

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

А. Н. Баутин

(Горький)

Методами теории бифуркаций при аппроксимации характеристики кубическим полиномом общего вида дается качественное исследование системы, представляющей интерес для приложений. Прослеживаются возможные бифуркации и поведение бифуркационных кривых.

К рассматриваемой системе приводит изучение процессов в электрических цепях с нелинейным отрицательным сопротивлением [1] схем на туннельных диодах [2-4], задачи о помпаже в компрессорах при линейной аппроксимации дросселя [5]. Полное качественное исследование системы при кусочно-линейной аппроксимации дано в [6].

1. Уравнения движения. Рассматривается система

$$(1.1) \quad \dot{x} = y - \varphi(x) \equiv P, \quad \dot{y} = \sigma - \lambda x - y \equiv Q \quad (\sigma > 0, \lambda > 0)$$

где $\varphi(x)$ имеет падающий участок, при аппроксимации $\varphi(x)$ кубическим полиномом $\varphi(x) = ax^3 - bx^2 + cx$ и условиях

$$(1.2) \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0, \quad b^2 - 3ac > 3a$$

Последнее эквивалентно условию $\min \varphi'(x) < -1$, при котором в системе возможны разнообразные бифуркации. В случае $\min \varphi'(x) > -1$ возможными бифуркациями являются только появление и исчезновение состояний равновесия, так как на всей плоскости $P_x' + Q_y' \neq 0$.

2. Состояния равновесия и их бифуркации. Возможны одно или три грубых состояния равновесия. В случае одного состояния равновесия имеем фокус (узел) устойчивый, если в точке пересечения изоклин выполняется $\varphi'(x) > -1$, и неустойчивый в противоположном случае. В случае трех состояний равновесия между фокусами (узлами) лежит седло.

Дискриминантная кривая в плоскости $\lambda\sigma$, отделяющая область трех состояний равновесия от области одного состояния равновесия, получается из условия касания прямой $y = \sigma - \lambda x$ и кривой $y = \varphi(x)$ и в параметрическом виде дается уравнениями

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma &= \varphi(x_0) - x_0\varphi'(x_0) = -2ax_0^3 + bx_0^2 \\ \lambda &= -\varphi'(x_0) = -3ax_0^2 + 2bx_0 - c \end{aligned}$$

(x_0 — координата точки касания).

Значению $x_0 = b/3a$, определяемому из условия $\varphi''(x_0) = 0$, соответствует точка возврата дискриминантной кривой. Ее координаты

$$(2.2) \quad \lambda_2 = (1/3 a)(b^2 - 3ac), \quad \sigma_2 = b^3 / 27a^2$$

Дискриминантная кривая располагается слева от точки возврата и обращена выпуклостью в сторону трех состояний равновесия. Точкам дискриминантной кривой соответствуют два состояния равновесия системы (1.1): фокус (узел) и сложное состояние равновесия седло-узел. Точке возврата соответствует слияние трех состояний равновесия.

Исключая из (2.1) параметр x_0 , уравнение дискриминантной кривой можно получить в виде

$$\Delta \equiv 27a^2\sigma^2 - 18ab(c + \lambda)\sigma + 4b^3\sigma + 4a(c + \lambda)^3 - b^2(c + \lambda)^2 = 0$$

Система (1.1) будет иметь сложный фокус на прямых, выходящих по касательной из точек дискриминантной кривой при $\lambda = 1$ в область $\lambda > 1$.

Для координат состояний равновесия имеем уравнение

$$(2.3) \quad ax^3 - bx^2 + (c + \lambda)x - \sigma = 0$$

Условие $P_x' + Q_y' = 0$ дает $3ax^2 - 2bx + c + 1 = 0$, откуда

$$(2.4) \quad x_{1,2} = (1/3a) [b \pm \sqrt{b^2 - 3a(c + 1)}], \quad x_1 < x_2$$

Подставляя (2.4) в (2.3), находим для состояния равновесия $x = x_1$

$$(2.5) \quad L_1 \equiv 9ab(c + \lambda) - 2b^3 - 27a^2\sigma - (b^2 - 3ac - 3a)^{1/2} (6ac - 2b^2 - 3a + 9a\lambda) = 0$$

для состояния равновесия $x = x_2$

$$(2.6) \quad L_2 \equiv 9ab(c + \lambda) - 2b^3 - 27a^2\sigma + (b^2 - 3ac - 3a)^{1/2} \times \\ \times (6ac - 2b^2 - 3a + 9a\lambda) = 0$$

Прямые (2.5) и (2.6) в плоскости параметров $\lambda\sigma$ касаются верхней и нижней ветви дискриминантной кривой при $\lambda = 1$, пересекаются в точке $\lambda_0 = (2b^2 + 3a - 6ac) / 9a$, $\sigma_0 = b(c + 1) / 9a$ и пересекают ветви дискриминантной кривой при $\lambda = \lambda_1$

$$(2.7) \quad \lambda_1 = (b^2 - 3ac + a) / 4a$$

Координаты (x_1) и (x_2) могут соответствовать как фокусу ($\lambda > 1$), так и седлу ($\lambda < 1$), и поэтому при переходе через прямые (2.5) и (2.6) может менять знак или фокусная или седловая величина $P_x' + Q_y'$.

Первая ляпуновская величина для сложного фокуса системы (1.1) имеет вид [8]

$$(2.8) \quad \alpha_3 = (\pi / 4)(\lambda - 1)^{-3/2} [3a(\lambda + 1) - 2(b^2 - 3ac)]$$

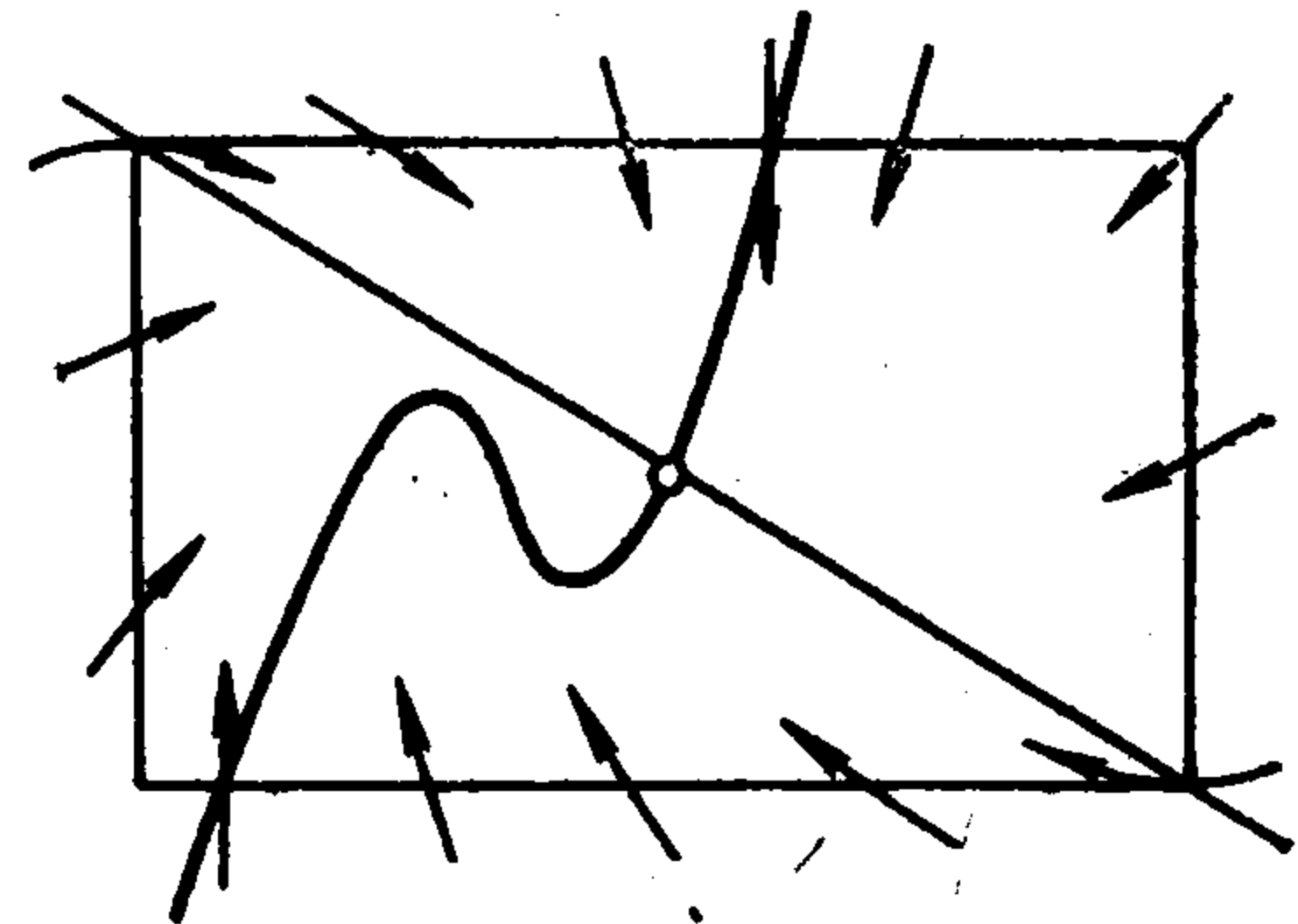
Величина α_3 обращается в нуль при $\lambda = \lambda_3$, $\lambda_3 = (2 / 3a)(b^2 - 3ac) - 1$.

Сложный фокус устойчив при $\lambda > \lambda_3$ ($\alpha_3 < 0$) и неустойчив при $\lambda < \lambda_3$ ($\alpha_3 > 0$). При $\lambda = \lambda_3$ ($\alpha_3 = 0$) устойчивость сложного фокуса определяется знаком второй ляпуновской величины α_5 , которая может быть подсчитана по готовой формуле [7]

$$(2.9) \quad \alpha_5 = -5/8 \pi a^2 (\lambda - 1)^{-5/2} < 0$$

Отметим, что в выражения (2.8) и (2.9) для α_3 и α_5 не входит координата состояния равновесия, и, следовательно, полученные выражения относятся как к левому (x_1), так и к правому (x_2) сложному фокусу для значений параметров на прямых (2.5) и (2.6) при $\lambda > 1$.

3. Поведение в бесконечности. Построим на плоскости xu прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, для которого изоклина $y = \sigma - \lambda x$ служит диагональю. Если такой прямоугольник взять достаточно большим, то изоклина $y = \varphi(x)$, порядок роста которой выше чем у прямой, стороны, параллельные оси y , не будет пересекать, а каждую из других сторон пересечет в одной точке. Все траектории системы (1.1) будут с возрастанием t входить внутрь такого прямоугольника. Бесконечность при любых значениях параметров системы будет неустойчивой (фиг. 1).



Фиг. 1

4. Качественные структуры разбиения фазового пространства. 4.1. Симметрия в фазовом пространстве. Перенесем начало координат в точку перегиба характеристики $y = \varphi(x)$. Система (1.1) примет вид

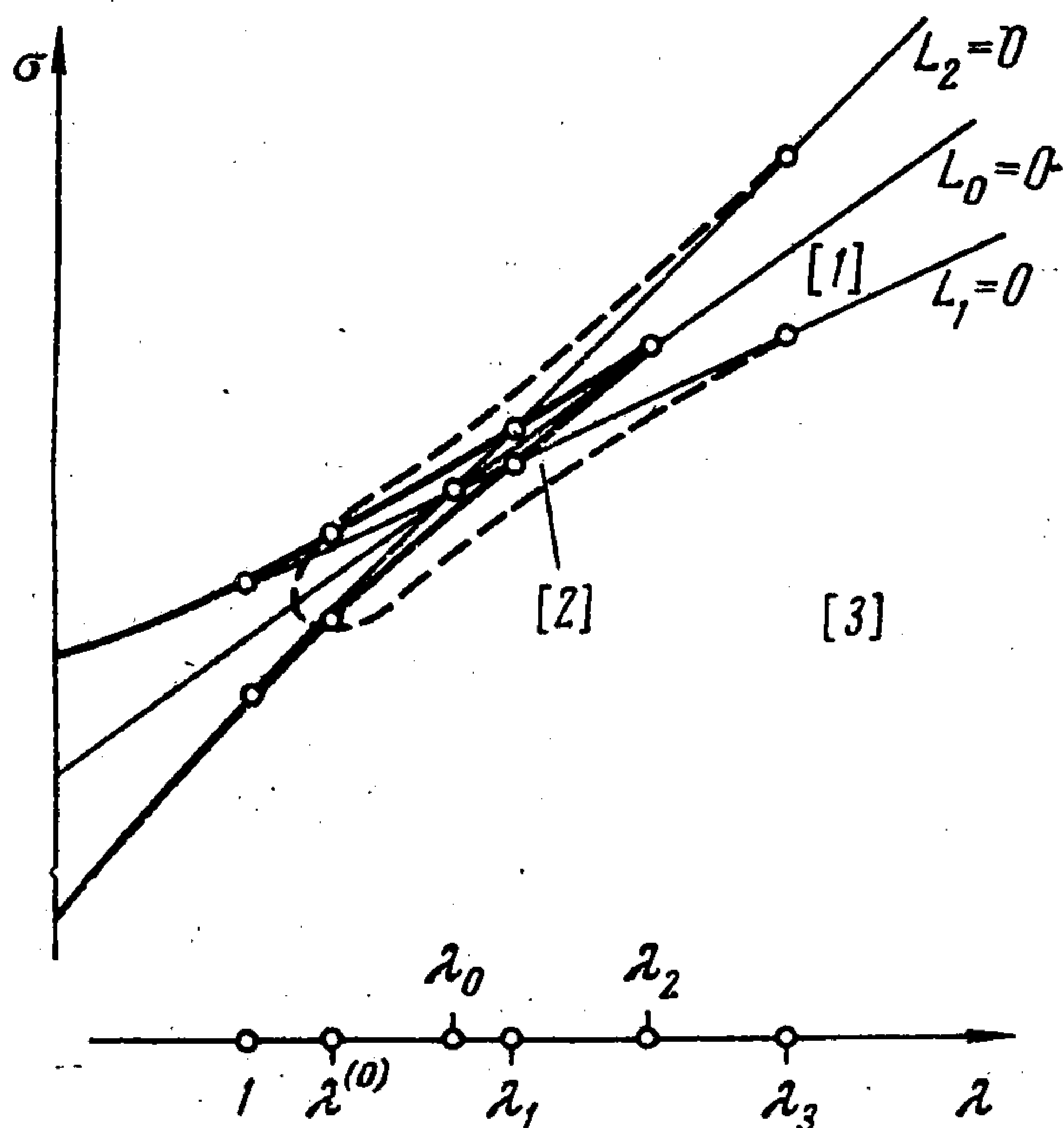
$$(4.1) \quad \begin{aligned} \xi' &= A\xi + \eta - a\xi^3, \quad \eta' = \bar{\sigma} - \lambda\xi - \eta \\ A &= (b^2 - 3ac) / 3a, \quad \bar{\sigma} = \sigma - (1/27 a^2) [9ab(c + \lambda) - 2b^3] \end{aligned}$$

Из (4.1) видно, что: а) если $\bar{\sigma} = 0$, то фазовое пространство системы (4.1) симметрично относительно начала координат (точки перегиба характеристики); б) если прямые $\eta = \bar{\sigma}_1 - \lambda\xi$ и $\eta = \bar{\sigma}_2 - \lambda\xi$ располагаются симметрично относительно начала координат ($\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2 = 0$), то фазовые портреты для значений $\bar{\sigma}_1$ и $\bar{\sigma}_2$ будут симметричны один другому относительно точки перегиба характеристики.

При изучении пространства параметров можно поэтому ограничиться рассмотрением только части пространства параметров $\lambda\sigma$ — либо выше, либо ниже линии симметричных структур $L_0 \equiv \bar{\sigma} = 0$.

На фиг 2 изображена дискриминантная кривая, прямые смены устойчивости $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$ (соответственно для фокусов x_1 и x_2) и линия симметричных структур $L_0 = 0$, проходящая через точку пересечения L_1 и L_2 .

Дальнейшее рассмотрение ведется для значений параметров ниже линии симметричных структур.



Фиг. 2

4.2. Структуры разбиения фазового пространства и бифуркации при изменении параметров вдоль прямой смены устойчивости фокуса x_1 . Проследим за бифуркациями и изменением качественной структуры разбиения фазового пространства при изменении параметров вдоль прямой $L_1 = 0$.

Пусть $\lambda > \lambda_3$. При этом $\alpha_3 < 0$ и сложный фокус x_1 будет устойчив. Принимая, что $b^2 - 3ac - 3a > 0$ (см. (2.4)) из выражения для λ_3 и (2.7) находим, что $\lambda_3 > \lambda_1$, и,

следовательно, для этих значений параметров система (1.1) имеет одно состояние равновесия. При уменьшении λ от значения $\lambda = \lambda_3$ меняет знак α_3 , сложный фокус меняет устойчивость (оставаясь сложным) и от него рождается устойчивый предельный цикл. При дальнейшем уменьшении λ на интервале $\lambda_1 < \lambda < \lambda_3$ устойчивый цикл сохраняется. Значение $\lambda = \lambda_1$ соответствует касанию прямой $\sigma - \lambda x - y = 0$ и характеристики $y = \varphi(x)$. При этом на фазовой плоскости возникает седло-узел с неустойчивой узловой областью ($P_x' + Q_y' = -\varphi'(x_0) - 1 > 0$ в седло-узле) и, как можно убедиться, при любых характеристиках, соответствующих определенному выбору коэффициентов $\varphi(x)$, именно внутри предельного цикла.

Если для некоторых аппроксимаций седло-узел возникает внутри цикла, а для других вне его, то по непрерывности должна существовать такая характеристика, для которой седло-узел возникает на предельном цикле. Но седло-узел с неустойчивой узловой областью не может возникнуть на устойчивом предельном цикле [8].

Таким образом, достаточно знать взаимное расположение цикла и седло-узла для какой-либо одной конкретной аппроксимации. Для системы (1.1) с аппроксимацией $\varphi(x) = 1/3 x^3 - 3x^2 + 7x$ и параметрами $\sigma = 49/8$, $\lambda = 7/4$ (соответствующими состояниям равновесия сложный фокус и седло-узел) численным методом установлено, что цикл охватывает седло-узел. Следовательно, это имеет место для любых кубических аппроксимаций.

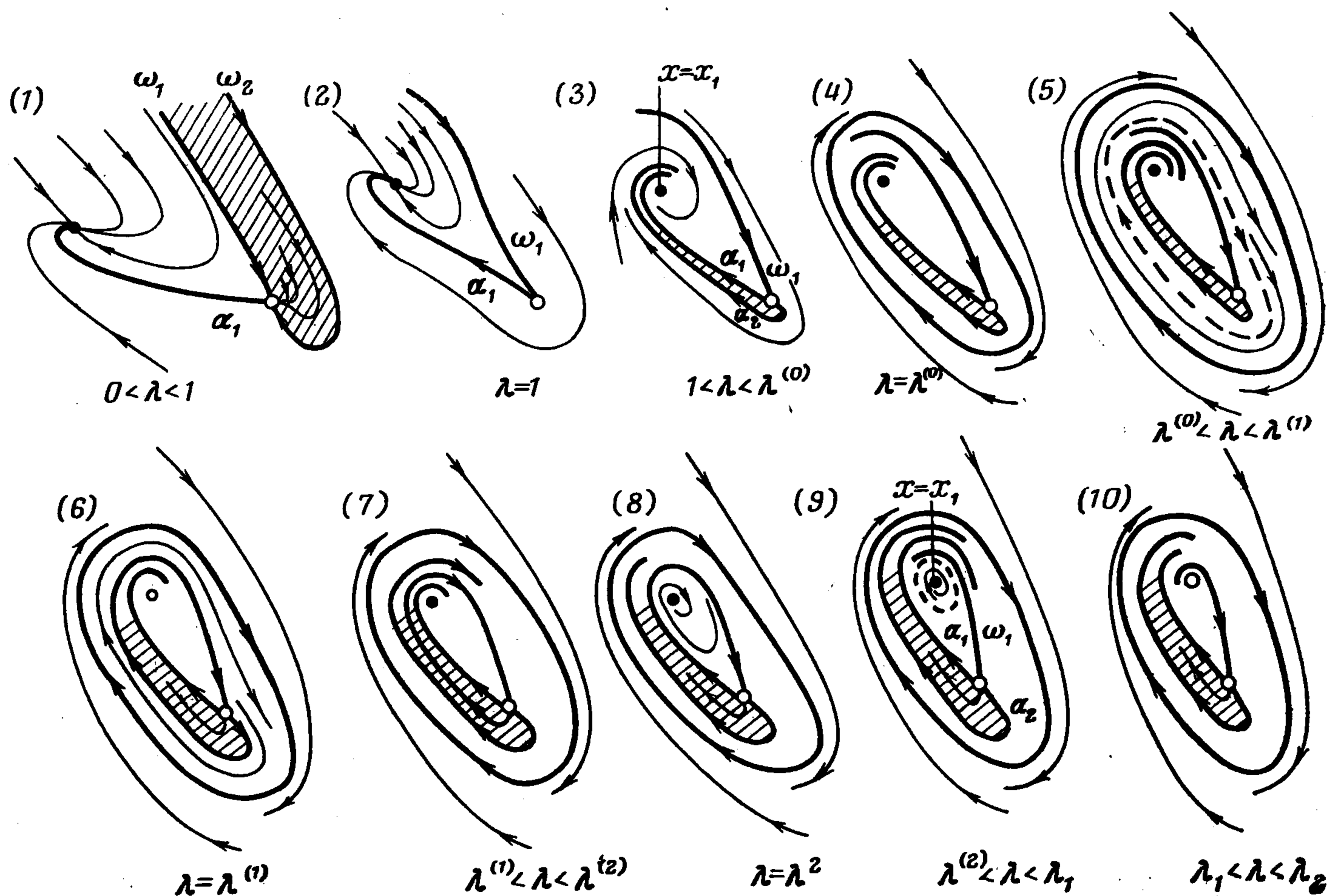
При дальнейшем продвижении вдоль прямой L_1 внутрь области, ограниченной дискриминантной кривой, седло-узел разделяется на седло и неустойчивый узел, который затем превращается в фокус. На интервале $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$ бифуркации состояний равновесия отсутствуют, а бифуркации сепаратрис запрещены знаком седловой величины. (Петли сепаратрис, если они возникнут, должны быть устойчивы, но это невозможно, так как седловая величина $P_x' + Q_y'$ в седле положительна [8].) Поэтому точке пересечения $\lambda = \lambda_0$ прямой $L_1 = 0$ с линией симметричных структур соответствует фазовое пространство, содержащее два сложных фокуса, расположенных симметрично относительно седла (α -сепаратрисы седла идут к устойчивому циклу, охватывающему все три состояния равновесия, ω -сепаратрисы скручиваются с неустойчивых сложных фокусов).

Замечание. Качественная структура разбиения фазового пространства на траектории по использованной информации описывается лишь с точностью до дополнительного четного числа предельных циклов, возможно, возникших из сгущения траекторий. Такая неполнота и в дальнейшем не может быть устранена.

4.3. Структура разбиения фазового пространства и бифуркации при изменении параметров вдоль линии симметричных структур. Проследим за бифуркациями и изменением структуры фазового пространства вдоль линии симметричных структур $L_0 = 0$. Пусть $\lambda > \lambda_2$ (λ_2 определяется выражением (2.2)). Единственное состояние равновесия системы — неустойчивый фокус (узел). Бесконечность неустойчива. Вокруг фокуса существует устойчивый предельный цикл. Убыванию λ вдоль прямой $L_0 = 0$ соответствует поворот прямой $y = \sigma - \lambda x$ вокруг состояния равновесия в точке перегиба характеристики $y = \varphi(x)$. При $\lambda = \lambda_2$ прямая будет касаться характеристики в точке перегиба ($L_0 = 0$ пересекает дискриминантную кривую в точке возврата), и возникнет сложное состояние равновесия, распадающееся при убывании λ на три простых: два неустойчивых узла (фокуса) и седло между ними. На интервале $\lambda_0 < \lambda < \lambda_2$ бифуркаций состояния равновесия не происходит. При $\lambda = \lambda_0$ оба фокуса становятся сложными и при убывании λ из них рождаются неустойчивые предельные циклы (первая фокусная величина α_3 — положительна). Возникает структура фазового пространства с тремя предельными циклами, α -сепаратрисы седла идут к устойчивому циклу, охватывающему все три состояния равновесия, ω -сепаратрисы скручиваются с неустойчивых циклов, охватывающих устойчивые фокусы (фиг. 5.9).

При дальнейшем убывании λ на интервале $0 \leq \lambda < \lambda_0$ смены устойчивости состояний равновесия не происходит, но при $\lambda = 0$ циклов уже нет (при $\lambda = 0$ существует интегральная прямая $y = \sigma$, проходящая через все состояния равновесия). Предельные циклы могут исчезнуть только или превратившись в петли сепаратрис, или слившись

с циклами, вновь возникшими из петель сепаратрис. Существенно, что циклы вокруг фокусов и цикл, охватывающий все три состояния равновесия, имеют разную устойчивость. В соответствии со знаком седловой величины [8] только неустойчивые циклы, охватывающие состояния равновесия, могут превратиться (и обязательно превратятся при некотором $\lambda = \lambda^+$) в петли сепаратрис. Эти две петли (возникающие одновременно, так как $L_0 = 0$ — линия симметричных структур) образуют сепаратрисный контур в виде «восьмерки», от которого при его разрушении (с убыванием λ) возникает неустойчивый предельный цикл, охватывающий три состояния равновесия. При некотором $\lambda = \lambda^* < \lambda^+$ предельные циклы, охватывающие три состояния равновесия, сливаются и при убывании λ исчезают.



Фиг. 3

4.4. Структуры разбиения фазового пространства и бифуркации при изменении параметров вдоль дискриминантной кривой. Проследим за бифуркациями и изменением структуры фазового пространства вдоль нижней ветви дискриминантной кривой, начиная от точки возврата $\lambda = \lambda_2$. На интервале $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ будет существовать структура с неустойчивым фокусом и седло-узлом с неустойчивой узловой областью внутри устойчивого предельного цикла (фиг. 3.10). При убывании λ от значения $\lambda = \lambda_1$ фокус x_1 меняет устойчивость и, так как $\alpha_3 > 0$, из него рождается неустойчивый предельный цикл (фиг. 3.9). Чтобы проследить за дальнейшими бифуркациями при убывании λ до нуля, следует прежде выяснить структуру при $\lambda = 0$. Она легко определяется, так как при $\lambda = 0$ существует интегральная прямая $y = \sigma$, проходящая через оба состояния равновесия (устойчивый узел и седло-узел с устойчивой узловой областью). Предельных циклов нет. Качественная структура эквивалентна изображенной на фиг. 3.1 (узловая область заштрихована). Для седло-узла значение $\lambda = 1$ является бифуркационным. При $\lambda < 1$ узловая область устойчива (седло-узел имеет две ω -сепаратрисы), при $\lambda > 1$ — неустойчива (седло-узел имеет две α -сепаратрисы), при $\lambda = 1$ седло-узел вырождается (характеристическое уравнение имеет два нулевых корня) и узловая область исчезает (седло-узел имеет одну α - и одну ω -сепаратрису). Структура с сохранением типа состояний равновесия осуществляется на интервале $0 < \lambda < 1$ аналогично фиг. 3.1.

Для прослеживания последовательности бифуркаций вдоль дискриминантной кривой существенным является выяснение качественной структуры при $\lambda = 1$. Как будет видно из дальнейшего, при возрастании λ от нуля необходимо возникает из сгущения траекторий двойной предельный цикл, охватывающий состояния равновесия, однако не существует способов обнаружить точные значения параметров, при которых он возникает. В дальнейшем будем предполагать, что при $\lambda = 1$ предельных циклов еще нет и осуществляется структура фиг. 3.2 (изменения в результатах, отвечающие предположению о существовании предельных циклов уже при $\lambda = 1$, будут в дальнейшем указаны).

При возрастании λ от значения $\lambda = 1$ возникает структура, качественно эквивалентная представленной на фиг. 3.3. Возникает неустойчивая узловая область седло-узла (обе α -сепаратрисы выходят по направлению $\kappa = -1$, ω -сепаратриса входит по направлению $\kappa = -\lambda$). Узел становится фокусом при $[1 - \varphi'(x_1)]^2 - 4\lambda < 0$, где $\varphi'(x_1) = 1/a(b^2 - 3ac - 4\lambda)$.

Сопоставим теперь расположение α - и ω -сепаратрис для структур на фиг. 3.9 и 3.3. Отметим точки пересечения с α - и ω -сепаратрисами на отрезке прямой $x = x_1$ выше фокуса (ближайшие по ходу сепаратрис от седло-узла). Для структуры на фиг. 3.9 след ω -сепаратрисы на прямой $x = x_1$ расположен ниже следов α -сепаратрис. Для структуры на фиг. 3.3, наоборот, — выше. При убывании λ последовательно должны осуществиться бифуркации, соответствующие совпадению на прямой $x = x_1$ следа ω -сепаратрисы со следом α_1 -сепаратрисы (выходящей из седло-узла вверх) и со следом α_2 -сепаратрисы (выходящей вниз). Так как седловая величина $P_x' + Q_y' = \lambda - 1$ при $\lambda > 1$ положительна, то при образовании первой петли (при $\lambda = \lambda^{(2)}$) к ней стягивается неустойчивый предельный цикл [8] (фиг. 3.8). При расположении следа ω -сепаратрисы между следами α_1 - и α_2 -сепаратрис будет существовать замкнутый контур, образованный ω -сепаратрисой седло-узла (фиг. 3.7). При совпадении следов ω - и α_2 -сепаратрис (при $\lambda = \lambda^{(1)} < \lambda^{(2)}$) возникает петля сепаратрисы (фиг. 3.6), от которой при ее разрушении с уменьшением λ рождается неустойчивый предельный цикл, охватывающий оба состояния равновесия, и возникает структура фиг. 3.5 с двумя предельными циклами, между которыми нет состояний равновесия. На интервале $1 < \lambda < \lambda^{(1)}$ при некотором $\lambda = \lambda^{(0)}$ предельные циклы сливаются в двойной полуустойчивый предельный цикл (фиг. 3.4) и затем исчезают. Последовательность структур вдоль нижней ветви дискриминантной кривой представлена на фиг. 3.

4.5. Структуры разбиения фазового пространства и бифуркации внутри дискриминантной кривой в области трех состояний равновесия. Дискриминантная кривая, представленная в параметрическом виде уравнениями (2.1), может рассматриваться как огибающая семейства прямых $\sigma - \lambda x_0 - \varphi(x_0) = 0$ в плоскости $\lambda\sigma$. Полупрямые

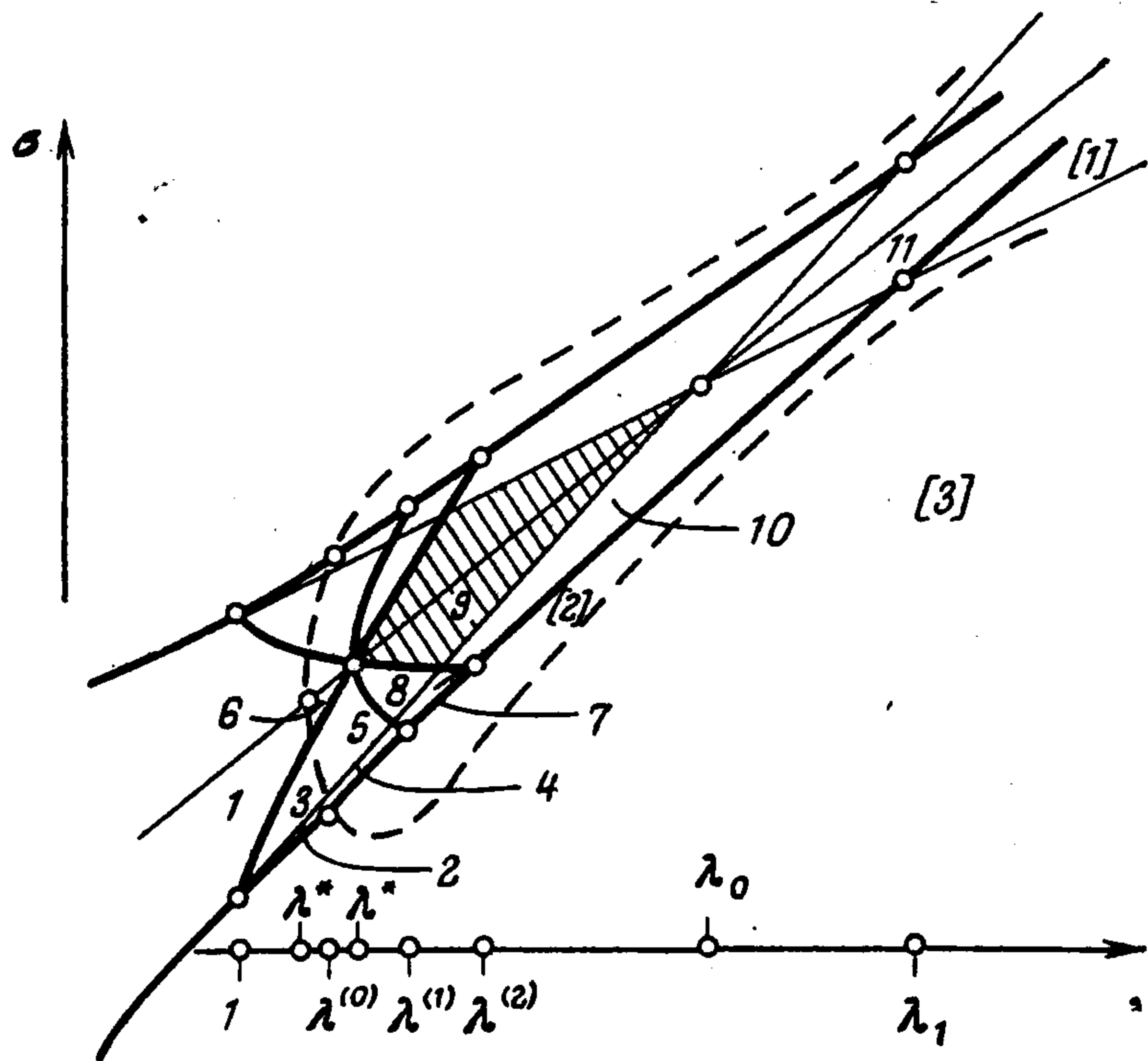
$$(4.2) \quad \sigma - \lambda x_0 - \varphi(x_0) = 0, \quad \lambda \leq -\varphi'(x_0)$$

касающиеся в точке $\lambda = -\varphi'(x_0)$ дискриминантной кривой, однократно покрывают область, ограниченную линией симметричных структур и нижней ветвью дискриминантной кривой, при x_0 , изменяющемся от точки перегиба до минимума характеристики $\varphi(x)$ (при $b/3a \leq x_0 \leq (1/3a)(b + \sqrt{b^2 - 3ac})$). Движение в пространстве параметров $\lambda\sigma$ вдоль полупрямых (4.2) от точки касания соответствует для системы (1.1) повороту против часовой стрелки изоклины $\sigma - \lambda x - y = 0$ вокруг седла, возникшего в точке $x = x_0$ при разделении седло-узла на седло и узел.

Рассмотрим бифуркации, осуществляющиеся при движении по полупрямым (4.2), касающимся дискриминантной кривой на интервале $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Здесь возникнут как бифуркации состояний равновесия, так и бифуркации сепаратрис и предельных циклов.

При уменьшении λ состояние равновесия седло-узел внутри устойчивого предельного цикла разделяется на седло и неустойчивый узел, который при дальнейшем уменьшении λ превращается в фокус (фиг. 5.11). В точках пересечения рассматриваемой полупрямой (4.2) с прямыми $L_1 = 0$ и $L_2 = 0$ происходят бифуркации состояний равновесия: при уменьшении λ сначала из фокуса x_1 (фиг. 5.10) и затем из фокуса x_2 рожда-

ются неустойчивые предельные циклы (фокусы становятся устойчивыми) и возникает структура с тремя предельными циклами (фиг. 5.9). При $\lambda = 0$ предельных циклов нет ($y = \sigma$ — интегральная прямая, качественная структура эквивалентна структуре фиг. 5.1), поэтому рассуждениями, аналогичными проведенным в п. 4.4, находим, что при убывании λ до нуля должны осуществиться следующие бифуркации сепаратрис: возникновение петли сепаратрисы вокруг верхнего фокуса, вокруг нижнего фокуса, возникновение «большой петли», содержащей внутри два состояния равновесия. Седловая величина положительна ($P_x' + Q_y' = -\varphi'(x_0) - 1 = \lambda - 1$, где λ — координата точки касания полупрямой (4.2) с дискриминантной кривой), поэтому петли сепаратрис могут быть только неустойчивыми, и их образование сопровождается влипанием в них (или, наоборот, рождением от них) неустойчивых предельных циклов. Петли сепаратрис вокруг фокусов возникают при влипании в них неустойчивых предельных циклов, появляющихся из фокусов. Разрушение «большой петли», образованной α_2 - и ω_1 -сепаратрисами седла, сопровождается появлением неустойчивого предельного цикла, охватывающего все состояния равновесия (большая петля не может возникнуть за счет стягивания к ней устойчивого предельного цикла, так как это запрещает знак седловой величины [8]). При $\lambda = 0$ циклов нет, поэтому при дальнейшем уменьшении λ из слияния устойчивого и неустойчивого предельных циклов должен возникнуть двойной предельный цикл и затем исчезнуть. Точки бифуркаций на полупрямых (4.2), соответствующие петлям сепаратрис вокруг верхнего и нижнего фокусов, могут либо совпадать, либо должны разделяться точкой бифуркации, соответствующей большой петле.



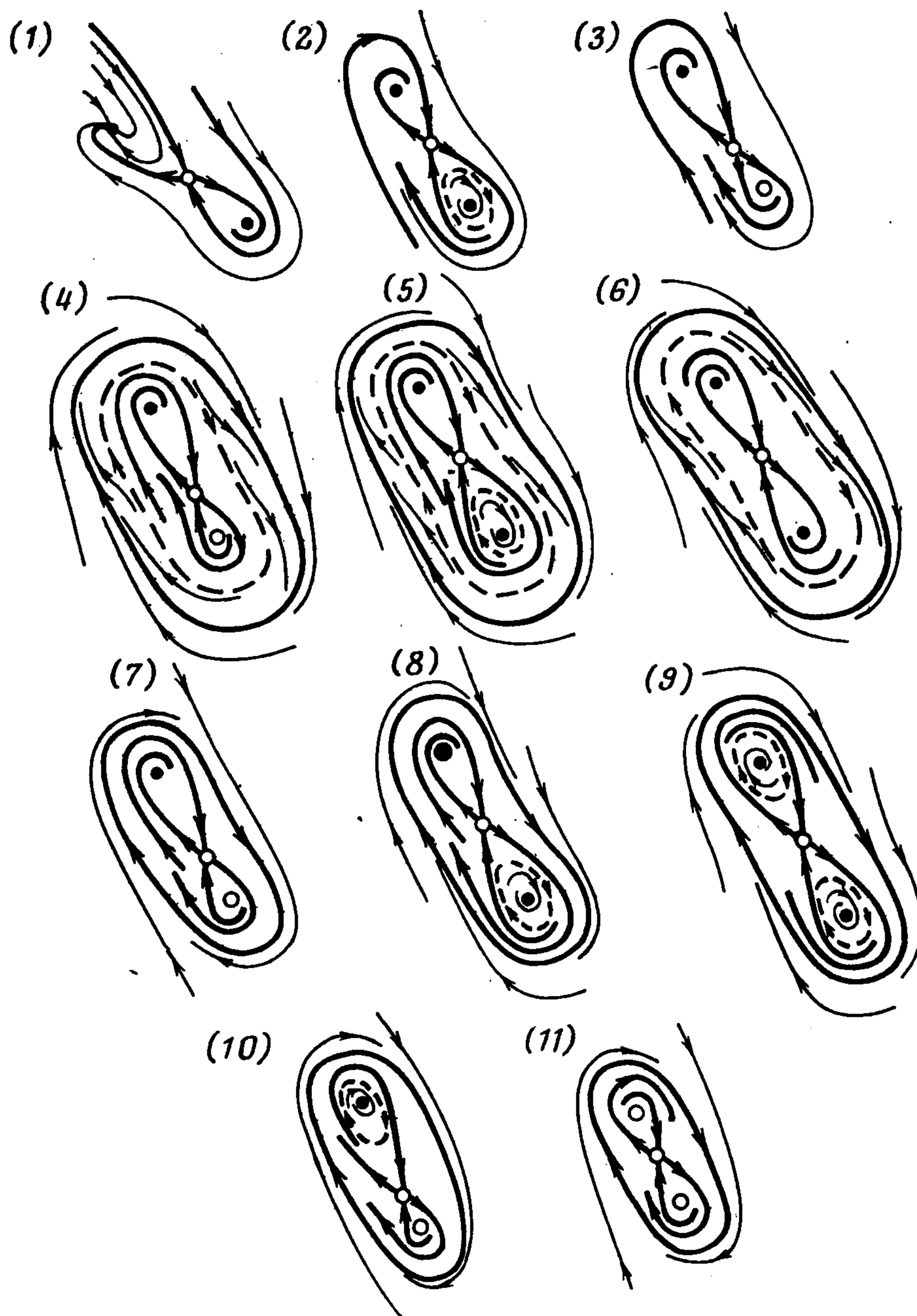
Фиг. 4

Для полупрямых (4.2), касающихся нижней границы дискриминантной кривой на интервалах $(\lambda^{(2)}, \lambda_1)$, $(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$, $(\lambda^{(0)}, \lambda^{(1)})$, $(1, \lambda^{(0)})$, бифуркации будут аналогичными, но число их от интервала к интервалу будет уменьшаться за счет того, что некоторые бифуркации уже произошли при движении вдоль дискриминантной кривой.

Указанные бифуркации имеют место на прямых, целиком заполняющих рассматриваемую область внутри дискриминантной кривой, поэтому существуют непрерывные кривые, на которых осуществляются бифуркации. Их начальные и конечные точки располагаются на линии симметричных структур и на дискриминантной кривой. Все три бифуркационные кривые, соответствующие трем типам петель сепаратрис, пересекаются в точке $\lambda = \lambda^+$ на линии симметричных структур (фиг. 4). Они заканчиваются в точках $\lambda = \lambda^{(2)}$, $\lambda = \lambda^{(1)}$ и $\lambda = 1$ на дискриминантной кривой. В точках $\lambda = \lambda^{(2)}$ и $\lambda = \lambda^{(1)}$ осуществляются структуры с петлями сепаратрис. В точке $\lambda = 1$ сепаратрисы вырожденного седло-узла нужно рассматривать как вырождение петли сепаратрисы вокруг верхнего фокуса, стянувшейся вместе с фокусом в одну точку. Кривая двойных циклов проходит через точку $\lambda = \lambda^*$ на линии симметричных структур и точку $\lambda = \lambda^{(0)}$ на дискриминантной кривой слева от кривой, на которой осуществляется большая петля.

Некоторые из бифуркационных кривых могут пересекаться, и поэтому последовательность качественных структур и бифуркаций при изменении параметра λ вдоль отрезков касательных внутри дискриминантной кривой может быть различной.

4.6. Структуры разбиения фазового пространства и бифуркации вне дискриминантной кривой (в области одного состояния равновесия). Здесь возможны три структуры: неустойчивый фокус внутри устойчивого предельного цикла; устойчивый фокус, окруженный двумя предельными циклами; и устойчивый фокус (узел), к которому траектории идут из бесконечности. Первая из перечисленных структур существует для точек вне дискриминантной кривой в области между прямой $L_1=0$ и линией симметрич-



Фиг. 5

ных структур (область [1] на фиг. 2 и фиг. 4). Область существования двух предельных циклов примыкает на интервале $\lambda^{(0)} < \lambda < \lambda_3$ к куску дискриминантной кривой и к прямой $L_1 = 0$. На интервале $\lambda^{(0)} < \lambda < \lambda_1$ при смещении с дискриминантной кривой (фиг. 3.5—3.9) в область одного состояния равновесия состояние равновесия седло-узел исчезает и остается два предельных цикла вокруг устойчивого фокуса (на фиг. 3.6—3.8 неустойчивый предельный цикл при исчезновении седло-узла возникает из замкнутой траектории, образованной ω -сепаратрисой седло-узла). На интервале $\lambda_1 < \lambda < \lambda_3$ при переходе из области $L_1 < 0$ в область $L_1 > 0$ (с убыванием σ) из фокуса появляется второй неустойчивый предельный цикл ($\alpha_3 > 0$ при $\lambda < \lambda_3$). Бифуркационная кривая, соответствующая слиянию устойчивого и неустойчивого предельных циклов, начинается в точке $\lambda = \lambda_3$ на прямой $L_1 = 0$ (здесь $\alpha_3 = 0$) и пересекает дискриминантную кривую при $\lambda = \lambda^{(0)}$, выделяя некоторую окрестность дискриминантной кривой и прямой $L_1 = 0$, для точек которой есть одно устойчивое состояние равновесия и два предельных цикла (область [2] на фиг. 2 и фиг. 4). При переходе из области $L_1 < 0$

в область $L_1 > 0$ при $\lambda > \lambda_3$ устойчивый цикл стягивается к фокусу ($\alpha_3 < 0$) и возникает структура без предельных циклов (область [3] на фиг. 2 и фиг. 4). Границами области без предельных циклов служит кусок дискриминантной кривой (для $0 \leq \lambda \leq \leq \lambda^{(0)}$), кривая двойных циклов (для $\lambda^{(0)} < \lambda < \lambda_3$) и прямая $L_1 = 0$ (для $\lambda > \lambda_3$).

5. Разбиение пространства параметров. Разбиение пространства параметров на области различной качественной структуры по обе стороны линии симметричных структур $L_0 = 0$ приведено на фиг. 4. Соответствующие различным областям грубые структуры разбиения фазового пространства (обозначенные теми же номерами) представлены на фиг. 5. Жирными линиями изображены сепаратрисы и предельные циклы. Пунктиром — неустойчивые предельные циклы. Устойчивые состояния равновесия — темные точки, неустойчивые — светлые. На фиг. 4 штриховкой покрыта область существования трех предельных циклов.

Разбиение на фиг. 4 соответствует предположению, сделанному в п. 4.4 об отсутствии предельных циклов для структуры в точке $\lambda = 1$ дискриминантной кривой. Если предположение не выполняется, то кривая двойных циклов (пунктир на фиг. 4) будет пересекать дискриминантную кривую в точке $\lambda = \lambda^{(0)} < 1$, и на фиг. 4 будут отсутствовать области (2) и (3), соответствующие структурам (2) и (3) на фиг. 5.

Поступила 10 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Лисицкая И. Н. Исследование электрической цепи с нелинейным отрицательным сопротивлением при кусочно-линейной аппроксимации. Изв. вузов. Радиофизика, 1966, т. 9, № 5.
2. Ortel W. C. G. The monostable tunnel diode trigger circuit. Proc. IEEE, 1966, vol. 54, № 7, p. 936—946.
3. Mizushima S. Triggered operations of tunnel diode oscillators and pulse generators. IEEE J. Solid-State Circuits, 1967, vol. SC-2, No. 3, p. 73—81.
4. Сидоров А. С. Теория и проектирование нелинейных импульсных схем на туннельных диодах. М., «Сов. радио», 1971.
5. Казакевич В. В. О помпаже в компрессорах. Докл. АН СССР, 1957, т. 115, № 4.
6. Баутин А. Н. Качественное исследование одной кусочно-линейной системы. ПММ, 1974, т. 38, вып. 4.
7. Серебрякова Н. Н. О поведении динамической системы с одной степенью свободы вблизи тех точек границы области устойчивости, где «безопасная» граница переходит в «опасную». Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 2.
8. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., «Наука», 1967.