного решения системы (1.1), порожденного начальной комбинацией волн вида ($a_c^{(0)}$ — заданные комплексные числа)

(1.6) $$\sum_{c=1}^{d} a_c^{(0)} \psi_c \exp(-ik_c x) + \text{к. с.}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (\omega_c, k_c) \in \Omega$$

Ниже предполагается выполнение следующих условий.

1°. Множество N_1 пар векторов

$$(m^{(b)}, n^{(b)}), \quad m^{(b)} = \{m_0^{(b)}, m_1^{(b)}, \ldots, m_s^{(b)}\},$$
$$n^{(b)} = \{n_1^{(b)}, \ldots, n_d^{(b)}\}$$

с целочисленными компонентами, для которых

$$(m_0^{(b)}\nu + n^{(b)}\omega, \ m_1^{(b)}\varkappa_1 + n^{(b)}k^{(1)}, \ldots, m_s^{(b)}\varkappa_s + n^{(b)}k^{(s)}) \in \Omega$$

$$b = d+1, \ldots, q, \quad n^{(b)}\omega = \sum_{c=1}^{d} n_c^{(b)}\omega_c, \quad n^{(b)}k^{(l)} = \sum_{c=1}^{d} n_c^{(b)}k_{cl}$$

конечно, т. е. система имеет конечное число комбинационных резонансных волн $(\omega_c, k_c) \in \Omega$, $c = d+1, \ldots, q$.

2°. Существует такая константа L_1, что

$$\inf | D(m_0^{(b)}\nu + n^{(b)}\omega, \ m_1^{(b)}\varkappa_1 + n^{(b)}k^{(1)}, \ldots$$
$$\ldots, m_s^{(b)}\varkappa_s + n^{(b)}k^{(s)}) | = L_1 > 0, \quad \{m^{(b)}, n^{(b)}\} \in N_1$$

Это требование означает, что число комбинационных волн, сколь угодно близких к резонансным, конечно. (При практических расчетах комбинационные волны, для которых $D(\omega, k) \sim \mu$, следует считать резонансными.)

Условия 1°, 2° выполняются, в частности, если, говоря геометрическим языком, определяемая дисперсионным уравнением поверхность в E_{s+1} (пространстве $\omega_0, k_1, \ldots, k_s$) ограничена по одной из координат.

Приближенное решение системы (1.1) в полупространстве $(-\infty < x < \infty,\ 0 \leqslant t < \infty)$ будем искать в классе C_r в виде

$$u^{(1)}(x,t) = \sum_{c=1}^{q} a_c(\chi,\tau)\psi_c \exp[i(\omega_c t - k_c x)] + \tag{1.7}$$

$$+ \text{к. с.} + \mu w(x,t,\chi,\tau), \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 \leqslant t < \infty$$

$$\chi = \chi_0 + \mu x, \quad \tau = t_0 + \mu t$$

Здесь χ_0, τ_0 — постоянные, $a_c(\chi,\tau)$ — неизвестные скалярные комплексные функции медленных переменных χ, τ, $w(x,t,\chi,\tau)$ — неизвестная действительная вектор-функция, периодическая по x и t с периодами $\Lambda = \{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_s\}$ и θ соответственно; Λ_l — наименьшее общее кратное чисел $2\pi / \varkappa_l, 2\pi / k_{cl}$ $(c = 1, \ldots, d)$; θ — наименьшее общее кратное чисел $2\pi / \nu$, $2\pi / \omega_c$ $(c = 1, \ldots, d)$.

Таким образом, в (1.7), кроме начальных волн (ω_c, k_c), $c = 1, \ldots, d$, включены резонансные комбинационные волны (ω_c, k_c), $c = d + 1, \ldots, q$.

Уравнение для функции $w(x,t,\chi,\tau)$ получим приравниванием нулю коэффициента при μ после подстановки в оператор

$$N(u^{(1)}) = u_t^{(1)} + \sum_{l=1}^{s} A^{(l)} u_l^{(1)} + Bu^{(1)} - \mu f(x,t) P(u^{(1)})$$

вместо $u^{(1)}$ выражения (1.7) с учетом представления

$$P(u^{(1)}) = P(V + \mu w) = P(V) + \mu\varphi(x,t,a,w) \tag{1.8}$$

$$V = \sum_{c=1}^{q} a_c(\chi,\tau)\psi_c \exp[i(\omega_c t - k_c x)] + \text{к. с.}$$

Здесь $\varphi(x,t,a,w)$ — периодическая функция по x, t (тригонометрический многочлен), многочлен от a, w, μ.

При таком выборе w функция $u^{(1)}$ будет точным решением системы

$$u_t^{(1)} + \sum_{l=1}^{s} A^{(l)} u_l^{(1)} + Bu^{(1)} = \mu f(x,t) P(u^{(1)}) + \mu^2 g^{(1)}(x,t,\mu) \tag{1.9}$$

$$g^{(1)}(x,t,\mu) = f(x,t)\varphi(x,t,a,w) - \frac{\partial w}{\partial \tau} - \sum_{l=1}^{s} A^{(l)} \frac{\partial w}{\partial \chi_l} \tag{1.10}$$

Здесь $f\varphi = \{f^{(1)}\varphi^{(1)}, \ldots, f^{(n)}\varphi^{(n)}\}$.

Для определения w получим линейную систему

$$w_t + \sum_{l=1}^{s} A^{(l)} w_l + Bw = h(x,t,\chi,\tau) \tag{1.11}$$

$$h(x,t,\chi,\tau) = f(x,t)P(V) - \Big\{\sum_{c=1}^{q} \exp[i(\omega_c t - k_c x)] \times \tag{1.12}$$

$$\times \Big[I\frac{\partial a_c}{\partial \tau} + \sum_{l=1}^{s} A^{(l)} \frac{\partial a_c}{\partial \chi_l}\Big]\psi_c + \text{к. с.}\Big\}$$

В системе (1.11) медленные переменные χ, τ будем считать параметрами, не зависящими от x, t. Из (1.12) следует, что $h(x, t, \chi, \tau)$ состоит из двух слагаемых — произведения f на тригонометрический многочлен $P(V)$, у которого коэффициенты при гармониках являются многочленами от комплексных амплитуд a_c, и тригонометрического резонансного многочлена, коэффициенты которого при гармониках зависят от $\partial a_c / \partial x$, $\partial a_c / \partial \tau$. Представим $h(x, t, \chi, \tau)$ в виде ряда Фурье и выделим в нем резонансную часть

$$(1.13)\qquad h(x,t,\chi,\tau)=\Big\{\sum_{c=1}^{q}F_c(\chi,\tau)\exp\left[i(\omega_c t-k_c x)\right]+ +\sum_a F_a(\chi,\tau)\exp\left[i(\omega_a t-k_a x)\right]\Big\}+\text{к. с.}$$

Здесь

$$(\omega_c,k_c)\in\Omega,\qquad \omega_a=m_0^{(b)}\nu+n^{(b)}\omega$$

$$k_a=m^{(b)}\varkappa+n^{(b)}k,\qquad \{m^{(b)},n^{(b)}\}\in N_1$$

$$(1.14)\qquad F_{c,a}(x,\tau)=\frac{1}{\theta\cdot\Lambda_1\ \cdots\Lambda_s}\int_0^\theta\int_0^\Lambda h(x,t,\chi,\tau)\times \times\exp\left[-i(\omega_{c,a}t-k_{c,a}x)\right]dtdx$$

Решение системы (1.11) ищем в виде

$$(1.15)\qquad w(x,t,\chi,\tau)=\Big\{\sum_{c=1}^{q}w_c(\chi,\tau)\exp\left[i(\omega_c t-k_c x)\right]+ +\sum_a w_a(\chi\ \tau)\exp\left[i(\omega_a t-k_a x)\right]\Big\}+\text{к. с.}$$

В результате подстановки (1.13), (1.15) в (1.11) получаются линейные алгебраические системы для определения $w_{c,a}(\chi, \tau)$

$$(1.16)\qquad H_{c,a}w_{c,a}=F_{c,a}$$

Так как $D(\omega_a, k_a)\neq 0$, то $w_a(\chi, \tau)$ определяются однозначно.

Для существования $w_c(\chi, \tau)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$(1.17)\qquad (\zeta_c,\ F_c)=0,\qquad c=1,\ldots,q$$

Здесь ζ_c — любой правый нуль вектор матрицы H_c^*, сопряженной матрице H_c. Ограничимся случаем, когда ранг матрицы H_c равен $n-1$. Тогда ζ_c определяется с точностью до множителя, и решение (1.16) имеет вид

$$(1.18)\qquad w_c(\chi,\tau)=z_c(\chi,\tau)+c_c(\chi,\tau)\psi_c$$

Здесь $z_c(\chi, \tau)$ — любое решение (1.16), а $c_c(\chi, \tau)$ — произвольные функции χ, τ. В дальнейшем предполагается, что они принадлежат классу C_{r+1}.

Дифференциальные уравнения для определения медленных амплитуд $a_c(\chi, \tau)$ получим из условия (1.17) с учетом (1.14), (1.12) в виде

$$\frac{\partial a_c}{\partial \tau} + \sum_{l=1}^{s} v_{cl}\frac{\partial a_c}{\partial x_l} = f_c(a), \quad v_{cl} = \frac{(\zeta_c, A^{(l)}\psi_c)}{(\zeta_c, \psi_c)} \tag{1.19}$$

$$f_c(a) = \frac{1}{(\zeta_c, \psi_c)\,\theta\cdot\Lambda_1 \ldots \Lambda_s}\int_0^\theta\int_0^\Lambda f(x\ t)\,P(V)\exp\left[-i(\omega_c t - k_c x)\right]dt\,dx$$

Здесь $f_c(a)$ — многочлен от амплитуд a_c той же степени, что P. Коэффициенты v_{cl} являются компонентами групповых скоростей v_c распространения волн с амплитудами a_c.

Чтобы показать это, продифференцируем по k_l тождество $(\zeta, H\psi) = 0$, в котором будем считать ω функцией $k_1, \ldots, k_s$, определяемой дисперсионным уравнением

$$(\partial\zeta / \partial k_l, H\psi) + (\zeta, I\partial\omega / \partial k_l\psi) - (\zeta, A^{(l)}\psi) + (\zeta, H\partial\psi / \partial k_l) = 0$$

Поскольку $H\psi = 0$ и $(\zeta, H\partial\psi / \partial k_l) = (H^*\zeta, \partial\psi / \partial k_l) = 0$, то

$$\partial\omega / \partial k_l = (\zeta, A^{(l)}\psi) / (\zeta, \psi) = -D_{kl}'(\omega, k) / D_\omega'(\omega, k)$$

Отсюда при $k = k_c$ получим $v_{cl} = \partial\omega / \partial k_{l|k=k_c}$.

По предположению, значения $\partial\omega / \partial k_{l|k=k_c}$ действительны. Из (1.5) вытекает, что v_{cl} конечны, и система (1.19) является гиперболической.

Начальные условия следуют из (1.6) и имеют вид

$$a_c(\chi, 0) = a_c^{(0)}, \quad c = 1, \ldots, d; \quad a_c(\chi, 0) = 0, \quad c = d+1, \ldots, q \tag{1.20}$$

Система (1.19) с начальными условиями (1.20) локально имеет аналитическое решение. Будем предполагать, что задача (1.19), (1.20) имеет решение в классе C_{r+2} в области $-\infty < \chi < \infty$, $0 \leqslant \tau < \infty$.

Тогда функция $w(x, t, \chi, \tau)$, определяемая рядом (1.15), принадлежит классу C_{r+1} в полупространстве x, t.

Правые части систем (1.16) являются многочленами от a, $\partial a / \partial\tau$, $\partial a / \partial\chi$ и потому непрерывно дифференцируемы $r + 1$ раз. Следовательно, коэффициенты Фурье $w_{c,\alpha}(\chi, \tau)$, с учетом выбора функции $c_c(\chi, \tau)$ в классе C_{r+1}, также принадлежат классу C_{r+1}.

Заметим, что неоднозначность в определении $w(x, t, \chi, \tau)$ в силу произвола $c_c(\chi, \tau)$ имеет порядок μ^2 в любой ограниченной области $G: \{x \in X, 0 \leqslant t \leqslant T$ (X — ограниченная часть пространства $\{x_1, \ldots, x_s\}$).

Действительно

$$c_c(\chi, \tau) - c_c(\chi, 0) = \int_0^\tau \frac{\partial c_c}{\partial\tau}\partial\tau, \quad |c_c(\chi, \tau) - c_c(\chi, 0)| \leqslant \mu T L_2$$

Здесь L_2 — константа, ограничивающая $\partial c / \partial\tau$ в области G_μ: $\{\chi \in \mu X,\ 0 \leqslant \tau \leqslant \mu T\}$. Поэтому неоднозначность в определении $u^{(1)}$ имеет порядок μ^2. Аналогично доказывается, что такой же порядок имеет неоднозначность в определении $\partial^j u^{(1)} / \partial\chi^j$, $j = 1, \ldots, r$.

Сходимость ряда (1.15) и возможность его почленного дифференцирования $r+1$ раз определяются его нерезонансной частью. Дифференцируя системы (1.16) и разрешая их, получим

$$D_j w_a = H_a^{-1} D_j F_a, \qquad j = 0, 1, \ldots, r+1$$

Здесь символ D_j означает производную порядка j по любой комбинации независимых переменных τ, $\chi_1, \ldots, \chi_s$. В силу условия 2° существует такая константа L_3, что

$$|D_j w_a| \leqslant L_3 |D_j F_a|$$

Коэффициенты F_a представляют собой произведение коэффициентов Фурье f_m функции $f(x, t)$ на многочлены от амплитуд и их производных до порядка $r+1$ с конечным набором коэффициентов. В области G_μ эти многочлены равномерно ограничены некоторой константой. Поэтому $D_j w_a$ убывают так же, как коэффициенты Фурье функции $D_j f(x, t)$, т. е. быстрее, чем

$$1/|m|^{r+3-j}, \qquad |m|^j = |m_0|^{j_0} \cdot |m_1|^{j_1} \ldots |m_s|^{j_s}$$
$$j_0 + j_1 + \ldots + j_s = j$$

Следовательно, ряд (1.15) и его производные до порядка $r+1$ сходятся абсолютно и равномерно в области G и $w(x, t, \chi, \tau) \in C_{r+1}$.

Из (1.7) следует, что поскольку $a_c \in C_{r+2}$, $w \in C_{r+1}$, то $w^{(1)}(x, t) \in C_{r+1}$, а из (1.10) следует, что $g^{(1)}(x, t, \mu) \in C_r$.

Таким образом, задача получения приближенного решения сводится к интегрированию почти линейной системы (1.19) и решению алгебраических систем (1.16). Система (1.19) значительно проще исходной, и ее решение может быть найдено, например, методом последовательных приближений интегрирования вдоль лучей

$$\chi_l - v_{cl}\,\tau = \mathrm{const}$$

$$a_c^{(m+1)}(\chi, \tau) = a_c^{(0)} + \int_0^\tau f_c\{a^{(m)}[\chi - v_c(\tau - \sigma), \sigma]\}\,d\sigma$$

2. Докажем близость приближенного решения $u^{(1)}(x, t)$ к точному $u(x, t)$ в ограниченной области полупространства (x, t) при условии совпадения или близости начальных условий.

Теорема. Пусть $u(x, t)$ — решение системы (1.1), $u^{(1)}(x, t)$ — решение системы (1.9) $u(x, t) \in C_r$, $u^{(1)}(x, t) \in C_r$ при $-\infty < x < \infty$, $0 \leqslant t < \infty$. Пусть

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u^{(1)}(x, 0) = \psi(x), \quad \varphi, \psi \in C_r, \quad -\infty < x < \infty \tag{2.1}$$

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < \mu^2 K, \quad |D_k \varphi(x) - D_k \psi(x)| < \mu^2 K \tag{2.2}$$

Здесь $k \leqslant r$, D_k — производная порядка k по любой комбинации переменных $x_1, \ldots, x_s$, K — const.

Тогда, каковы бы ни были $T > 0$ и ограниченная замкнутая односвязная область X с гладкой границей L, существует такая постоянная M, что

$$|u^{(1)}(x, t) - u(x, t)| < \mu^2 M, \qquad \forall\, x \in X, \; 0 \leqslant t \leqslant T$$
$$0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$$

В целях сокращения записи здесь не отмечается зависимость u, $u^{(1)}$, $g^{(1)}$, φ, ψ от μ. Предполагается, что начальные функции $\varphi(x, \mu)$, $\psi(x, \mu)$ и их производные $D_k\varphi(x, \mu)$, $D_k\psi(x, \mu)$, $k \leqslant r$ — непрерывные функции μ.

В силу теоремы о непрерывной зависимости решения почти линейной системы от параметра [5] $u(x, t, \mu)$, $D_k u$, $u^{(1)}(x, t, \mu)$, $D_k u^{(1)}$ при $k \leqslant r$ являются непрерывными функциями μ. Функция $g^{(1)}(x, t, \mu)$, как это следует из (1.10), также непрерывно зависит от μ.

Доказательство. Дифференцирование систем (1.1), (1.9) по любой комбинации переменных до порядка r включительно приводит к продолженным системам вида

$$y_t + \sum_{l=1}^{s} R^{(l)} \frac{\partial y}{\partial x_l} + Qy = \mu f_1(x, t, y) \tag{2.3}$$

$$y_t^{(1)} + \sum_{l=1}^{s} R^{(l)} \frac{\partial y^{(1)}}{\partial x_l} + Qy^{(1)} = \mu f_1(x, t, y^{(1)}) + \mu^2 g_1(x, t)$$

Здесь y, $y^{(1)}$ — векторы, компонентами которых являются компоненты векторов u, $u^{(1)}$ соответственно и их производных до порядка r включительно по любой комбинации $x_1, \ldots, x_s$; $R^{(b)}Q$ — клеточные квадратные матрицы, образованные из матриц A^l и B соответственно. Вектор-функция f_1 — сумма произведений периодических функций от x, t, на многочлены от y. Компонентами вектор-функции $g_1(x, t)$ являются компоненты вектор-функции $g^{(1)}(x, t)$ и ее производных до порядка r включительно по любой комбинации переменных $x_1, \ldots, x_s$.

В силу (2.1), (2.2) $|y(x, 0) - y^{(1)}(x, 0)| < \mu^2 K$.

Рассматривая (2.3) как тождества относительно x, t, которые получаются после подстановки в уравнения их решений, удовлетворяющих начальным условиям, вытекающим из (2.1), вычтем первое соотношение (2.3) из второго и рассмотрим полученное тождество. В силу леммы Адамара о конечных приращениях имеем

$$f_1(x, t, y^{(1)}) - f_1(x, t, y) = \varepsilon(x, t, y^{(1)}, y)(y^{(1)} - y) = \varepsilon(x, t)\, v(x, t)$$
$$v = y^{(1)} - y$$

Теперь полученное тождество принимает вид

$$v_t + \sum_{l=1}^{s} R^{(l)} \frac{\partial v}{\partial x_l} + (Q - \mu\varepsilon) v = \mu^2 g_1(x, t) \tag{2.4}$$

Элементы матричной функции $\varepsilon(x, t)$ представляют собой суммы произведений производных периодической функции $f(x, t)$ до порядка r включительно на многочлены от $y^{(1)}$ и y и являются поэтому непрерывными функциями в полупространстве (x, t).

Поскольку функция $\varepsilon(x, t)$ полагается известной, (2.4) можно рассматривать как линейную систему и использовать результаты Куранта [5] для оценки нормы решения симметрической гиперболической системы через норму начальной функции $v(x, 0)$ и норму правой части.

Рассмотрим коноид зависимости множества точек пространства $(t, x_1, \ldots, x_s)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ $(x_1, \ldots, x_s) \in X$. Обозначим через $R(h)$ его сечение плоскостью $t = h$. Имеем

$$\|v(h)\|^2 = \int_{R(h)} v^2(x, h)\, dx \leqslant C_1 \|v(0)\|^2 + C_2\mu^4 \int_0^h \|g_1(\tau)\|\, d\tau \tag{2.5}$$

В силу (2.2) $\|v(0)\|^2 < \mu^4 C_3$, поэтому из (2.5) имеем

$$\|v(h)\|^2 < \mu^4 C_4, \quad 0 \leqslant h \leqslant T$$

По теореме вложения С. Л. Соболева [6] отсюда следует

$$| u^{(1)} (x, t) - u (x, t) | < \mu^2 M, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \ x \in X$$

Теорема доказана.

Величина постоянной M зависит от меры множества X (пропорциональна ей), содержит множитель $e^{\alpha T}$, где α зависит от коэффициентов системы и характеризует ее устойчивость, и зависит от максимума функции $g^{(1)} (x, t)$.

Автор благодарит Г. М. Жислина за полезные замечания.

Поступила 31 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
2. *Рабинович М. И.* Об асимптотическом методе в теории нелинейных колебаний распределенных систем. Докл. АН СССР, 1970, т. 191, № 6.
3. *Рабинович М. И., Розенблюм А. А.* Об асимптотических методах решения нелинейных уравнений в частных производных. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
4. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике. Киев, «Наукова думка», 1971.
5. *Курант Р.* Уравнения с частными производными. М., «Мир», 1964.
6. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа к математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950.