Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 531.36

ОДИН МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

В. А. Кольчинский

(Москва)

При использовании прямого метода Ляпунова для исследования устойчивости нелинейных систем конкретного вида попытки построения функции Ляпунова, обладающей знакопостоянной или знакоопределенной производной, часто приводят к серьезным затруднениям.

В данной работе предлагается метод исследования устойчивости автономных систем с использованием вспомогательной функции $V(\mathbf{x})$, не связанный с условиями знакопостоянства или знакоопределенности функции $V(\mathbf{x})$ и ее производной по времени. Вместо этого требуется, чтобы функция $V(\mathbf{x})$ вдоль траекторий исследуемой системы удовлетворяла линейному дифференциальному уравнению второго порядка и некоторым граничным условиям.

Доказывается теорема существования функции $V(\mathbf{x})$ и дается эффективный способ построения ее как решения задачи Дирихле для вырожденного эллиптического оператора специального вида, что позволяет находить $V(\mathbf{x})$ численным методом с помощью ЭВМ.

Кроме исследования устойчивости, функция $V(\mathbf{x})$ может быть использована для определения области притяжения, нахождения инвариантных множеств автономных систем, в частности, предельных циклов систем второго порядка.

1. Рассмотрим систему уравнений возмущенного движения

$$\mathbf{x}^{\cdot} = f(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

определенную в некоторой ограниченной области $D \subset R^m$ и такую, что $f(\mathbf{x}) \in C^{(1)}(D)$.

Здесь и ниже под $C^{(k)}(D)$ будем понимать пространство функций, имеющих в D непрерывные частные производные до порядка k включительно, а под $C^{(k+\alpha)}(D)$ — пространство функций, имеющих в D частные производные порядка k, которые удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $0 < \alpha < 1$. Обозначим $\overline{\Omega} = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| \leqslant r\} \subset D$ и Σ — границу Ω. Под $\|\cdot\|$ будем понимать естественную норму в R^m.

Введем вспомогательную систему уравнений возмущенного движения

$$\mathbf{x}^{\cdot} = h(\mathbf{x}) \tag{1.2}$$

где

$$h(\mathbf{x}) = \varphi_1(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) + \varphi_2(\mathbf{x})\mathbf{x} \tag{1.3}$$

Здесь $\varphi_1(\mathbf{x})$ и $\varphi_2(\mathbf{x})$ — скалярные матрицы, причем диагональные элементы этих матриц определены следующим образом:

$$\varphi_1^{ii}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \|\mathbf{x}\| \leqslant r - \xi \\ \exp\left[-\left(\dfrac{\|\mathbf{x}\| - r + \xi}{\|\mathbf{x}\| - r + {}^1/_2\xi}\right)^6\right], & r - \xi < \|\mathbf{x}\| < r - \dfrac{1}{2}\xi \\ 0, & r - \dfrac{1}{2}\xi \leqslant \|\mathbf{x}\| \end{cases}$$

$$\varphi_2^{ii}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \|\mathbf{x}\| \leqslant r - \xi \\ \exp\left[-\left(\dfrac{\|\mathbf{x}\| - r}{\|\mathbf{x}\| - r + \xi}\right)^6\right], & r - \xi < \|\mathbf{x}\| < r \\ 1, & r \leqslant \|\mathbf{x}\| \end{cases}$$

где $i = 1, 2, \ldots, m$, ξ — достаточно малое положительное число.

Лемма 1.1. Если тривиальное решение системы (1.2) устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво, то тривиальное решение системы (1.1) соответственно устойчиво, асимптотически устойчиво или неустойчиво.

Доказательство. В силу выбора функций $\varphi_1(\mathbf{x})$ и $\varphi_2(\mathbf{x})$ в шаре радиуса $r - \xi$ будет $f(\mathbf{x}) \equiv h(\mathbf{x})$. Поэтому утверждение леммы непосредственно следует из совпадения траекторий систем (1.1) и (1.2) в шаре $\|\mathbf{x}\| < r - \xi$ и определений устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости по Ляпунову [1, 2].

Пусть в $\Omega \bigcup \Sigma$ существует функция $V(\mathbf{x}) \in C^{(2)}(\Omega)$, обладающая следующими свойствами (k и g постоянные): А) $V(0) = 0$, *Б*) $V^{\cdot\cdot}(\mathbf{x}) = kV(\mathbf{x})$ $(k > 0)$, *В*) $V(\mathbf{x}) = g$ $(g > 0,\ \mathbf{x} \in \Sigma)$; *Г*) $|V(\mathbf{x})| \leqslant g$, если $\mathbf{x} \in \Omega$.

Здесь и ниже под $V^{\cdot}(\mathbf{x})$ понимается первая полная производная функции $V(x)$ по времени в силу системы (1.2) в точке $\mathbf{x}$, а под $V^{\cdot\cdot}(\mathbf{x})$ — вторая полная производная.

Обозначим

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0), \quad V_0 = V(\mathbf{x}_0), \quad V_0^{\cdot} = V^{\cdot}(\mathbf{x}_0), \quad \lambda = +k^{-1/2}$$

$$P_{\pm}(\mathbf{x}) = {}^1/_2\,[V(\mathbf{x}) \pm \lambda V^{\cdot}(\mathbf{x})]$$

$$H_1 = \{\mathbf{x}: P_+(\mathbf{x}) > 0\}, \quad H_2 = \{\mathbf{x}: P_+(\mathbf{x}) = 0\} \bigcap \{\mathbf{x}: P_-(\mathbf{x}) \neq 0\}$$

$$H_3 = \{\mathbf{x}: P_+(\mathbf{x}) = 0\} \bigcap \{\mathbf{x}: P_-(\mathbf{x}) = 0\}, \quad H_4 = \{\mathbf{x}: P_+(\mathbf{x}) < 0\}$$

Лемма 1.2. 1) Если $\mathbf{x}_0 \in H_1$, то траектория $\mathbf{x}(t)$ с начальным условием $\mathbf{x}_0$ достигает границы области Ω за конечное время;

2) если $\mathbf{x}_0 \in H_2$, то $\mathbf{x}(t) \in \Omega$, при $t > t_0$ и $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) \in H_3$;

3) если $\mathbf{x}_0 \in H_3$, то $\mathbf{x}(t) \in H_3$ при $t > t_0$;

4) множество H_4 пусто.

(Под выражением $\lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) \in H_3$ понимается следующее: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T(\varepsilon) > t_0$, такое, что при всех $t > T(\varepsilon)$ $\rho(\mathbf{x}(t), H_3) < \varepsilon$.)

Доказательство. Решение уравнения $V^{\cdot\cdot}(\mathbf{x}) = kV(\mathbf{x})$ вдоль траектории $\mathbf{x}(t)$ имеет вид

$$V(t) = V(\mathbf{x}(t)) = P_-(\mathbf{x}_0)\exp\left(-\frac{t - t_0}{\lambda}\right) + P_+(\mathbf{x}_0)\exp\left(\frac{t - t_0}{\lambda}\right) \tag{1.4}$$

Пусть $x_0 \in H_1$. Тогда $P_+(x_0) > 0$ и $\lim_{t\to\infty} V(t) = +\infty$. Поэтому в силу свойства Г найдется $T > t_0$, такое, что $x(T) \in \Sigma$. Пусть $x_0 \in H_2$. Тогда $P_+(x_0) = 0$ и $P_-(x_0) = V_0$. Поэтому $V(t) = V_0 \exp[-(t - t_0)/\lambda]$ и, в силу свойств В и Г, $x(t) \in \Omega$ при $t > t_0$.

Очевидно, $\lim_{t\to\infty} V(t) = \lim_{t\to\infty} V^{\cdot}(t) = 0$ и отсюда имеем, $\lim_{t\to\infty} P_+(x(t)) = \lim_{t\to\infty} P_-(x(t)) = 0$. Поэтому в силу непрерывности функций $P_+(x)$ и $P_-(x)$ будет $\lim_{t\to\infty} x(t) \in H_3$. Пусть $x_0 \in H_3$. Тогда $P_+(x_0) = P_-(x_0) = 0$ и $V(t) = V^{\cdot}(t) = 0$ при $t \geqslant t_0$ в силу (1.4). Отсюда имеем, что при $t > t_0$ будет $P_+(x(t)) = P_-(x(t)) = 0$ и $x(t) \in H_3$ при $t > t_0$.

Пусть $x_0 \in H_4$. Нетрудно заметить, что если $P_-(x_0) < 0$, то функция $V(t)$ в некоторый момент времени t_1 достигает максимума, равного $-\sqrt{V_0^2 - \lambda^2 V_0^{\cdot 2}} \geqslant -g$ в силу свойства Г. В силу свойства В $x(t_1) \in \Omega$. Так как из формулы (1.4) следует, что $V(t)$ может иметь только одну точку экстремума, то на полуоси $[t_1, +\infty)$ функция $V(t)$ — монотонно убывающая. Если же $P_-(x_0) \geqslant 0$, то $V(t)$ монотонно убывает на полуоси $[t_0, +\infty)$. В обоих случаях в силу свойств В и Г $x(t) \in \Omega$ при $t > t_0$ и, следовательно, $|V(x(t))| \leqslant g$ при $t > t_0$. Но из формулы (1.4) в случае $x_0 \in H_4$ следует, что $\lim_{t\to\infty} V(t) = -\infty$. Полученное противоречие является следствием допущения, что множество H_4 не пусто.

Теорема 1.1. Если найдется $\delta > 0$, такое, что множество $\{x : 0 < \|x\| < \delta\} \subset H_2$, то тривиальное решение системы (1.2) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Из определения множества H_2, свойства A и очевидного равенства $h(0) = 0$ следует, что в шаре $\|x\| < \delta$ функции $V(x)$ и $V^{\cdot}(x)$ знакоопределенные, причем для $x \neq 0$ выполняется неравенство $V(x)V^{\cdot}(x) < 0$. Таким образом, функция $V(x)$ является в этом шаре функцией Ляпунова, удовлетворяющей условиям теоремы об асимптотической устойчивости в случае установившегося движения (см. [2], стр. 36).

Теорема 1.2. Если точка $x = 0$ — единственная предельная точка множества H_2, принадлежащая множеству H_3, то множество H_2 является областью притяжения тривиального решения системы (1.2).

Доказательство. Если выполняются условия теоремы, то расстояние $\rho(H_2, H_3 \setminus 0) > 0$. Поэтому в силу леммы 1.2 любая траектория $x(t)$, начинающаяся в множестве H_2, может стремиться только к началу координат и $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

Рассмотрим две последовательности положительных чисел $\{r_i\}$ и $\{\delta_j\}$, стремящиеся к нулю. Обозначим $\Omega_i = \{x : \|x\| < r_i\}$. Пусть в каждой области Ω_i существует функция $V_i(x) \in C^{(2)}(\Omega_i)$ и обладающая в ней свойствами А — Г. В области Ω_i выделим множества H_1^i, H_2^i, H_3^i.

Теорема 1.3. Если для некоторого r_i найдется $\delta_j < r_i$, такое, что множество $\{x : \|x\| < \delta_j\} \subset H_2^i \bigcup H_3^i$, то в области Ω_i существуют ограниченные решения системы (1.2), отличные от тривиального.

Доказательство. В силу свойства В и определения множества H_3^i расстояние $\rho(H_3^i, \Sigma_i) > 0$. Поэтому любая траектория, выходящая из шара $\|x\| < \delta_j$, как это следует из леммы 1.2, останется в шаре $\|x\| < r_i$ при всех $t > t_0$.

Из теоремы 1.3 вытекает следующее очевидное утверждение.

Теорема 1.4. Если условия теоремы 1.3 выполняются при любом r_i, начиная с некоторого его значения, то тривиальное решение системы (1.2) устойчиво.

Теорема 1.5. Если для некоторого r_i начало координат — предельная точка множества $H_1{}^i$, то тривиальное решение системы (1.2) неустойчиво.

Доказательство. В силу леммы 1.2 и определения предельной точки в любой сколь угодно малой окрестности начала координат найдется точка, через которую проходит траектория $\mathrm{x}(t)$, достигающая за конечное время сферы радиуса r_i, а это есть неустойчивость по Ляпунову.

Теорема 1.5 является частным случаем теоремы В. М. Матросова (см. [3], теорема 3.2).

Множество H_3, как это следует из леммы 1.2, является инвариантным множеством (см. [4], стр. 349) системы (1.2).

С помощью функции $V(\mathrm{x})$ можно построить топологическую картину расположения множества H_3 в Ω, что позволяет иногда получить некоторую информацию о поведении траекторий системы (1.2). Так, например, если при $m = 2$ в области Ω имеется связная компонента K множества H_3, топологически эквивалентная окружности и состоящая из обыкновенных точек системы (1.2), то K может оказаться предельным циклом.

На возможность использования функции $V(\mathrm{x})$ для качественного исследования систем дифференциальных уравнений впервые указал В. В. Немыцкий [5].

2. Докажем существование функции $V(\mathrm{x}) \in C^{(2)}(\Omega)$ и обладающей свойствами А — Г. Следуя [6, 7], обозначим

$$a^{ij}(\mathrm{x}) = h_i(\mathrm{x})h_j(\mathrm{x}), \quad b^i(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial h_i(\mathrm{x})}{\partial x_j} h_j(\mathrm{x})$$

$$c = -k, \quad V_{x_i} = \partial V(\mathrm{x}) / \partial x_i, \quad V_{x_ix_j} = \partial^2 V(\mathrm{x}) / \partial x_i \partial x_j$$

и всюду будем подразумевать суммирование по повторяющимся индексам i и j от 1 до m. Тогда свойство Б можно записать так:

$$L(V) \equiv a^{ij}V_{x_ix_j} + b^iV_{x_i} + cV = 0 \tag{2.1}$$

где L — линейный дифференциальный оператор второго порядка. Все главные миноры матрицы

$$\|a^{ij}(\mathrm{x})\|_1^m = \begin{Vmatrix} h_1^2(\mathrm{x}) & h_1(\mathrm{x})h_2(\mathrm{x}) & \ldots & h_1(\mathrm{x})h_m(\mathrm{x}) \\ h_2(\mathrm{x})h_1(\mathrm{x}) & h_2^2(\mathrm{x}) & \ldots & h_2(\mathrm{x})h_m(\mathrm{x}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ h_m(\mathrm{x})h_1(\mathrm{x}) & h_m(\mathrm{x})h_2(\mathrm{x}) & \ldots & h_m^2(\mathrm{x}) \end{Vmatrix}$$

неотрицательны в Ω, поэтому квадратичная форма $a^{ij}z_iz_j$ неотрицательна в Ω [8] и оператор L является вырожденным эллиптическим оператором в Ω [6, 7].

Присоединяя к (2.1) свойство B, получим первую краевую задачу для оператора L

$$L(V) = 0, \quad \mathrm{x} \in \Omega; \quad V(\mathrm{x}) = g, \quad \mathrm{x} \in \Sigma \tag{2.2}$$

Для доказательства существования решения $V(\mathbf{x})$ краевой задачи (2.2) и исследования его свойств введем дополнительно следующие обозначения, принятые в работах [6, 7] ($n(\mathbf{x})$ — вектор внутренней нормали к Σ):

$$n(\mathbf{x}) = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$$
$$\Sigma^\circ = \{\mathbf{x}\colon\ a^{ij}n_i n_j = 0\}, \quad b(\mathbf{x}) = (b^i - a_{x_j}^{ij})n_i \quad (\mathbf{x} \in \Sigma^\circ)$$
$$\Sigma_0 = \{\mathbf{x}\colon b(\mathbf{x}) = 0\}, \quad \Sigma_1 = \{\mathbf{x}\colon\ b(\mathbf{x}) > 0\}$$
$$\Sigma_2 = \{\mathbf{x}\colon b(\mathbf{x}) < 0\}, \quad \Sigma_3 = \Sigma \setminus \Sigma^\circ$$
$$G = \overline{(\Sigma_0 \cup \Sigma_2)} \setminus (\Sigma_0 \cup \Sigma_2)$$
$$E = \{\mathbf{x}\colon\ \det \| a^{ij}(\mathbf{x}) |_1^m = 0\} \cap (\Omega \cup \Sigma)$$
$$\eta^p \equiv c - \frac{1}{p} b^i_{x_i} + \frac{1}{p} a^{ij}_{x_i x_j}, \quad p > 1$$
$$B_{\overline{S}_l} \equiv c + \beta(m; l; b^i_{x_i};\ a^{ij}_{x_i x_j})$$
$$\overline{S}_l = (s_1, s_2, \ldots, s_l), \quad s_i = 1, 2, \ldots, m, \quad l \geqslant 1$$

Развернутое выражение для $B_{\overline{S}_l}$ дано в [6, 7]. Обозначим через $C_k(\Omega)$ пространство функций, имеющих в Ω ограниченные обобщенные производные до порядка k включительно и через $W_p^{(l)}$ пространство С. Л. Соболева [9].

Пусть (L^* — оператор, сопряженный с L)

$$L^*(V) = a^{ij}V_{x_i x_j} + b^{*i}V_{x_i} + c^*V$$
$$b^{*i} = 2a^{ij}_{x_i} - b^i, \quad c^* = a^{ij}_{x_i x_j} - b^i_{x_i} + c$$

Очевидно, в рассматриваемом случае

$$\Sigma_3 = \Sigma, \quad \Sigma_0 = \Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma^\circ = G = \phi, \quad E = \Omega \cup \Sigma$$

Определение. Ограниченную, измеримую в Ω функцию $V(\mathbf{x})$, будем называть обобщенным решением краевой задачи

$$L(V) = \Phi(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Omega; \quad V(\mathbf{x}) = \gamma(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Sigma_2 \cup \Sigma_3$$

если для любой функции $\Theta \in C^{(2)}(\Omega \cup \Sigma)$ и равной нулю на $\Sigma_1 \cup \Sigma_3$ выполняется интегральное тождество

$$\int_\Omega VL^*(\Theta)\,d\mathbf{x} = \int_\Omega \Theta\Phi\,d\mathbf{x} - \int_{\Sigma_3} \gamma \frac{\partial\Theta}{\partial\nu}\,d\sigma + \int_{\Sigma_2} b\gamma\Theta\,d\sigma \tag{2.3}$$

$$\partial / \partial\nu \equiv a^{ij}\cos(n, x_i)\,\partial / \partial x_i$$

где Φ и γ — ограниченные, измеримые функции, $d\sigma$ — элемент площади Σ [6, 7].

В рассматриваемом случае формула (2.3) принимает вид

$$\int_\Omega VL^*(\Theta)\,d\mathbf{x} = -g\int_\Sigma \frac{d\Theta}{\partial\nu}\,d\sigma \tag{2.4}$$

Теорема 2.1. Если в D выполнены следующие условия: 1) $f(\mathbf{x}) \in C^{(4+\alpha)}(D)$, 2) постоянная c достаточно велика по абсолютному значению, так что в Ω имеют место неравенства: $\eta^2 < 0$, $c^* < 0$ и $B_{\overline{S}_3} < 0$, то существует функция $V(\mathbf{x}) \in C^{(2)}(\Omega)$ и обладающая свойствами А — Г.

Доказательство. Выше было отмечено, что $c < 0$ и G имеет меру нуль на Σ. Кроме того, из постановки краевой задачи (2.2) следует, что $g = \mathrm{const}$ на Σ_3. Поэтому в силу теоремы, доказанной в [6] (теорема 1), в Ω существует обобщенное решение $V(\mathbf{x})$ краевой задачи (2.2), удовлетворяющее принципу максимума $|V(\mathbf{x})| \leqslant g$. Свойство Г доказано.

Докажем единственность решения $V(\mathbf{x})$. Пусть $V_1(\mathbf{x})$ — некоторое решение задачи (2.2), отличное от $V(\mathbf{x})$. Обозначим $\psi(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) - V_1(\mathbf{x})$. Рассмотрим краевую задачу

$$L(\psi) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \quad \psi(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma \tag{2.5}$$

Как следует из [6] (теорема 2), в Ω существует обобщенное решение $\psi(\mathbf{x})$ за ачи (2.5), принадлежащее $L_2(\Omega)$. Из формулы (2.4) имеем

$$\int_\Omega \psi L^*(\Theta)\, d\mathbf{x} = 0 \tag{2.6}$$

Так как $c^* < 0$ и выполнено условие (2.6), то краевая задача (2.5) удовлетворяет условиям теоремы, доказанной в [6] (теорема 3), в силу которой $\psi(\mathbf{x}) = 0$ почти всюду в Ω [1]. Отсюда следует единственность решения $V(\mathbf{x})$.

Осталось доказать гладкость функции $V(\mathbf{x})$. Для этого введем вспомогательную функцию $U(\mathbf{x}) = V(\mathbf{x}) - g$ и рассмотрим краевую задачу

$$L(U) = cg, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \; U(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Sigma \tag{2.7}$$

Продолжим коэффициент c оператора L как константу с Ω на D. Из условия 1 теоремы 2.1 и формулы (1.3) следует, что $h(\mathbf{x}) \in C^{(4)}(D)$. Поэтому $a^{ij}(\mathbf{x}), b^i(\mathbf{x}) \in C^{(3)}(D)$ и, в силу свойств обобщенных производных, $a^{ij}(\mathbf{x}), b^i(\mathbf{x}) \in C_3(D)$ [9]. Кроме того, $B_{\bar{S}_3} < 0$. Тогда обобщенное решение $U(\mathbf{x})$ задачи (2.7), а следовательно и $V(\mathbf{x})$, принадлежат $C_3(\Omega)$ (см. [6], теорема 9). В силу свойств интеграла Лебега из утверждения $V(\mathbf{x}) \in C_3(\Omega)$ следует, что $V(\mathbf{x}) \in W_{m+1}^{(3)}(\Omega)$. Применяя к $V(\mathbf{x})$ теорему вложения С. Л. Соболева [9], получим, что $V(\mathbf{x}) \in C^{(2)}(\Omega)$. Гладкость функции $V(\mathbf{x})$ доказана.

Используя формулу Грина для оператора L [7]

$$\int_\Omega (L(V)\Theta - L^*(\Theta)V)\, d\mathbf{x} = -\int_{\Sigma_3} \left(\Theta \frac{\partial V}{\partial \nu} - V \frac{\partial \Theta}{\partial \nu}\right) d\sigma - \int_\Sigma bV\Theta d\sigma$$

подставляя в нее формулу (2.4) и равенства $\Theta = 0$, $V = g$ на $\Sigma = \Sigma_3$, получим

$$\int_\Omega L(V)\Theta dx = 0 \tag{2.8}$$

[1] В используемой теореме дополнительно требуется, чтобы граничные точки для Σ_3 являлись предельными для внутренних точек Σ^0, и накладываются некоторые условия на структуру множества G. Можно показать, что в случае $\Sigma_3 = \Sigma$ эти требования излишни.

Так как Θ — произвольная гладкая функция, не равная тождественно нулю в Ω, а оператор $L(V)$ непрерывен в Ω как функция $\mathbf{x}$, то из (2.8) по основной лемме вариационного исчисления следует, что $L(V) = 0$ в Ω.

Свойство Б доказано. Свойство В доказывать не надо, так как его выполняемость была обусловлена заранее при постановке краевой задачи (2.2). Свойство А очевидно, так как $h(0) = 0$ и из формулы (2.1) следует $V(0) = 0$. Теорема доказана.

3. Таким образом, при исследовании конкретной системы уравнений возмущенного движения $\mathbf{x}^{\cdot} = f(\mathbf{x})$ необходимо в соответствии с формулой (1.3) построить вспомогательную систему уравнений $\mathbf{x}^{\cdot} = h(\mathbf{x})$. Для вспомогательной системы ставится краевая задача (2.2), причем число $g > 0$ выбирается произвольно, а r должно быть таким, чтобы Ω содержала представляющую интерес область фазового пространства исследуемой системы. Решение краевой задачи может быть найдено численными методами с помощью ЭВМ [10]. Зная функцию $V(\mathbf{x})$ и построив в области Ω функции $P_+(\mathbf{x})$ и $P_-(\mathbf{x})$, можно определить топологическую картину расположения множеств H_1, H_2, H_3 в Ω и, в соответствии с теоремами 1.1, 1.4, 1.5 классифицировать устойчивость тривиального решения системы (1.2). Лемма 1.1 позволяет перенести эту классификацию на систему (1.1).

Автор благодарен В. В. Румянцеву за внимание к работе.

Поступила 12 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.
2. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
3. *Матросов, В. М.* К теории устойчивости движения. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
4. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
5. *Немыцкий В. В.* О проблеме качественного исследования в целом методами функции Ляпунова. Вестн. МГУ. Сер. матем., механ., 1962, вып. 6.
6. *Олейник О. А.* О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Матем. сб., 1966, т. 69, вып. 1.
7. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. В сб.: Математический анализ, Итоги науки, ВИНИТИ АН СССР, 1971.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М., «Наука», 1967.
9. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950.
10. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.