

**КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ
ТРЕХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
ИЗ ТЕОРИИ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ**

В. Н. Белых, В. И. Некоркин

(Горький)

Рассматривается нелинейная система трех дифференциальных уравнений с тремя параметрами, описывающая динамику поисковой системы фазовой синхронизации. С помощью функций Ляпунова, систем сравнения, поверхностей без контакта и локальной теории бифуркаций многомерных динамических систем проведено качественное исследование системы. Установлено, что рабочая область параметров определяется бифуркацией петли сепаратрисы седла.

1. Введение. Рассматривается система трех дифференциальных уравнений вида

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \dot{\varphi} &= y, & \dot{y} &= v - \frac{a}{b} [F(\varphi) - \gamma], & \dot{v} &= -\frac{1}{b} v + \\ & & & + \frac{1}{b} \left(\frac{a}{b} - 1 \right) [F(\varphi) - \gamma] \end{aligned}$$

Здесь a, b, γ — параметры, функция $F(\varphi) \in C^k$ ($k \geq 2$) и удовлетворяет следующим условиям:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} F(\varphi) &= F(\varphi + 2\pi), & -F(\varphi) &= F(-\varphi), & F_{\varphi}'(\varphi) &> 0, & \varphi \in \\ & \in (-\varphi_0, \varphi_0), & F_{\varphi}'(\varphi) &< 0, & \varphi \in (\varphi_0, 2\pi - \varphi_0), & F_{\varphi}'(\varphi_0) &= \\ & = 0, & F(\varphi_0) &= 1 \end{aligned}$$

Система (1.1) задана в цилиндрическом фазовом пространстве $G = S^1 \times R^2$ ($\varphi \in S^1; y, v \in R^2$). Цилиндричность фазового пространства [1, 2] системы (1.1) приводит к возможности существования у нее рекуррентных движений не только колебательного типа (движений, остающихся рекуррентными в накрывающем для G пространстве R^3 ($\varphi \in R; y, v \in R^2$), но и вращательного (движений, теряющих свойство рекуррентности в накрывающем пространстве). Будем называть рекуррентные траектории колебательного типа, отличные от состояний равновесия, o -траекториями, а вращательного типа в области $y > 0$ ($y < 0$) — φ^1 (φ^2) — траекториями.

Система (1.1) является математической моделью астатической системы фазовой синхронизации в режиме линейного изменения частоты входного сигнала [3] или в режиме непрерывного поиска по частоте [4-6]. В (1.1) γ — относительная скорость изменения частоты, A и b — неотрицательные параметры цепи управления.

Режиму захвата в системе фазовой синхронизации соответствует движение изображающей точки по траекториям системы (1.1) к устойчивому

состоянию равновесия O_1 ($\varphi = \text{const}$, $y = v = 0$). Задача исследования динамики поисковой системы фазовой синхронизации состоит в нахождении критической скорости изменения частоты $\gamma = \gamma_1(a, b)$, выделяющей интервал $|\gamma| < \gamma_1(a, b)$, в пределах которого осуществляется режим захвата при любых начальных условиях из области $y < 0$. Решение этой задачи приводит к качественному исследованию системы (1.1).

В вырожденном случае $b = 0$ (а также в случае малого параметра при производной [7-9] при $b_1^2 = \mu \ll 1$) качественное исследование системы (1.1) с переменными φ , y , $z = v - (a/b)[F(\varphi) - \gamma]$ при $F(\varphi) = \sin \varphi$ проведено в [5] и обобщено на случай (1.2) в [6], теорема 3. Критическая скорость $\gamma_1(a, b)$ и время переходных процессов при $F(\varphi) = \sin \varphi$ для некоторых значений a и b численно определены в [10].

В данной работе проводится качественное исследование системы (1.1) в случае любых $F(\varphi)$, удовлетворяющих (1.2), и любых $b > 0$.

2. Предварительное исследование. Будем рассматривать систему (1.1) в области параметров $D: a > 0, b > 0, \gamma \geq 0$. Параметр γ считается неотрицательным в силу симметрии системы (1.1): при замене $\gamma = -\gamma$, $\varphi = -\varphi^\circ$, $y = -y^\circ$, $v = -v^\circ$ система (1.1) не изменяется.

Рассмотрим направляющую функцию $w_1 = v^2/2$ вне области фазового пространства системы (1.1)

$$G_\gamma = \{ \varphi \in S^1; y \in R; -|ab^{-1} - 1|(1 + \gamma \operatorname{sgn}(a - b)) < v < |ab^{-1} - 1|(1 - \gamma \operatorname{sgn}(a - b)), \gamma \leq 1; -(ab^{-1} - 1)(1 + \gamma) < v < 0, \gamma > 1, b < a; 0 < v < (1 - ab^{-1})(1 + \gamma), \gamma > 1, b > a \}$$

Производная функции w_1 в силу системы (1.1) отрицательна, поэтому имеет место следующее:

Предложение 1. Область G_γ обладает свойством устойчивости: при $t \rightarrow +\infty$ все траектории системы (1.1) из области $G \setminus G_\gamma$ входят внутрь области G_γ .

При $b = a$ область G_γ вырождается в цилиндр $v = 0$ — единственную асимптотически устойчивую интегральную поверхность системы (1.1). Движения на интегральном цилиндре $v = 0$ определяются консервативной системой, имеющей интеграл

$$(2.1) \quad H(\varphi, y) = \frac{y^2}{2} - \frac{a}{b} \int_0^\varphi [\gamma - F(\xi)] d\xi = h$$

Рассмотрим семейство цилиндров в G_γ : $w_2 = y + bv = \text{const}$. Так как производная функции w_2 в силу системы (1.1) при $\gamma > 1$ согласно (1.2) положительна: $w_2 = -[F(\varphi) - \gamma] > 0$, цилиндры $w_2 = \text{const}$ — поверхности без контакта. Тогда, используя предложение 1, получаем следующее утверждение.]

Предложение 2. При $\gamma > 1$ система (1.1) не имеет особых траекторий: все траектории системы при $t \rightarrow +\infty$, попадая (или находясь) в G_γ , уходят в бесконечность $y \rightarrow +\infty$.

3. Состояния равновесия. Состояния равновесия системы (1.1) расположены на окружности $y = v = 0$ в G_γ и определяются двумя корнями:

$\varphi_1(\gamma) \in [0, \varphi_0)$ и $\varphi_2(\gamma) \in (\varphi_0, \pi]$ уравнения $\gamma - F(\varphi) = 0$. При $0 \leq \gamma < 1$ система (1.1) имеет два состояния равновесия: $O_1(\varphi = \varphi_1(\gamma), y = v = 0)$ и $O_2(\varphi = \varphi_2(\gamma), y = v = 0)$; при $\gamma = 1$ — одно $O_0(\varphi = \varphi_0, y = v = 0)$, исчезающее при $\gamma > 1$. Характеристическое уравнение для состояний равновесия имеет вид

$$(3.1) \quad \kappa^3 + b^{-1}\kappa^2 + ab^{-1}F_{\varphi}'(\varphi_i)\kappa + b^{-1}F_{\varphi}'(\varphi_i) = 0, \quad i = 0, 1, 2$$

В силу (1.2) $F_{\varphi}'(\varphi_1) \equiv m(\gamma) > 0$, $F_{\varphi}'(\varphi_2) \equiv -n(\gamma) < 0$ и $F_{\varphi}'(\varphi_0) = 0$. Согласно (3.1) при $b < a$ O_1 — либо устойчивый узел ($\kappa_i < 0, i = 1, 2, 3$), либо устойчивый фокус ($\kappa_1 < 0, \operatorname{Re} \kappa_{2,3} < 0$), а при $b > a$ — либо седло ($\kappa_1 < 0, \kappa_{2,3} > 0$), либо седло-фокус ($\kappa_1 < 0, \operatorname{Re} \kappa_{2,3} > 0$). В области параметров $b > f(a, n(\gamma)) \geq a$, где $f(a, n(\gamma))$ — положительный корень уравнения $27n(\gamma)b^2 - an(\gamma)[4a^2n(\gamma) + 18]b - a^2n(\gamma) - 4 = 0$ относительно b , состояние равновесия O_2 — седло-фокус ($\kappa_1 > 0, \operatorname{Re} \kappa_{2,3} < 0$), а в области $b < f(a, n(\gamma))$ — седло ($\kappa_1 > 0, \kappa_{2,3} < 0$).

Согласно [11] через состояние равновесия O_2 проходят два многообразия: одномерная кривая, состоящая из O_2 и двух неустойчивых сепаратрис S_1^- и S_2^- , выходящих в области $G_v^1 = G_v^2 (y > 0)$ и $G_v^2 = G_v (y < 0)$ соответственно, и двумерная устойчивая поверхность S^+ .

При $\gamma = 1$ O_0 — сложное состояние равновесия с двумя нулевыми корнями. Так как при $\gamma = 1$ поверхности $w_2 = \text{const}$ имеют контакт с траекториями системы (1.1) лишь на цилиндре, проходящем через O_0 , из предложения 2 получаем, что при $\gamma = 1$ все траектории системы (1.1), кроме примыкающих к O_0 , при $t \rightarrow +\infty$ уходят в бесконечность. Ниже предполагается $0 \leq \gamma < 1$.

Введем определения структур разбиения фазового пространства на траектории системы (1.1).

Структура K — разбиение, соответствующее асимптотической устойчивости O_1 во всем пространстве G_v за исключением седла O_2 и его устойчивой сепаратрисной поверхности S^+ . При этом многообразия $S_{1,2}^-$ и S^+ необходимо расположены так, что $S_{1,2}^-$ стремятся к O_1 , а S^+ уходит в бесконечность.

Структура K^- — разбиение, при котором нет o - и φ -траекторий, O_1 неустойчиво, $S_{1,2}^-$ уходят в бесконечность, траектории на поверхности S^+ при $t \rightarrow -\infty$ стремятся к O_1 и уходят в бесконечность.

Структура L — структура K , дополненная седловым φ^1 -циклом (фиг. 1, а).

Структура L^- — структура K^- , дополненная устойчивым φ^2 -циклом.

Структура M — разбиение, при котором нет o - и φ -траекторий, S_1^- в области G_v^1 , уходит в бесконечность, S_2^- стремится к O_1 , $S^+ \cap G_v$ в области G_v^2 уходит в бесконечность, охватывая устойчивое состояние равновесия O_1 и ограничивая его область притяжения (фиг. 1, б).

Структура M^- — разбиение, при котором нет o - и φ -траекторий, S_1^- и S_2^- уходят в области G_v^1 в бесконечность, часть траекторий на

$S^+ \cap G_{v_1}^-$ при $t \rightarrow -\infty$ стремится к O_1 , а другая уходит в области $G_{v_2}^2$ в бесконечность.

4. **Функции Ляпунова.** Введем в рассмотрение функции вида

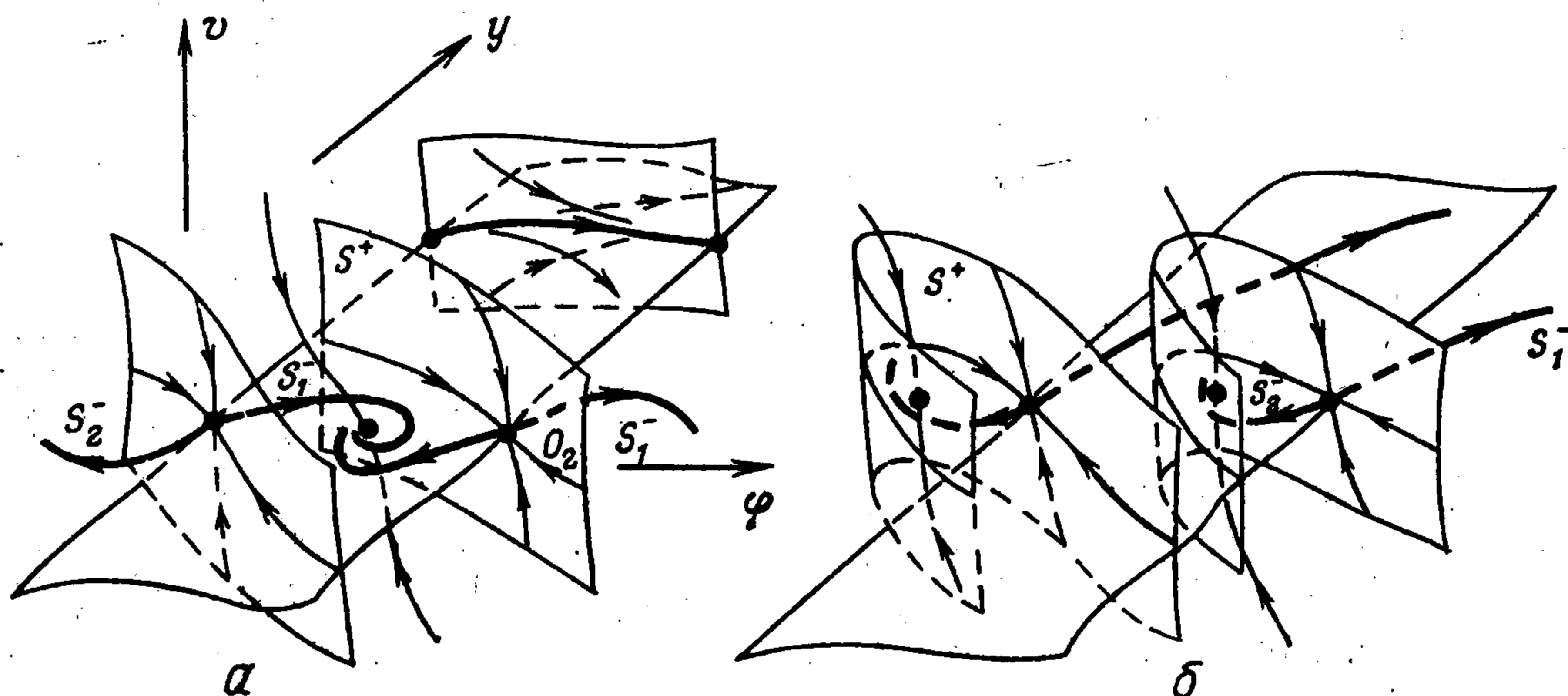
$$(4.1) \quad V_i = \frac{(-1)^i}{2} \left\{ (b-a)(y+bv)^2 - b^2v^2 + 2(b-a) \int_{\varphi_1}^{\varphi} [F(\xi) - \gamma] d\xi \right\}$$

$$(-1)^i (b-a) > 0 \quad (i = 1, 2)$$

производные которых в силу системы (1.1) удовлетворяют неравенствам

$$(4.2) \quad (-1)^i V_i' = b^2v^2 \geq 0 \quad (i = 1, 2)$$

При $\gamma = 0$ V_i — периодические функции Ляпунова [1,2], поэтому неравенства (4.2) доказывают следующее утверждение.



Фиг. 1

Лемма 1. 1) При $\gamma = 0$, $b < a$ система (1.1) имеет структуру K .
2) При $\gamma = 0$, $b > a$ система (1.1) имеет структуру K^- .

При $\gamma > 0$ функции (4.1) не периодичны по φ . Будем считать их определенными не в G_v , а в накрывающем пространстве R^3 . Введем обозначения $c_i = V_i(\varphi_2, 0, 0)$.

Лемма 2. 1) Система (1.1) не имеет o -траекторий. 2) При $\gamma > 0$, $b < a$ область $\Omega^+ : V_1(\varphi, y, v) < c_1$, $\varphi < \varphi_2$ принадлежит области притяжения устойчивого состояния равновесия O_1 . 3) При $\gamma > 0$, $b < a$ ($b > a$) система (1.1) не имеет φ^2 (φ^1)-траекторий. При $\gamma > 0$ бесконечность на полупространстве G_v^1 устойчива, а на G_v^2 неустойчива.

Доказательство. 1) В силу (4.2) и предложения 2.1 траектории системы (1.1) не могут попасть на один и тот же уровень $V_i = \text{const}$. Следовательно, система (1.1) не имеет o -траекторий. 2) Утверждение следует из того, что в области Ω^+ функция V_1 положительно определена и удовлетворяет (4.2). 3) При $\gamma = 0$ поверхности $V_i = c$ ($c > c_i$) 2π -периодичны по φ , а производные V_i' в силу системы (1.1) при $\gamma \neq 0$ в области G_v удовлетворяют неравенствам

$$(-1)^i V_i' = b^2v^2 + \gamma(b-a)y > 0, \quad (-1)^i y > 0$$

$$(-1)^i V_i' < 0, \quad (-1)^i [y + (b-a)(1+\gamma)^2\gamma^{-1}] < 0 \quad (i = 1, 2)$$

что и доказывает последнее утверждение леммы.

5. Системы сравнения. Рассмотрим вспомогательные системы A_i вида (2.1), где параметр γ заменен на значения $\gamma_i \equiv \gamma - |b - a| a^{-1} [1 - (-1)^i \gamma]$, в областях параметров $(-1)^i (b - a) > 0$ ($i = 1, 2$). При $\gamma < b^{-1} [a + (-1)^i (b - a)]$ системы A_i имеют по два состояния равновесия: по центру ($\varphi = \varphi_{1i}$, $y = 0$) и седлу ($\varphi = \varphi_{2i}$, $y = 0$) ($i = 1, 2$). Введем поверхности W_i , определенные в G_v , образованные кусками сепаратрис систем A_i , вида

$$W_i = \left\{ H(\varphi, y, \gamma_i) = -ab^{-1} \int_0^{\varphi_{2i}} [\gamma_i - F(\xi)] d\xi, (-1)^i y \leq 0, v \in G_v \right\} \\ (i = 1, 2)$$

Сравнивая векторные поля системы (1.1) и A_i , при использовании предложения 1, получаем, что траектории системы (1.1) пересекают поверхности W_i в сторону увеличения y , не имея с ними контакта.

Лемма 3. 1) В области параметров $\Delta_1 : ab^{-1} - 1 < \gamma < 1$, $a2^{-1} < b < a$ система (1.1) имеет структуру M . 2) В области параметров $\Delta_2 : 1 - ab^{-1} < \gamma < 1$, $b > a$ система (1.1) имеет структуру M^{-1} .

Доказательство. Из расположения поверхности W_1 (W_2), которая, проходя через прямую $\varphi = \varphi_{21}$ (φ_{22}), $y = 0$, уходит в области G_v^1 (G_v^2) в бесконечность, следует отсутствие φ^1 (φ^2)-траекторий. Учитывая, что в области параметров Δ_1 (Δ_2) седло O_2 в силу неравенств $\varphi_2 < \varphi_{2i}$ лежит под (над) поверхностью W_1 (W_2), получаем, что S_1^- (S^+), пересекая W_1 (W_2) в области G_v^1 (G_v^2), уходит в бесконечность, а S^+ (S_2^-) остается под (над) поверхностью W_1 (W_2), уходя в область G_v^2 (G_v^1). Тогда, используя лемму 2, устанавливаем, что система (1.1) в области параметров Δ_1 (Δ_2) имеет структуру M (M^-).

6. Бифуркации и φ -циклы. Обозначим через Γ_1 (Γ_2) петлю сепаратрисы седла (седло-фокуса) O_2 , образованную сепаратрисой S_1^- (S_2^-), идущей из O_2 в него же, делая при этом оборот по φ в области G_v^1 (G_v^2).

Теорема 1. Существуют функции $\gamma = \gamma_1(a, b)$ и $\gamma = \gamma_2(a, b)$, соответствующие существованию петли Γ_1 и Γ_2 соответственно, удовлетворяющие условиям

$$(6.1) \quad 0 < \gamma_1(a, b) < \begin{cases} 1, & 0 < b < a2^{-1} \\ ab^{-1} - 1, & a2^{-1} \leq b < a \end{cases}; \quad \gamma_1(a, a) = 0$$

$$(6.2) \quad 0 < \gamma_2(a, b) < 1 - ab^{-1}, \quad b > a, \quad \gamma_2(a, a) = 0$$

Доказательство. Из лемм 1 и 2 следует, что при $\gamma \geq 0$ многообразия $S_{1,2}^-$ и S^+ пересекают плоскость $\varphi = \varphi_1$. Пусть y_1^-, v_1^- (y_2^-, v_2^-) — координаты точки, в которой сепаратриса S_1^- (S_2^-) первый раз пересекает плоскость $\varphi = \varphi_1$ со стороны $\varphi < \varphi_1$ ($\varphi > \varphi_1$), а y_1^+ (v_1^+) (y_2^+ (v_2^+)) — уравнение кривой, по которой поверхность S^+ первый раз пересекает плоскость $\varphi = \varphi_1$ со стороны $\varphi > \varphi_1$ ($\varphi < \varphi_1$). Введем расстояния $\rho_1(\gamma, a, b) = y_1^- - y_1^+$ ($v_1^- - v_1^+$) и $\rho_2(\gamma, a, b) = y_2^- - y_2^+$ ($v_2^- - v_2^+$), являющиеся непрерывными функциями параметров, определенные в области $1 > \gamma \geq 0$. В силу п. 2, 3 и лемм функции $\rho_i(\gamma, a, b)$ ($i = 1, 2$) удовлетворяют условиям]

$$(6.3) \quad \rho_i(0, a, b) < 0 \quad (-1)^i (b - a) > 0, \quad \rho_i(0, a, a) = 0 \\ \rho_i(\gamma, a, b) > 0 \quad (\gamma \in \Delta_i \text{ и } (-1)^i (b - a) > 0), \quad \lim_{\gamma \rightarrow 1} \rho_i(\gamma, a, b) > 0$$

В силу (6.3) и непрерывности $\rho_i(\gamma, a, b)$ по теореме Коши о нулях функций устанавливаем существование функций $\gamma_i(a, b)$ как решений уравнений $\rho_i(\gamma, a, b) = 0$ ($i = 1, 2$), удовлетворяющих условиям (6.1) и (6.2) соответственно. Теорема доказана.

Замечания. 1°. Теорема 1 не доказывает однозначности функций γ_i , предполагаемой ниже для простоты изложения.

2°. В соответствии с [5, 6] имеет место предельное соотношение $\lim_{b \rightarrow 0} \gamma_1(a, b) = \gamma^0(a)$, где $\gamma^0(a)$ — бифуркационная кривая петли сепаратрисы вырожденной двумерной системы [6].

Теорема 2. При $b < a$ с ростом параметра γ от нуля из бесконечности рождается седловой ϕ^1 -цикл, опускающийся вниз по области G_v^1 , влипающий в петлю Γ_1 при $\gamma = \gamma_1(a, b)$.

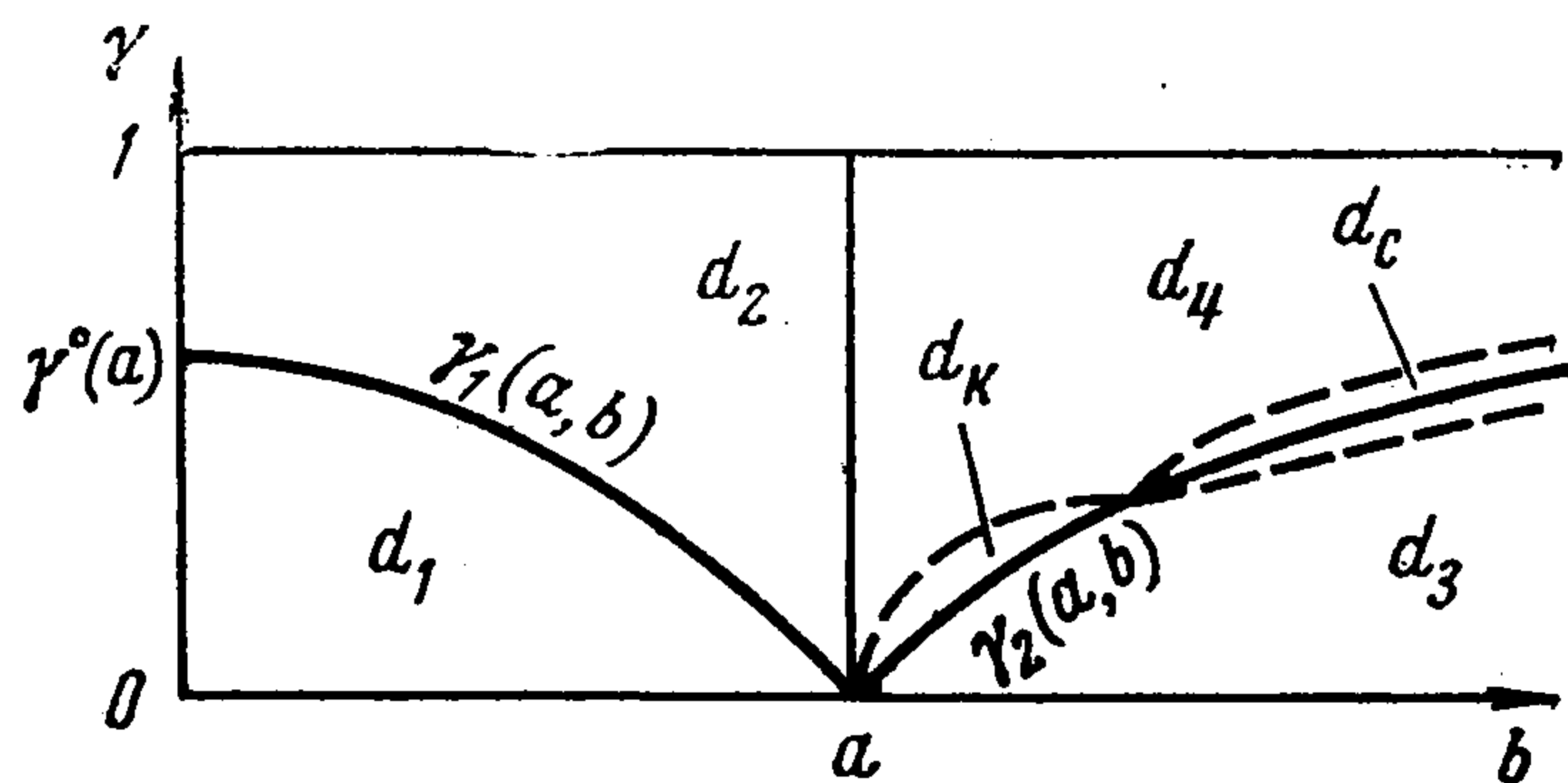
Доказательство. Введем периодическую по ϕ область g_1 , гомеоморфную тору, граница которой составлена из поверхностей

$$u_1^+: v = b^{-1}(a - b)(1 - \gamma), \quad u_2^+ : v = -b^{-1}(a - b)(1 + \gamma), \quad u_1^- : V_1(\phi, y, v) = c, \quad \gamma = 0$$

и u_2^- , где u_2^- — периодическая по ϕ поверхность без контакта, расположенная в области G_v^1 ниже u_1^- , пересекаемая траекториями системы (1.1) в сторону уменьшения y , существующая при $\gamma < \gamma_1(a, b)$, $b < a$ в силу расположения многообразий S_1^- и S^+ ($\rho_1(\gamma, a, b) < 0$). Пусть T — отображение части плоскости $p : \{\phi = \phi^0 = \text{const}, y > y^0, v \in (u_1^+, u_2^+)\}$ на себя, порождаемое траекториями системы (1.1). При использовании предложения 1 и леммы 2 получаем, что векторное поле отображения T на границе l^s односвязной области $g^s = p \cap g_1$ имеет следующую ориентацию на кривых $u_i^- \cap p$ ($i = 1, 2$) оно направлено во внешность области g^s , а на кривых $u_i^+ \cap p$ ($i = 1, 2$) — во внутрь области p (либо g^s , либо в $p \setminus g^s$). В результате имеем $\text{ind}(T)_{l^s} = -1$, и, следовательно, отображение T в области g^s имеет по крайней мере одну седловую неподвижную точку, соответствующую седловому ϕ^1 -циклу системы (1.1). Так как в силу лемм 1 и 2 при $\gamma \rightarrow 0$ u_1^- уходит в бесконечность, а система (1.1) при $\gamma = 0$ имеет структуру K , при $\gamma \rightarrow 0$ седловой ϕ^1 -цикл уходит в бесконечность. В силу соотношений корней уравнения (3.1) для O_2 при $b < a$ выполняются условия теоремы из [12], в соответствии с которой при $\gamma = \gamma_1(a, b)$ седловой ϕ^1 -цикл влипает в петлю Γ_1 .

Следствие. По лемме 4.2 и теоремам 1, 2 система (1.1) в области параметров $d_1 : 0 < \gamma < \gamma_1(a, b)$, $b < a$ (фиг. 2) имеет структуру L , а в области $d_2 : \gamma_1(a, b) < \gamma < 1$, $b < a$ — структуру M .

Теорема 3. 1) При $b > a$, с ростом параметра γ от нуля, из бесконечности рождается устойчивый ϕ^2 -цикл, в области $\gamma < \gamma_2(a, b)$ поднимающийся вверх по области G_v^2 . 2) В области $\delta_1 : \{a^{-2} > \sup_{\gamma \in [0, 1]} n(\gamma) \equiv n^0, b < b_1\}$, где b_1 — положи-



Фиг. 2

тельный корень уравнения $b = -2^{-1}a + [4^{-1}a^2 + 2(n(\gamma_2(a, b)))^{-1}]^{1/2}$, устойчивый ϕ^2 -цикл влипает в петлю Γ_2 при $\gamma = \gamma_2(a, b)$. В области $\delta_2 : \{a^{-2} < n^0, b < b_2\}$, где b_2 — положительный корень уравнения $b = f(a, n(\gamma_2(a, b)))$, существует область $d_k \subset \delta_2$, для точек которой система (1.1) имеет два ϕ^2 -цикла: устойчивый и седловой. В областях $\delta_3 : \{a^{-2} > n^0, b > b_1\}$, $\delta_4 : \{a^{-2} = n^0, b > a\}$ и $\delta_5 : \{a^{-2} < n^0, b > b_2\}$ существует область параметров d_c , для точек которой система (1.1) имеет счетное число седловых ϕ^2 -циклов.

Доказательство. 1) Из предложения 1, леммы 2 и расположения многообразий S_1^- и S^+ в G_v^2 при $\gamma < \gamma_2(a, b)$ ($\rho_2(\gamma, a, b) < 0$) следует существование периодической по φ области $g_2 \subset G_v^2$, гомеоморфной тору, которую траектории системы (1.1) переводят в себя. Отсюда при использовании теоремы Брауэра получаем существование в g_2 хотя бы одного устойчивого φ^2 -цикла. Так как при $\gamma = 0$ система (1.1) по лемме 1 имеет структуру K^- , при $\gamma \rightarrow 0$ φ^2 -цикл уходит в бесконечность. 2) Используя [12, 13], анализируя соотношения корней уравнения (3.1) для O_2 , устанавливаем, что в области δ_1 (δ_2) из петли Γ_2 с уменьшением (увеличением) γ при прохождении значения γ_2 рождается устойчивый (седловой) φ^2 -цикл, а в областях δ_i ($i = 3, 4, 5$) в окрестности Γ_2 существует счетное число седловых φ^2 -циклов. По лемме 3 система (1.1) в области Δ_2 не имеет φ -циклов, поэтому с ростом γ все рождающиеся φ^2 -циклы должны исчезнуть. Отсюда получаем, что в области δ_1 рождающийся из бесконечности φ^2 -цикл влипают в петлю Γ_2 ; в области δ_2 существует кривая $\gamma = \gamma_k$, соответствующая бифуркации кратных φ^2 -циклов, вместе с кривой $\gamma = \gamma_2$ образующая область существования двух φ^2 -циклов $d_k : \{\gamma_2^k < \gamma < \gamma_k\}$; в областях δ_i ($i = 3, 4, 5$) существуют бифуркационные кривые $\gamma = \gamma_c^j$ ($j = 1, 2$) — границы области существования счетного множества φ^2 -циклов $d_c : \{\gamma_c^1 < \gamma < \gamma_c^2\}$. Теорема доказана.

Следствие. Бифуркационными кривыми $\gamma_2, \gamma_k, \gamma_c^j$ ($j = 1, 2$) область $b > a$ при $a^{-2} \geq n^\circ$ разбивается на области $d_c, d_3 : \{0 < \gamma < \gamma_2\} \setminus d_c$ и $d_4 : \{\gamma_2 < \gamma < 1\} \setminus \{d_c \cup d_k\}$, а при $a^{-2} < n^\circ$ — на области d_3, d_4, d_c и d_k (фиг. 2). В силу лемм 2, 3 и теорем 1, 3 в области d_3 система (1.1) имеет структуру L^- , в области d_4 — структуру M^- , в области d_k — структуру M^- , дополненную двумя φ^2 -циклами, в области d_c — счетное множество φ^2 -циклов и расположение многообразий $S_{1,2}^-, S^+$ такое же, как у структуры $L^-(M^-)$ при $\gamma < \gamma_2$ ($\gamma > \gamma_2$).

Замечание. Области параметров δ_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) в теореме 3 заведомо существуют, если $n(\gamma)$ — монотонная функция, имеющая один максимум при $\gamma = 0$ (например, $n(\gamma)$ в случае $F = \sin \varphi$). В случае немонотонных $n(\gamma)$ некоторые из δ_i , а следовательно d_k и d_c , могут отсутствовать.

В заключение укажем, что рабочей областью параметров системы фазовой синхронизации является область d_1 , соответствующая структуре L . Критическая скорость изменения частоты — граница области d_1 — $\gamma = \gamma_1(a, b)$, определяется бифуркацией петли Γ_1 .

Поступила 1 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Барбашин Е. А., Табуева В. А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М., «Наука», 1969.
2. Барбашин Е. А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. Тр. 5 междунар. конференции по нелинейным колебаниям, т. 2. Киев, Изд-во Ин-та матем. АН УССР, 1970.
3. Витерби Э. Д. Принципы когерентной связи. М., «Сов. радио», 1970.
4. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М., «Связь», 1972.
5. Бельх В. Н., Бельх Т. Г. Исследование динамики астатической системы ФАП в режиме непрерывного поиска по частоте. Изв. вузов. Радиофизика, 1970, т. 13, № 11.
6. Белюстина Л. Н., Бельх В. Н. Качественное исследование динамической системы на цилиндре. Дифференциальные уравнения, 1973, т. 9, № 3.
7. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М., «Наука», 1972.

8. Митропольский Ю. А., Лыкова О. В. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М., «Наука», 1973.
 9. Аносов Д. В. О предельных циклах систем дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных. Матем. сб., 1960, т. 50, № 3.
 10. Белях В. Н., Некоркин В. И. О динамике поисковой системы ФАПЧ с фильтром второго порядка. В сб.: Системы фазовой синхронизации. М., «Связь», 1975.
 11. Минц Р. М. Исследование некоторых основных типов сложных состояний равновесия в трехмерном пространстве. Матем. сб., 1964, т. 63, № 2.
 12. Шильников Л. П. О рождении периодического движения из траекторий, двояко-асимптотической к состоянию равновесия типа седло. Матем. сб., 1968, т. 77, № 3.
 13. Шильников Л. П. Об одном случае существования счетного множества периодических движений. Докл. АН СССР, 1965, т. 160, № 3.
-