Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 531.36

УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ГЛАВНОЙ ОСИ

А. М. Ковалев, А. Я. Савченко

(Донецк)

Доказывается теорема об устойчивости стационарных движений механических систем определенного вида. При помощи этой теоремы исследуется устойчивость равномерных вращений твердого тела с неподвижной точкой вокруг главной оси, несущей центр масс. Вводится расширенное параметрическое пространство, в котором выделена область G допустимых значений параметров. Доказывается, что равномерные вращения устойчивы в подобласти $G_1 \subset G$, где выполнены необходимые условия устойчивости, за исключением некоторого многообразия размерности, на единицу меньшей размерности расширенного параметрического пространства. В случае равенства двух моментов инерции дается геометрическое изображение областей G, G_1.

Устойчивость указанных движений изучалась В. В. Румянцевым [1], который методом Четаева построения функции Ляпунова в виде связки интегралов уравнений возмущенного движения нашел достаточные условия устойчивости. Как следует из работ [2–4], достаточные условия, установленные таким путем, при произвольных значениях параметров, характеризующих твердое тело, являются необходимыми в интегрируемых случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. В неинтегрируемых случаях они не несут такой полной информации о характере движений. Оказывается, что достаточные условия устойчивости, найденные в работе [1], являются необходимыми только для вращений вокруг большей и средней главной оси, когда центр масс находится ниже точки опоры, а в остальных случаях эти условия совпадают лишь частично, либо достаточные условия вовсе отсутствуют. Это есть следствие того, что в окрестности стационарных движений гамильтониан приведенной системы может не быть знакоопределенной функцией. Применение теоремы В. И. Арнольда (см. [5]) для изучения подобной ситуации в механических системах с циклическими координатами, приведенная система которых двумерна, позволяет доказать теорему об устойчивости стационарных движений таких систем. Используя эту теорему, удается значительно расширить область устойчивости равномерных вращений.

1. Устойчивость стационарных движений. Рассмотрим стационарные движения механической системы с $m+2$ степенями свободы и m циклическими координатами. Если в качестве фазовых координат выбрать канонические переменные, то под устойчивостью стационарного движения будем понимать, как обычно, устойчивость этого движения по Ляпунову относительно всех импульсов и нециклических координат q_1, q_2. Всегда можно считать, что изучаемое стационарное движение соответствует точке P с координатами

$$q_1 = 0,\ q_2 = 0,\ p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ p_{2+n} = c_n^\circ\ \ (n = 1, \ldots, m) \tag{1.1}$$

Теорема 1. Пусть гамильтониан H — аналитическая функция координат и импульсов в точке P, а гамильтониан H° приведенной системы в этой точке удовлетворяет условиям:

A. Собственные числа линейной приведенной системы чисто мнимые: $\pm i\alpha_1^\circ$, $\pm i\alpha_2^\circ$.

B. Для всех целых чисел k_1, k_2, удовлетворяющих условию $|k_1| + |k_2| \leqslant 4$, выполнено $k_1\alpha_1^\circ + k_2\alpha_2^\circ \neq 0$.

C. $D^\circ = -(\beta_{11}^\circ\alpha_2^{\circ 2} - 2\beta_{12}^\circ\alpha_1^\circ\alpha_2^\circ + \beta_{22}^\circ\alpha_1^{\circ 2}) \neq 0$, где $\beta_{\nu\mu}^\circ$ — коэффициенты формы четвертого порядка гамильтониана H°, преобразованного к виду (O_5 — степенной ряд, содержащий члены порядка не меньше пяти)

$$H^\circ = \sum_{\nu=1}^{2} \frac{\alpha_\nu^\circ}{2} R_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^{2} \frac{\beta_{\nu\mu}^\circ}{4} R_\nu R_\mu + O_5, \qquad R_\nu = \xi_\nu^2 + \eta_\nu^2$$

Тогда стационарное движение (1.1) устойчиво по Ляпунову.

Доказательство. Доказательство теоремы существенно зависит от знака произведения $\alpha_1^\circ\alpha_2^\circ$. В случае $\alpha_1^\circ\alpha_2^\circ > 0$ устойчивость по Ляпунову стационарного движения при фиксированном $\mathbf{c}^\circ$ $(c_1^\circ, \ldots, c_m^\circ)$ следует из определенной положительности H_2, что позволяет применить теорему Рауса с дополнением Ляпунова [6] и утверждать, что оно устойчиво и при нефиксированном $\mathbf{c}^\circ$.

Для $\alpha_1^\circ\alpha_2^\circ < 0$ доказательство теоремы проведем, взяв за основу доказательство Мозера [5] теоремы В. И. Арнольда с дополнением, приведенным в работе [7]. Отметим, прежде всего, что в силу аналитичности H в точке P и условии $\alpha_1^\circ\alpha_2^\circ \neq 0$ частоты α_1, α_2 — аналитические функции циклических постоянных $\mathbf{c}$ в точке $\mathbf{c}^\circ$

$$\alpha_i = \alpha_i^\circ + \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial\alpha_i}{\partial c_r}(c_r - c_r^\circ) + \frac{1}{2}\sum_{r,p=1}^{m} \frac{\partial^2\alpha_i}{\partial c_r \partial c_p}(c_r - c_r^\circ)(c_p - c_p^\circ) + \cdots, \qquad i = 1, 2 \tag{1.2}$$

(здесь и в дальнейшем частные производные в соответствующих разложениях вычисляются в точке $\mathbf{c}^\circ$). Поэтому условия A, B теоремы выполняются на множестве

$$|\mathbf{c} - \mathbf{c}^\circ| \leqslant \varepsilon \tag{1.3}$$

где $|\mathbf{x}|$ — евклидова норма вектора $\mathbf{x}$, ε — достаточно малое число. Следовательно, для всех $\mathbf{c}$ из множества (1.3) существует преобразование Биркгофа [8], приводящее гамильтониан H к виду

$$H = \sum_{\nu=1}^{2} \frac{\alpha_\nu}{2} R_\nu + \sum_{\nu,\mu=1}^{2} \frac{\beta_{\nu\mu}}{4} R_\nu R_\mu + O_5 \tag{1.4}$$

Поскольку функции, задающие это преобразование, аналитически зависят от коэффициентов исходного гамильтониана, то $\beta_{\nu\mu}$ — аналитические функции $\mathbf{c}$ в точке $\mathbf{c}^\circ$

$$\beta_{\nu\mu} = \beta_{\nu\mu}^\circ = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial\beta_{\nu\mu}}{\partial c_r}(c_r - c_r^\circ) + \cdots, \qquad \nu, \mu = 1, 2 \tag{1.5}$$

а из невырожденности этого преобразования следует, что устойчивость решения (1.1) эквивалентна устойчивости решения

(1.6) $\xi_1 = 0,\ \xi_2 = 0,\ \eta_1 = 0,\ \eta_2 = 0,\ p_{j+2} = c_j^\circ,\ j = 1, 2, \ldots, m$

системы

$$\frac{d\xi_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \eta_i}, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \xi_i}, \quad \frac{dp_{j+2}}{dt} = 0, \quad i = 1, 2, \ j = 1, 2, \ldots, m$$

где H определяется из (1.4).

Полагаем в возмущенном движении

(1.7) $\xi_i = \varepsilon x_i, \quad \eta_i = \varepsilon y_i, \quad p_{2+j} = c_j^\circ + \varepsilon c_j'$

(1.8) $\mathbf{c}'^2 \leqslant 1$

Уравнения возмущенного движения принимают вид

(1.9) $$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial y_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \quad \frac{dc_j'}{dt} = 0$$

и допускают интегралы

(1.10) $c_j' = \text{const}, \quad j = 1, 2, \ldots, m$

(1.11) $$F = \sum_{\nu=1}^{2} \frac{\alpha_\nu'}{2} R_\nu' + \varepsilon^2 \sum_{\nu,\mu=1}^{2} \frac{\beta_{\nu\mu}'}{4} R_\nu' R_\mu' + O(\varepsilon^3) = c$$

$$\alpha_\nu' = \alpha_\nu^\circ + \varepsilon \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial c_r} c_r + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{r,p=1}^{m} \frac{\partial^2 \alpha_\nu}{\partial c_r \partial c_p} c_r c_p + \cdots$$

$$\beta_{\nu\mu}' = \beta_{\nu\mu}^\circ + \varepsilon \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial \beta_{\nu\mu}}{\partial c_r} c_r + \cdots, \quad R_\nu' = x_\nu^2 + y_\nu^2$$

(выражения для α_ν', $\beta_{\nu\mu}'$ получаются из (1.2), (1.5)).

Для удобства записи штрихи в дальнейшем опустим.

Заметим, что

(1.12) $O(\varepsilon^3) < A\varepsilon^3$

для $0 < \varepsilon < A^{-1}$, A — некоторая постоянная, не зависящая от $\mathbf{c}$ из (1.8), что следует из аналитичности функции H в точке P.

Изучим поведение траекторий возмущенного движения на интегральных многообразиях, определяемых набором $m + 1$ постоянных C, с.

Покажем, что на этих многообразиях для всех C, c, удовлетворяющих неравенствам

(1.13) $|C| < |\alpha_1|/2, \quad c^2 \leqslant 1$

решения $x(t)$, $y(t)$ системы (1.9) равномерно ограничены относительно C, c из области (1.13).

Введем новые переменные R_i, ϑ_i

$$x_i = \sqrt{R_i} \sin \vartheta_i, \quad y_i = \sqrt{R_i} \cos \vartheta_i$$

Перепишем дифференциальные уравнения для новых переменных

(1.14) $$\frac{dR_\nu}{dt} = 2\frac{\partial F}{\partial \vartheta_\nu} = O(\varepsilon^3)$$

$$\frac{d\vartheta_\nu}{dt} = -2\frac{\partial F}{\partial R_\nu} = -2\left(\alpha_\nu + \varepsilon^2 \sum_{\mu=1}^{2} \beta_{\nu\mu} R_\mu\right) + O(\varepsilon^3)$$

Принимая $R_1 = R$, $\vartheta_1 = \vartheta$, ϑ_2 за независимые переменные, выразим через них R_2 при помощи (1.11). Получим

$$R_2 = \Phi(R, \vartheta, \vartheta_2, C, c) = -\frac{\alpha_1^\circ}{\alpha_2^\circ}\left(R - \frac{2C}{\alpha_1^\circ}\right) + \tag{1.15}$$
$$+ (A_1 + B_1 R)\varepsilon + \left(A_2 + B_2 R + \frac{D^\circ R^2}{2\alpha_2^{\circ 3}}\right)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — ограниченные в (1.13) функции C, c. В области (1.13) справедливо неравенство $A_1^2 + A_2^2 + B_1^2 + B_2^2 < M^2$, M — некоторая постоянная, а остаточный член $O(\varepsilon^3)$ удовлетворяет оценке (1.12), где A не зависит уже от c и C из (1.13). И в дальнейшем в силу свойств совершаемых преобразований остаточные члены $O(\varepsilon^3)$ будут удовлетворять в области (1.13) этой же оценке.

Для любых C из (1.13) при достаточно малых ε выражение (1.15) положительно, если $1 \leqslant R \leqslant 2$. Переходя в (1.14) от t к переменной ϑ_2, из (1.14), (1.15) находим

$$\frac{dR}{d\vartheta_2} = \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = O(\varepsilon^3) \tag{1.16}$$
$$\frac{d\vartheta}{d\vartheta_2} = -\frac{\partial\Phi}{\partial R} = \frac{\alpha_1^\circ}{\alpha_2^\circ} - B_1\varepsilon - B_2\varepsilon^2 - \frac{D^\circ R}{\alpha_2^{\circ 3}}\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3)$$

Проинтегрируем систему (1.18) с точностью до членов $O(\varepsilon^3)$

$$R(2\pi) = R(0) + O(\varepsilon^3) \tag{1.17}$$
$$\vartheta(2\pi) = \vartheta(0) + 2\pi\frac{\alpha_1^\circ}{\alpha_2^\circ} - 2\pi(B_1 + \varepsilon B_2)\varepsilon - \frac{2\pi\varepsilon^2}{\alpha_2^{\circ 3}}D^\circ R + O(\varepsilon^3)$$

Отображение (1.17) при $D^\circ \neq 0$ удовлетворяет условиям теоремы Мозера [5], и следовательно, в кольце $1 \leqslant R \leqslant 2$ существует инвариантная кривая Г на каждом интегральном многообразии, определяемом значениями C, c из (1.13). Остаточные члены в формулах (1.17) равномерно ограничены относительно C, c из (1.13), поэтому можно указать не зависящее от C, c значение $\varepsilon_0 > 0$, такое, что для всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ и C, c из (1.13) существует инвариантная кривая Г, лежащая в кольце $\varepsilon^2 \leqslant \eta_1^2 + \xi_1^2 \leqslant 2\varepsilon^2$. Это позволяет заключить, что если $\xi_1^2(0) + \eta_1^2(0) < \varepsilon^2$, то для любых C, c из (1.13)

$$\xi_1^2(t) + \eta_1^2(t) \leqslant 2\varepsilon^2 \qquad (t \geqslant 0) \tag{1.18}$$

Неравенство (1.18) вместе с равенством (1.15) дает оценку

$$\xi_2^2(t) + \eta_2^2(t) < 3\left|\frac{\alpha_1^\circ}{\alpha_2^\circ}\right|\varepsilon^2 \qquad (t \geqslant 0) \tag{1.19}$$

Неравенства (1.18), (1.19) и последние из соотношений (1.7) доказывают устойчивость решения (1.6), а следовательно, и (1.1). Доказательство теоремы закончено.

Замечания. 1°. Как следует из доказательства, требование аналитичности гамильтониана H в точке P, позволившее дать равномерную оценку сверху остаточным членам относительно C, c, можно заменить существованием в точке P непрерывных частных производных пятого порядка по всем аргументам.

2°. Если считать r компонент вектора с конструктивными параметрами механической системы, а остальные — по-прежнему циклическими постоянными, то теорема 1 дает достаточные условия устойчивости стационарных движений механической системы с $m-r$ циклическими координатами при параметрических [9] возмущениях r конструктивных параметров.

2. Равномерные вращения тела вокруг главной оси. Оси, вокруг которых возможно равномерное вращение, образуют в теле конус Штауде [10]. Откладывая вдоль каждой образующей величину угловой скорости, с которой происходит вокруг этой образующей равномерное вращение, получаем направляющую линию. Если центр масс тела находится на главной оси, то одна из ветвей направляющей линии совпадает с ней, следовательно, тело может вращаться вокруг этой оси с любой угловой скоростью. Изучим устойчивость таких движений относительно проекций угловой скорости ω_1, ω_2, ω_3 и вектора вертикали ν_1, ν_2, ν_3 на подвижные оси.

Движение тела будем описывать уравнениями Гамильтона. Направляя оси связанной с телом системы координат по главным осям эллипсоида инерции и вводя обычным образом углы Эйлера, получаем выражение для гамильтониана в предположении, что центр масс лежит на первой главной оси

$$H = \frac{1}{2\sin^2\vartheta}\{a_1[(p_\psi - p_\varphi\cos\vartheta)\sin\varphi + p_\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta]^2 + \tag{2.1}$$

$$+ a_2[(p_\psi - p_\varphi\cos\vartheta)\cos\varphi - p_\vartheta\sin\varphi\sin\vartheta]^2\} + \frac{a_3 p_\varphi^2}{2} + \Gamma\sin\varphi\sin\vartheta$$

Здесь a_1, a_2, a_3 — компоненты гирационного тензора, Γ — произведение веса тела и проекции центра масс на первую ось.

Равномерное вращение вокруг первой главной оси с угловой скоростью ω определяется следующими значениями переменных:

$$p_\vartheta = 0, \quad p_\varphi = 0, \quad p_\psi = \frac{\omega}{a_1}; \quad \vartheta = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \psi = \omega t + \psi_0 \tag{2.2}$$

Случаю $\Gamma > 0$ соответствует положение центра масс над точкой опоры, случаю $\Gamma < 0$ соответствует положение центра масс под точкой опоры.

Как видно из (2.1), твердое тело с неподвижной точкой представляет собой механическую систему с тремя степенями свободы с одной циклической координатой. Стационарные движения этой системы — равномерные вращения тела вокруг вертикали. Исследование на устойчивость равномерных вращений относительно ω_1, ω_2, ω_3, ν_1, ν_2, ν_3 эквивалентно исследованию на устойчивость стационарных движений относительно p_ϑ, p_φ, p_ψ, ϑ, φ, и следовательно, к данной задаче применима теорема 1. Изучаемые стационарные движения определяются равенствами (2.2), и дальнейший анализ сводится к рассмотрению гамильтониана приведенной системы в окрестности этих движений.

3. Разложение гамильтониана в окрестности равномерного вращения. Полагая

$$p_\vartheta = x_1', \quad p_\varphi = x_2', \quad \vartheta = \frac{\pi}{2} + y_1', \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + y_2'$$

найдем разложение функции Гамильтона приведенной системы в окрестности положения равновесия с точностью до членов четвертого порядка относительно $x_1', \ldots, y_2'$

$$H = H_2 + H_4 + \ldots$$
$$2H_2 = a_2 x_1'^2 + a_3 x_2'^2 + (a_1 p_\psi^2 - \Gamma) y_1'^2 + [(a_2 - a_1) p_\psi^2 - \Gamma] y_2'^2 + 2(a_2 - a_1) p_\psi x_1' y_2' + 2a_1 p_\psi x_2' y_1'$$
$$2H_4 = (a_1 - a_2) x_1'^2 y_2'^2 + a_1 x_2'^2 y_1'^2 + \frac{8a_1 p_\psi^2 + \Gamma}{12} y_1'^4 + \frac{4p_\psi^2 (a_1 - a_2)\Gamma}{12} y_2'^4 + \frac{2(a_2 - a_1) p_\psi^2 + \Gamma}{2} y_1'^2 y_2'^2 + \frac{4p_\psi (a_1 - a_2)}{3} x_1' y_2'^3 + (a_2 - a_1) p_\psi x_1' y_1'^2 y_2' + \frac{5}{3} a_1 p_\psi x_2' y_1'^3 + 2p_\psi (a_2 - a_1) x_2' y_1' y_2'^2 + 2(a_2 - a_1) x_1' x_2' y_1' y_2'$$

Перейдем к безразмерным переменным x_1, x_2, y_1, y_2 и безразмерному времени τ

$$(x_1', x_2') = \sqrt{|\Gamma| / a_1}\,(x_1, x_2), \quad (y_1', y_2') = (y_1, y_2), \quad \tau = t\sqrt{a_1 |\Gamma|}$$

Уравнения движения в безразмерном виде принимают вид (точка означает дифференцирование по τ)

$$x_1^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial y_1}, \quad x_2^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial y_2}, \quad y_1^{\cdot} = \frac{\partial H}{\partial x_1}, \quad y_2^{\cdot} = \frac{\partial H}{\partial x_2} \tag{3.1}$$

$$H = H_2 + H_4 + \cdots \tag{3.2}$$
$$2H_2 = a x_1^2 + b x_2^2 + (\omega^2 - e) y_1^2 + [(a-1)\omega^2 - e] y_2^2 + 2(a-1)\omega x_1 y_2 + 2\omega x_2 y_1$$
$$2H_4 = (1 - a) x_1^2 y_2^2 + x_2^2 y_1^2 + \frac{8\omega^2 + e}{12} y_1^4 + \frac{4\omega^2(1-a) + e}{12} y_2^4 + \frac{2(a-1)\omega^2 + e}{2} y_1^2 y_2^2 + \frac{4\omega(1-a)}{3} x_1 y_2^3 + (a-1)\omega x_1 y_1^2 y_2 + \frac{5}{3}\omega x_2 y_1^3 + 2\omega(a-1) x_2 y_1 y_2^2 + 2(a-1) x_1 x_2 y_1 y_2$$
$$a = \frac{a_2}{a_1}, \quad b = \frac{a_3}{a_1}, \quad \omega = p_\psi \sqrt{\frac{a_1}{|\Gamma|}}, \quad e = \begin{cases} 1, & \Gamma > 0 \\ -1, & \Gamma < 0 \end{cases}$$

Неравенства треугольника для моментов инерции определяют область C изменения параметров a, b. Область C—это область положительных значений a, b, ограниченная кривыми $a = b(a+1)$, $b = a(b+1)$, $a = b(a-1)$. Вид области C указан на фиг. 1.

4. Необходимые условия устойчивости. Характеристическое уравнение линеаризованной системы с функцией H_2 имеет вид

$$\lambda^4 + Q_1 \lambda^2 + Q_2 = 0 \tag{4.1}$$
$$Q_1 = (2 + ab - a - b)\omega^2 - e(a + b), \quad Q_2 = [(a-1)\omega^2 - ea][(b-1)\omega^2 - eb]$$

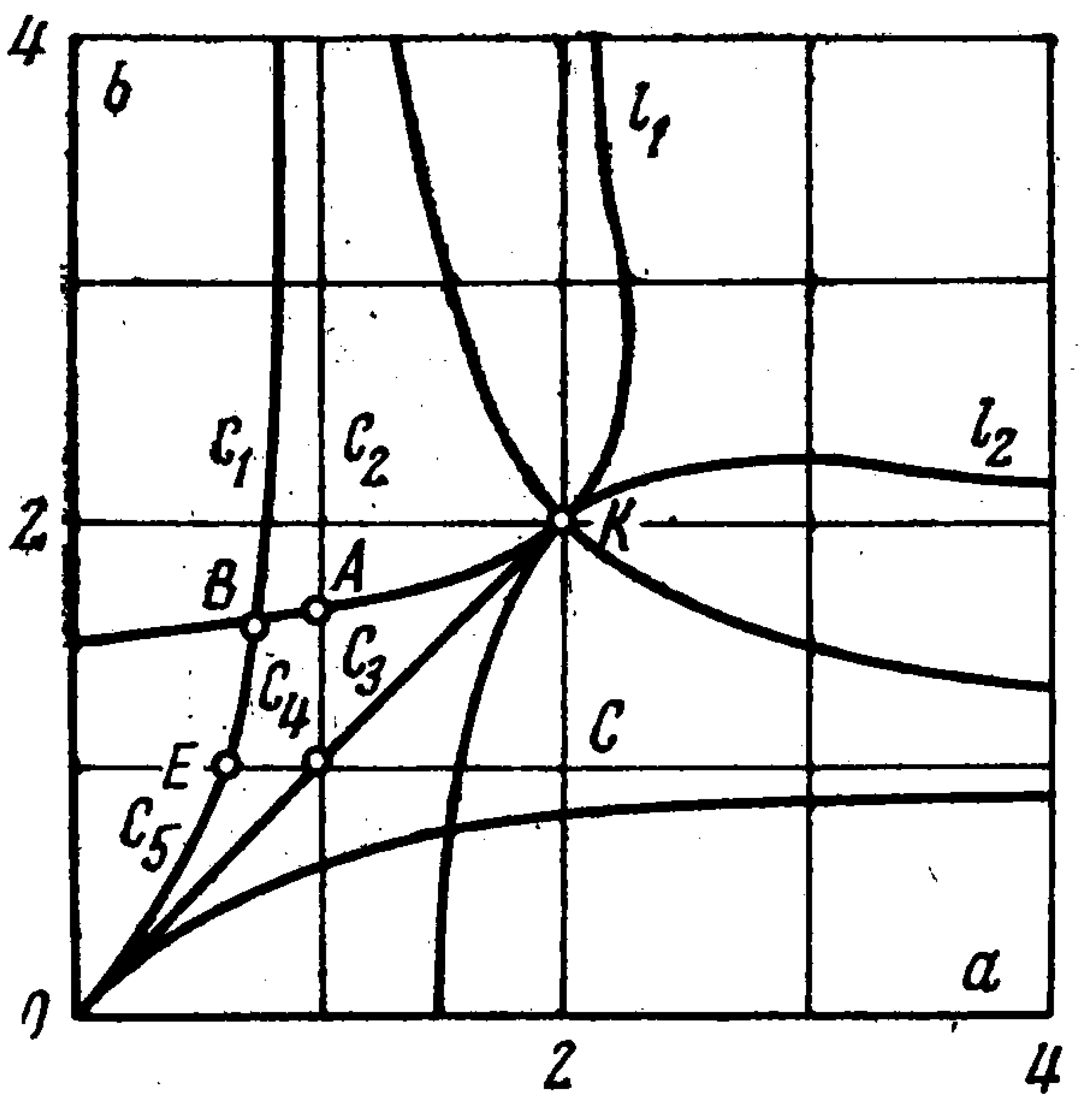
Необходимые условия устойчивости, следовательно, таковы:

$$Q_1 > 0, \quad Q_2 > 0 \tag{4.2}$$
$$Q_1^2 - 4Q_2 = (a + b - ab)^2 \omega^4 - 2e(a + b - ab)(4 - a - b)\omega^2 + (a - b)^2 > 0$$

Эти условия получены и детально проанализированы в работе [11]. Предельные случаи, когда в некоторых из соотношений (4.2) знак неравенства заменяется знаком равенства, здесь, как и в работе [11], исключены из рассмотрения.

Условия совместности неравенств (4.2) запишем в принятых выше обозначениях.

При $e = -1$ неравенства (4.2) выполнены при любых значениях ω для $b \geqslant a \geqslant 1$; если $b \geqslant 1 > a$ имеем $\omega^2 < a / (1 - a)$; при $1 > a > b$ будет $\omega^2 < b / (1 - b)$, либо $\omega^2 > a / (1 - a)$.



Фиг. 1

В случае $e = 1$ для удобства изложения введем в рассмотрение кривые l_1, l_2, задаваемые соответственно уравнениями

$$a = b(2b - 3) / (b - 1)^2,$$
$$b = (2a - 3) / (a - 1)^2$$

которые вместе с прямыми $a = 1$, $b = 1$, $a = b$ разбивают область C на десять подобластей C_i, C_i' ($i = 1, \ldots, 5$) (фиг. 1). Необходимые условия в областях C_i' получаются из необходимых условий устойчивости в областях C_i заменой в соответствующих неравенствах a на b и b на a. Область C_1 включает луч $a = 1$, $b \geqslant (\sqrt{5} + 1) / 2$ и отрезок $[A, B]$ кривой l_1, область C_2 включает полуинтервал $(A, K]$ той же кривой, область C_4 — интервал (A, D), область C_5 — полуинтервал $[E, D)$. Напомним, что на прямой $a = b$ уже установлены и достаточные условия, отраженные критерием Майевского, поэтому точки этой прямой не включены ни в одну из областей C_i. Дадим сводку необходимых условий устойчивости (в скобках указана соответствующая область):

вращение неустойчиво при любом значении ω (C_1);

$$\omega^2 > \frac{a}{a-1} \quad (C_2); \quad \omega_0^2 < \omega^2 < \frac{b}{b-1}, \quad \omega^2 > \frac{a}{a-1} \quad (C_3);$$

$$\omega_0^2 < \omega^2 < \frac{b}{b-1} \quad (C_4); \quad \omega^2 > \omega_0^2 \quad (C_5).$$

Здесь

$$\omega_0^2 = \frac{4 - a - b + 2\sqrt{(a-2)(b-2)}}{a + b - ab}$$

Замечания 1°. В. В. Румянцев [1] методом Четаева исследовал достаточные условия устойчивости решения (2.2), которые оказываются эквивалентными условиям знакоопределенности H_2, вследствие чего остается открытым вопрос о поведении решения (2.2) в следующих случаях:

$$e = -1, \quad 1 > a > b, \quad \omega^2 > \frac{a}{1-a}$$

$$e = 1, \quad b > 1, \quad a > \frac{b(2b-3)}{(b-1)^2}, \quad \omega_0^2 < \omega^2 < \frac{b}{b-1}$$

а также в областях C_3, C_4, C_5, в которых выполнены необходимые условия устойчивости, но функция H_2 знакопеременная.

2°. Ниже отдельно рассмотрен случай $a = 1$, для которого при $e = -1$ необходимые условия устойчивости совпадают с достаточными [1], а при $e = 1$ невозможно указать достаточные условия устойчивости построением функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения, поскольку функция H^2 знакопостоянная [12].

5. Приведение к нормальной форме. Для применения теоремы 1 приведем гамильтониан (3.2) к нормальной форме, ограничиваясь членами четвертого порядка включительно. Обозначая корни уравнения (4.1) через $\pm i\alpha_1$, $\pm i\alpha_2$, запишем каноническое преобразование, нормализующее H_2 (c — произвольная постоянная)

$$
\begin{aligned}
(5.1)\qquad & x_1 = s_1u_1 + c_1u_2, \quad y_1 = s_2v_1 + c_2v_2 \\
& x_2 = s_3v_1 + c_3v_2, \quad y_2 = s_4u_1 + c_4u_2 \\
& s_1 = \alpha_1[\alpha_1^2 + \omega^2(a-1)(1-b) + be]\,w, \quad s_2 = [a\alpha_1^2 + \\
& + \omega^2(1-a)\,b + abe]\,w \\
& s_3 = \omega\,[\alpha_1^2(1-a) + \omega^2(a-1) - ae]\,w, \quad s_4 = \alpha_1\omega\,(ab - \\
& - a - b)\,w \\
& \alpha_1 w^2 = c\,\{[\alpha_1^2 + \omega^2(a-1)(1-b) + be][a\alpha_1^2 + \omega^2(1 - \\
& - a)\,b + abe] + \omega^2(ab - a - b)\,[\alpha_1^2(a-1) + \omega^2(1-a) + \\
& + ae]\}^{-1}
\end{aligned}
$$

Формулы для c_1, c_2, c_3, c_4 находятся из выражений для s_1, s_2, s_3, s_4 заменой α_1 на α_2.

Коэффициенты β_{11}, β_{12}, β_{22} равны коэффициентам при $p_1^2q_1^2$, $p_1q_1p_2q_2$, $p_2^2q_2^2$ в форме $4H_4$, выраженной через комплексные величины p_1, p_2, q_1, q_2

$$p_k = u_k + iv_k, \quad q_k = u_k - iv_k, \quad k = 1, 2$$

Получаем

$$
\begin{aligned}
8c\beta_{11} = {} & 6(1-a)s_1^2s_4^2 + 6s_2^2s_3^2 + \frac{8\omega^2 + e}{2}s_2^4 + \\
& + \frac{4\omega^2(1-a) + e}{2}s_4^4 + [2(a-1)\omega^2 + e]\,s_2^2s_4^2 + 8\omega(1-a)s_1s_4^3 + \\
& + 2(a-1)\omega s_1s_2^2s_4 + 10\omega s_2^3s_3 + 4\omega(a-1)s_2s_3s_4^2 + 4(a-1)s_1s_2s_3s_4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
8c\beta_{12} = {} & 2(1-a)\,[(c_1s_4 + s_1c_4)^2 + c_1c_4s_1s_4] + 2\,[(c_3s_2 + c_2s_3)^2 + \\
& + c_2c_3s_2s_3] + (8\omega^2 + e)\,c_2^2s_2^2 + [4\omega^2(1-a) + e]\,c_4^2s_4^2 + \\
& + [2(a-1)\omega^2 + e]\,(c_2^2s_4^2 + s_2^2c_4^2) + 8\omega(1-a)(c_1s_4 + \\
& + s_1c_4)\,c_4s_4 + 2\omega(a-1)(c_1c_4s_2^2 + s_1s_4c_2^2) + 10\omega c_2s_2(c_2s_3 + s_2c_3) + \\
& + 4\omega(a-1)(c_2c_3s_4^2 + s_2s_3c_4^2) + 4(a-1)(c_2c_3s_1s_4 + s_2s_3c_1c_4)
\end{aligned}
$$

Выражение для β_{22} следует из формулы для β_{11} заменой s_k на c_k.

6. Случай равных моментов инерции. Прежде чем анализировать гамильтониан приведенной системы в общем случае, исследуем случай $a = 1$, что соответствует равенству $A_1 = A_2$ (A_1, A_2, A_3 — главные моменты инерции тела относительно неподвижной точки). Поскольку при $e = -1$ необходимые условия устойчивости совпадают с достаточными (см. замечание 2° п.4), в дальнейшем будем считать $e = 1$. Коэффициенты β_{ke} при этом таковы:

$$16c\beta_{11} = 12s_2^2s_3^2 + 2s_2^2s_4^2 + 20\omega s_2^3s_3 + (8\omega^2 + 1)\, s_2^4 + s_4^4 \tag{6.1}$$

$$16c\beta_{22} = 12c_2^2c_3^2 + 2c_2^2c_4^2 + 20\omega c_2^3c_3 + (8\omega^2 + 1)\, c_4^2 + c_4^4$$

$$16c\beta_{12} = 2\,(4s_2s_3c_2c_3 + s_2^2c_3^2 + c_3^2s_3^2) + (8\omega^2 + 1)s_2^2c_2^2 +$$
$$+ s_4^2c_4^2 + s_2^2c_4^2 + c_2^2s_4^2 + 10\omega s_2c_2\,(c_3s_2 + c_2s_3)$$

$$s_1 = \alpha_1\,(\alpha_1^2 + b)\,w, \quad s_2 = (\alpha_1^2 + b)\,w, \quad s_3 = -\,\omega w$$
$$s_4 = -\,\alpha_1\omega w$$

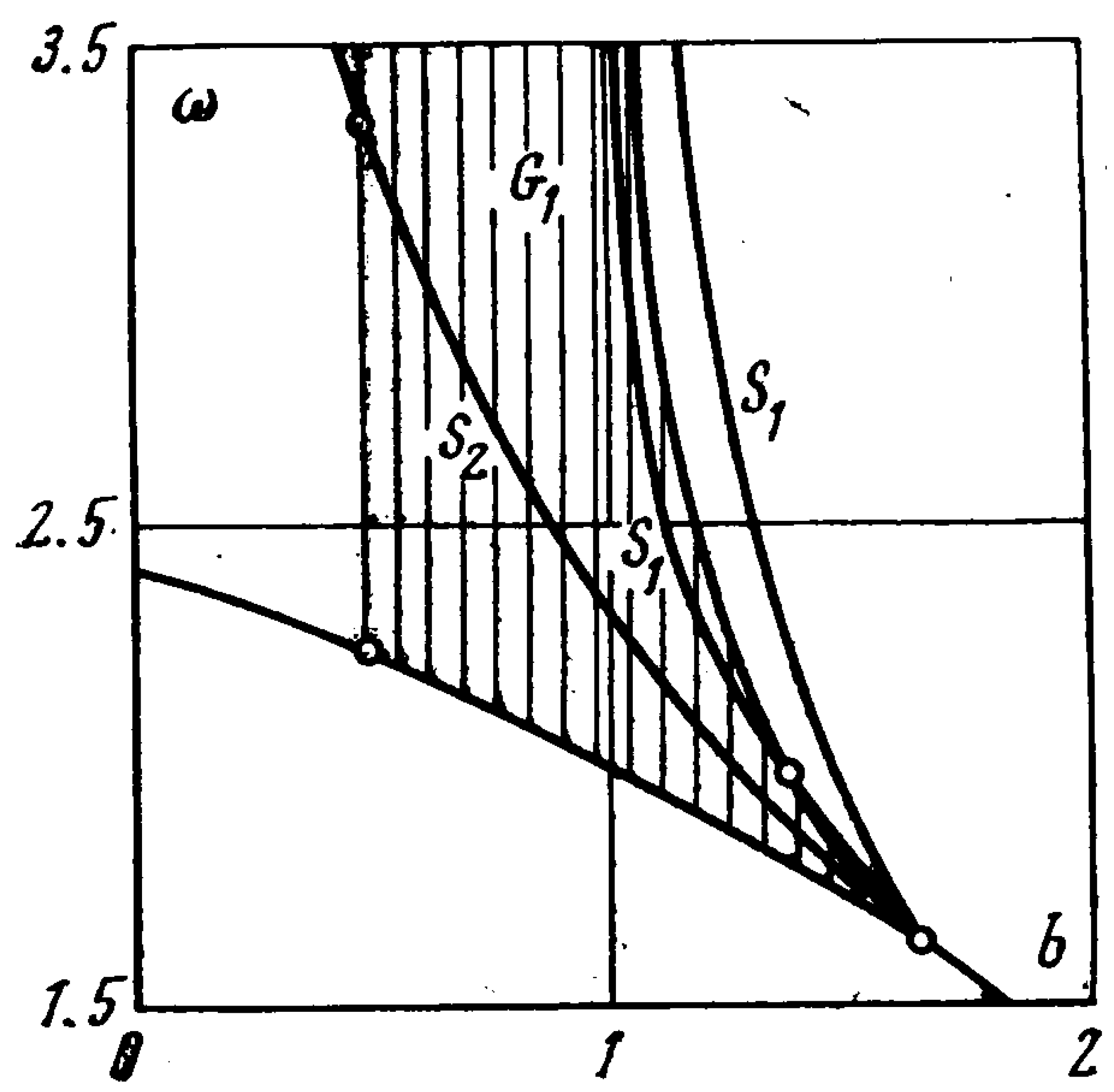
$$c_1 = \alpha_2\,(\alpha_2^2 + b)\,w', \quad c_2 = (\alpha_2^2 + b)\,w', \quad c_3 = -\,\omega w'$$
$$c_4 = -\,\alpha_2\omega w'$$

$$\alpha_1 w^2 = c\,[(\alpha_1^2 + b)^2 - \omega^2]^{-1}, \quad \alpha_2 w'^2 = c\,[(\alpha_2^2 + b)^2 - \omega^2]^{-1}$$
$$c = -\,16\omega^{-2}\alpha_1^2\alpha_2^2\,(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)^2\,(\alpha_1^2 + b)\,(\alpha_2^2 + b)$$

Подставляя формулы (6.1) в выражение детерминанта $D°$, получаем

$$D° = (b - 1)^2\omega^8 + 2\,(b - 1)(b^2 + 2b - 5)\,\omega^6 + \tag{6.2}$$
$$+ (b - 1)(b^3 + 13b^2 - 41b + 7)\,\omega^4 + 8\,(b^4 - 5b^3 + 5b^2 + b +$$
$$+ 2)\,\omega^2 + 4b\,(b - 1)^2$$

Из (6.2) видно, что условие C теоремы 1 нарушается лишь для некоторых значений ω, являющихся корнями уравнения $D° = 0$.



Фиг. 2

В области устойчивости, выделяемой необходимыми условиями, точки, соответствующие этим значениям ω, следует исключить, так как теорема 1 не решает вопрос об устойчивости таких равномерных вращений. Анализируя уравнение $D° = 0$, заключаем, что при $1/2 \leqslant b \leqslant 1$ оно не имеет действительных корней, а для $1 < b \leqslant b^* = (1 + \sqrt{5})\,/\,2$ оно имеет не более четырех действительных корней. Вид кривой S_1, определяемой уравнением $D° = 0$, в плоскости $Ob\omega$ для изучаемого промежутка $1/2 \leqslant b \leqslant (1 + \sqrt{5})\,/\,2$ показан на фиг. 2 (все построения на фиг. 2 проведены для $\omega > 0$, графики для $\omega < 0$ симметричны указанным относительно оси Ob).

Перейдем к нахождению равномерных вращений, для которых не выполнено условие B теоремы 1. Случай равенства $|\,\alpha_2\,| = |\,\alpha_1\,|$ обсужден в п. 4 и исключен из дальнейшего рассмотрения, поэтому, выбирая $|\alpha_2| > |\alpha_1|$, заключаем, что могут возникнуть следующие резонансы:

$$\alpha_2 = 2\alpha_1, \quad \alpha_3 = 3\alpha_1 \tag{6.3}$$

Резонанс $\alpha_2 = 2\alpha_1$ несуществен, так как в разложении (3.2) функции H отсутствует член H_3. Последнее из соотношений (6.3) после некоторых преобразований принимает вид

$$9\omega^4 + 2(41b - 59)\omega^2 + (9b - 1)(b - 9) = 0$$

Отсюда находим одно положительное значение ω^2

$$9\omega^2 = 59 - 41b + 10\sqrt{16b^2 - 41b + 34} \tag{6.4}$$

которое всегда попадает в область устойчивости. Уравнение (6.4) в плоскости $Ob\omega$ определяет некоторую кривую S_2 (фиг. 2).

Для наглядного представления полученных результатов введем расширенное параметрическое пространство, являющееся прямым произведением пространства параметров механической системы и пространства циклических постоянных. В данном случае этим пространством будет плоскость $Ob\omega$. Ограничения на моменты инерции выделяют в плоскости область $G\,(-\infty < \omega < \infty,\ {}^1/_2 < b < \infty)$ допустимых значений параметров. Область $(3 - b + 2\sqrt{2 - b} < \omega^2 < b\,/\,(b - 1),\ {}^1/_2 < b < (\sqrt{5} + 1)\,/\,2$, в которой выполнены необходимые условия устойчивости, обозначим через G_1 (фиг. 2)). Справедлива теорема.

Теорема 2. Пусть твердое тело, имеющее равные моменты инерции относительно первых двух осей, вращается равномерно вокруг первой оси, несущей центр масс, причем центр масс находится выше точки опоры. Тогда в расширенном параметрическом пространстве — плоскости $Ob\omega$ — область устойчивости представляет собой область G_1, из которой исключены кривые S_1, S_2 (фиг. 2).

7. Области устойчивости в общем случае. Возвращаясь к изучению общего случая, можно на основе результатов п. 6 утверждать, что $D^\circ \not\equiv 0$. Тогда уравнение $D^\circ(a, b, \omega) = 0$ определяет в расширенном параметрическом пространстве $Oab\omega$ некоторую поверхность S_1. Принимая $|\alpha_2| > |\alpha_1|$, получаем, что условие B теоремы 1 нарушается лишь при выполнении равенств (6.3). Как было отмечено, резонанс $\alpha_2 = 2\alpha_1$ несуществен. Из анализа случая $a = 1$ следует, что резонанс $\alpha_2 = 3\alpha_1$ не выполняется тождественно, поэтому уравнение $\alpha_2 = 3\alpha_1$ определяет в пространстве поверхность S_2.

Итак, условия B, C теоремы 1 не выполнены лишь на поверхностях S_1, S_2, в пространстве $Oab\omega$. Обозначая, как и раньше, область расширенного параметрического пространства, в которой выполнены необходимые условия устойчивости (см. п. 4), через G_1, сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 3. Пусть твердое тело вращается равномерно вокруг первой оси, несущей центр масс. Тогда в расширенном параметрическом пространстве $Oab\omega$ область устойчивости представляет собой область G_1, из которой исключены поверхности S_1, S_2.

Поступила 29 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
2. *Четаев Н. Г.* Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа. ПММ, 1954, т. 18, вып. 1.
3. *Румянцев В. В.* Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С. В. Ковалевской. ПММ, 1954, т. 18, вып. 4.
4. *Савченко А. Я.* Устойчивость равномерных вращений гироскопа С. В. Ковалевской. В кн.: Механика твердого тела, вып. 4. Киев, «Наукова думка», 1972.
5. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М., «Мир», 1973.
6. *Ляпунов А. М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Собр. соч., т. 1. М., Изд-во АН СССР, 1954.
7. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений. Тр. Московск. матем. о-ва, т. 26. Изд-во МГУ, 1972.
8. *Биркгоф Г. Д.* Динамические системы. М.— Л., Гостехиздат, 1941.
9. *Кузьмин П. А.* Устойчивость при параметрических возмущениях. ПММ, 1957, т. 21, вып. 1.
10. *Staude O.* Über permanente Rotationsachen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einem festen Punkt. J. reine und angew. Math., 1894, Bd 113, Nr 2.
11. *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применения, т. 1, М., Изд-во иностр. лит., 1952.
12. *Пожарицкий Г. К.* О построении функции Ляпунова из интегралов уравнений возмущенного движения. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.