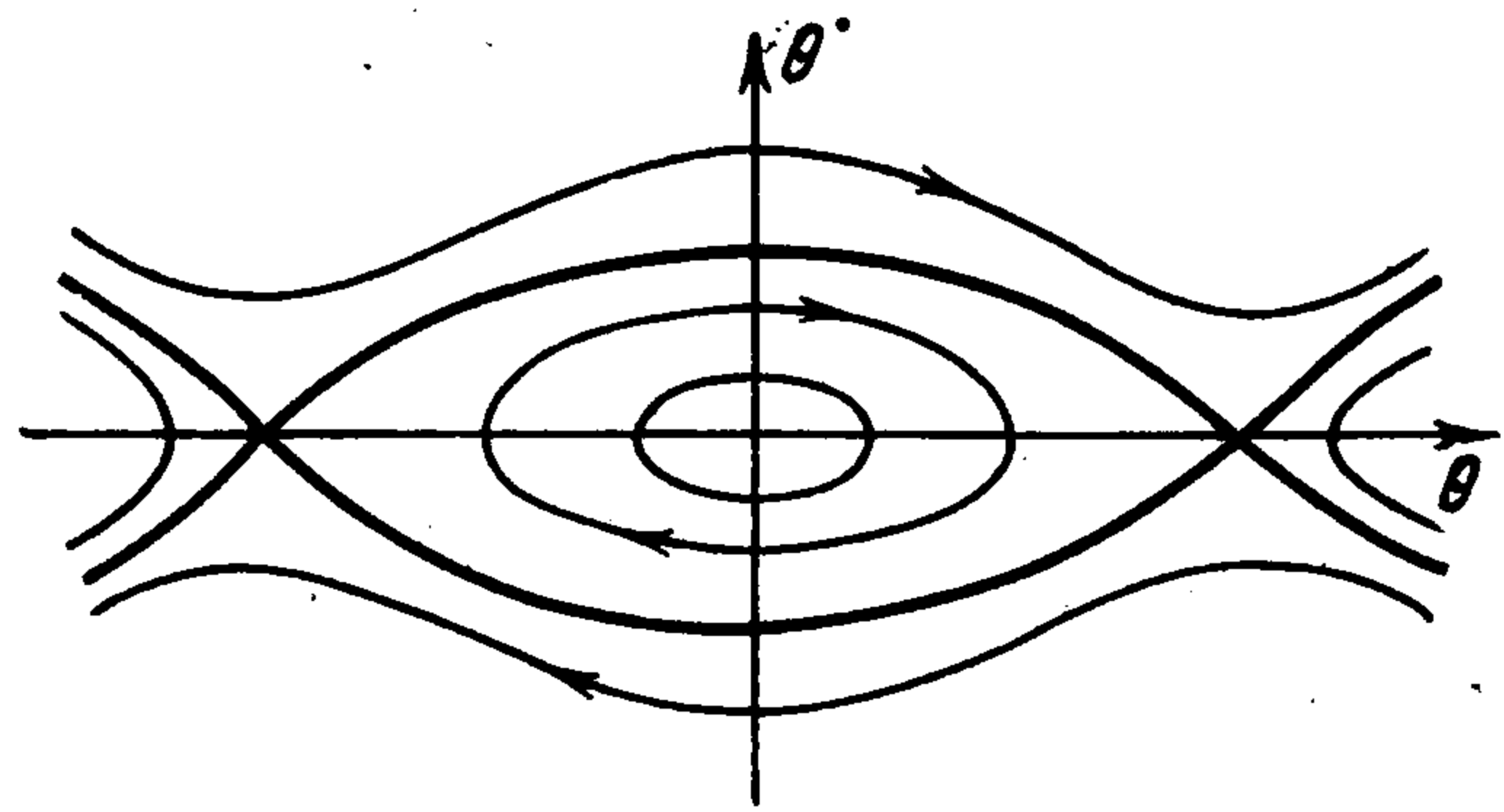


**ПРОХОЖДЕНИЕ ЧЕРЕЗ СЕПАРАТРИСУ
В РЕЗОНАНСНОЙ ЗАДАЧЕ
С МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИМСЯ ПАРАМЕТРОМ**

А. И. Нейштадт

(Москва)

В связи с попытками эволюционного объяснения резонансов в системе спутников Сатурна рассматривается одна модельная задача [1, 2] об эволюции в гамильтоновой системе с одной степенью свободы и гамильтонианом, зависящим явно от «медленного времени» δt . В ходе эволюции точка на фазовой плоскости пересекает сепаратрису невозмущенной задачи, и при $\delta \rightarrow 0$ детерминированное описание движения становится невозможным. В работе обсуждаются различные понятия вероятности и получены формулы для эффективного вычисления этой величины. Предлагается и обосновывается схема анализа задачи методом усреднения, позволяющим рассматривать движение точки и при переходе через сепаратрису. Аналогичным образом рассматривается задача об эволюции движения маятника с медленно изменяющейся частотой и малым внешним моментом.



Фиг. 1

Некоторые аспекты проблемы изучения поведения динамической системы при ее прохождении через сепаратрису невозмущенной задачи рассматривались в работах [3-5].

Основную задачу данной работы поясним на примере возмущенного движения математического маятника, которое описывается уравнением

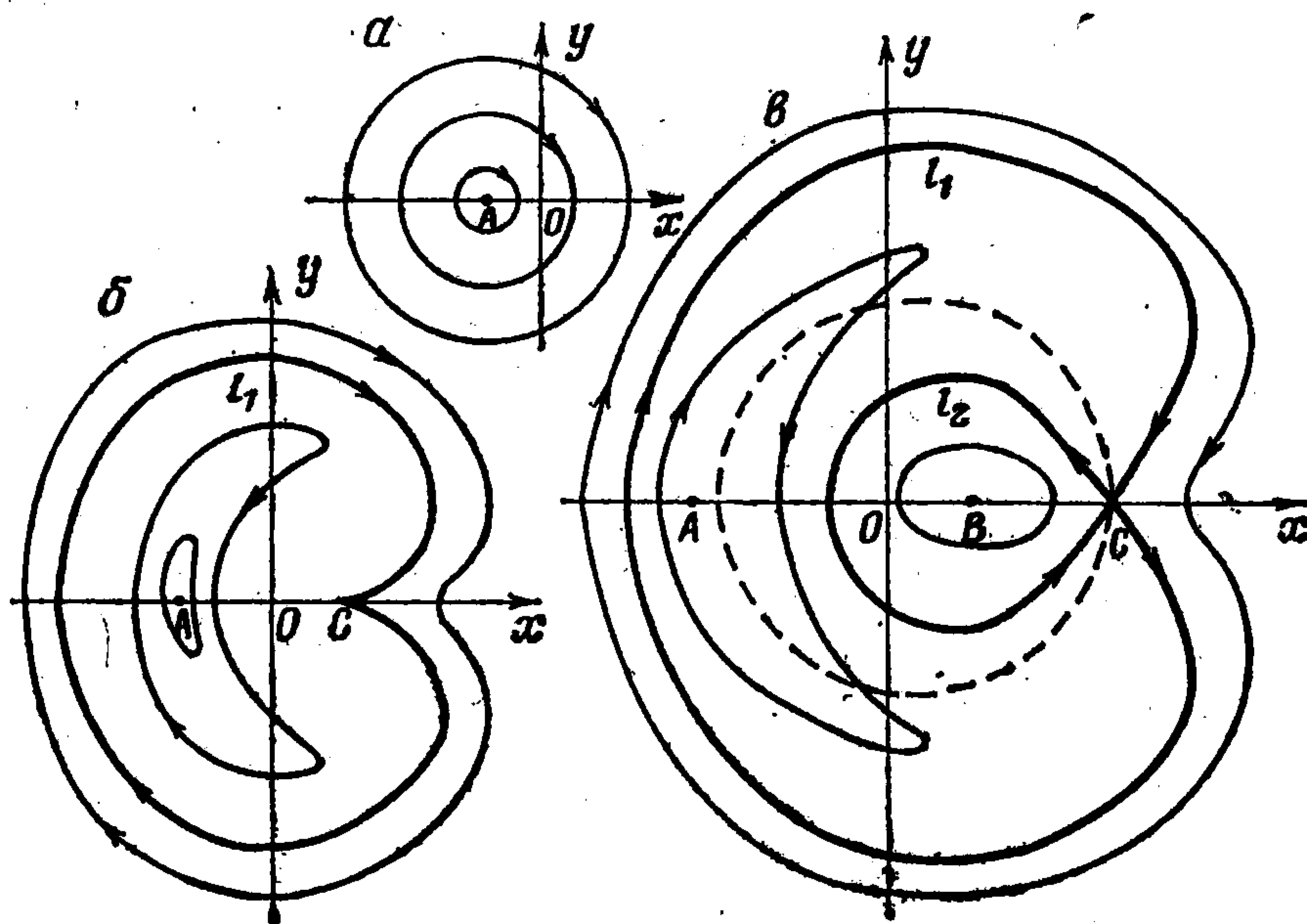
$$(0.1) \quad \theta'' + \omega^2 \sin \theta = -L$$

Будем предполагать, что внешний момент L не зависит от времени и удовлетворяет условиям $L > 0$, $L = O(\delta)$, а частота ω медленно растет со временем: $\omega' = O(\delta)$, где δ — достаточно малая величина. На фазовой плоскости невозмущенной задачи ($L = \omega' = 0$) есть области прямого вращения ($\theta' > 0$), обратного вращения ($\theta' < 0$), и колебательного движения, разделенные сепаратрисой (фиг. 1). В задаче (0.1) для маятника, первоначально вращавшегося в прямом направлении, возможны, вообще говоря, два исхода эволюции: через время порядка $1/\delta$ он может раскрутиться в обратном направлении, а может перейти в колебательный режим. Можно показать, что при $\delta \rightarrow 0$ тип финального движения можно изменить, например, вариацией начальных данных на величину порядка δ . Это связано с эффектами движения маятника при прохождении окрестности оскулирующей сепаратрисы. Детерминированное описание такой задачи при $\delta \rightarrow 0$ не имеет смысла. Можно говорить лишь о вероятности того или иного исхода.

В связи с такими задачами возникают вопросы о корректном определении вероятности и получении эффективного способа ее вычисления, модификации и обосновании применимости метода усреднения (с учетом возникающей здесь вероятности) для опи-

сания решений, пересекающих сепаратрису. Дело в том, что метод усреднения для описания эволюции на временах порядка $1/\delta$ обоснован и применяется обычно лишь при условии, что движущаяся точка находится вдали от сепаратрисы невозмущенной задачи. В то время, как одной из особенностей рассматриваемых задач является специальный интерес к движению около сепаратрисы.

1. Об одной модельной задаче. Попытки эволюционного объяснения наблюдаемых резонансных соотношений в системе спутников Сатурна



Фиг. 2

приводят к рассмотрению модельной задачи [1,2], определяемой гамильтонианом

$$(1.1) \quad F = 4\Gamma^2 - 2\lambda\Gamma + \mu \sqrt{2\Gamma} \cos \varphi$$

Здесь $\Gamma > 0$, и φ — сопряженные канонические переменные

$$(1.2) \quad \Gamma' = \partial F / \partial \varphi, \quad \varphi' = -\partial F / \partial \Gamma$$

$\mu > 0$ — постоянный параметр, λ — функция времени, скорость изменения которой $\lambda' = \delta$ предполагается постоянной, положительной и малой: $0 < \delta \ll 1$

Наряду с Γ и φ удобно пользоваться каноническими переменными x и y , в которых гамильтониан F имеет вид

$$(1.3) \quad F = F(x, y, \lambda) = (x^2 + y^2)^2 - \lambda(x^2 + y^2) + \mu x$$

$$(x = \sqrt{2\Gamma} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{2\Gamma} \sin \varphi)$$

Если x и y выбрать в качестве прямоугольных координат на фазовой плоскости, то $e = \sqrt{2\Gamma}$ и φ будут полярными координатами.

2. Фазовые траектории невозмущенной задачи. Так как $\delta \ll 1$, предварительно рассмотрим задачу при фиксированном λ [1]. Поведение траекторий в плоскости xy в зависимости от значения λ представлено на фиг. 2, а, б, в. При $\lambda < \lambda_* = 1,5 \mu^{2/3}$ (λ_* — особое «критическое» значение λ) в плоскости xy (фиг. 2, а) существует особая точка A типа центр, и все траектории охватывают эту точку. При $\lambda > \lambda_*$ (фиг. 2, б) плоскость xy сепаратрисами l_1 и l_2 разбивается на три области: G_1 , G_{12} , G_2 . Внутри области G_{12} содержится особая точка A типа центр, а внутри области

G_2 особая точка B тоже типа центр. Обе сепаратрисы начинаются и оканчиваются в особой точке C типа седло. На фиг. 2, б показан промежуточный случай $\lambda = \lambda_*$.

Точка C имеет координаты $(x_C, 0)$, где $x_C = x_C(\lambda)$ — наибольший корень уравнения равновесия

$$(2.1) \quad \partial F(x, 0, \lambda) / \partial x = 4x^3 - 2\lambda x + \mu = 0$$

При $\lambda \geq \lambda_*$ введем $F_C = F_C(\lambda) = F(x_C, 0, \lambda)$ — значение гамильтониана F в точке C и функцию $H(x, y, \lambda) = F(x, y, \lambda) - F_C(\lambda)$. Область G_{12} задается соотношением $H < 0$, области G_1 и G_2 — соотношением $H > 0$. На сепаратрисах $H = 0$.

3. Качественное описание движения. Вернемся к задаче с $\lambda^* = \delta > 0$. При $\lambda \geq \lambda_*$ с помощью (2.1) снова введем C — особую точку гамильтониана и, согласно уравнению $H = 0$, кривые l_1 и l_2 , за которыми сохраним название сепаратрис. Сепаратрисы осуществляют разбиение фазовой плоскости на области G_1, G_{12}, G_2 . Пусть G — область, заключенная внутри l_1 . На временах порядка $1/\delta$ (изменение λ порядка единицы) происходит как значительная эволюция движения, так и деформация областей разбиения. В результате этого точка может пересечь сепаратрису и, покинув одну область, продолжить свою эволюцию в другой. Именно такой процесс захвата и будет рассмотрен.

Относительно поведения решений в рассматриваемой задаче сформулируем ряд утверждений, имеющих асимптотический смысл, т. е. выполненных при достаточно малых δ . Доказательства этих утверждений из-за громоздкости здесь приведены не будут. Текст, следующий за утверждением, имеет целью пояснить его смысл и идею доказательства.

Будем обозначать $(x(t), y(t))$ движущуюся в соответствии с (1.2) точку фазовой плоскости. Без ограничения общности можно считать, что в начальный момент времени $t = 0$, $\lambda = \lambda_*$. При этом начальная точка $(x(0), y(0))$ может находиться либо внутри l_1 (и тогда $H_0 = H(x(0), y(0), \lambda_*) < 0$), либо вне l_1 (и тогда $H_0 > 0$).

Утверждение 1. Для любого $k > \lambda_*$ существуют положительные постоянные δ_0, k_1 , такие, что если $\delta < \delta_0$ и $H_0 < -k_1\delta^{1/2}$, то $(x(t), y(t)) \in G_{12}$ по крайней мере пока $\lambda < k$.

Таким образом, точки, лежащие при $\lambda = \lambda_*$ (фиг. 2, б) внутри l_1 за исключением, быть может, точек из прилегающего к l_1 узкого пояса, выделяемого условием $-k_1\delta^{1/2} \leq H_0 < 0$, остаются в G_{12} по крайней мере на временах порядка $1/\delta$.

Замечание. Утверждение, что точки, находящиеся при $\lambda = \lambda_*$ внутри l_1 , остаются в G_{12} , было высказано в [1], где этот случай назван «автоматическим захватом». Однако это утверждение в [1] никак не аргументировано.

Утверждение 2. Если $H_0 > 0$, то существует момент времени t_1 , в который точка попадает на l_1 ; при $t > t_1$ точка будет находиться в области G . Для достаточно малых δ момент t_1 оценивается как $t_1 < k_2/\delta$, где $k_2 > 0$ — постоянная, зависящая от начальных условий. Если, кроме того, $H_0 > k_3\delta$, где $k_3 > 0$ — постоянная, то точка при $t > 0$ когда-то в последний раз попадет на луч Cx перед уходом в G .

Для доказательства продифференцируем H в силу уравнений движения. Получим, $((\partial F / \partial x)_C = 0$, так как C — особая точка F)

$$\begin{aligned} H^* &= \delta \partial H / \partial \lambda = \delta (\partial F / \partial \lambda - dF_C / d\lambda) \\ \frac{dF_C}{d\lambda} &= \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \right)_C + \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_C \frac{dx_C}{d\lambda} = \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda} \right)_C \\ H^* &= \delta [\partial F / \partial \lambda - (\partial F / \partial \lambda)_C] = -\delta (e^2 - e_C^2) \end{aligned}$$

Лемма. Окружность $e = e_C$ лежит (за исключением точки C) в области G_{12} (на фиг. 2, в эта окружность изображена пунктиром).

Следствие. В G_1 и на l_1 выполнено $e > e_C$, в G_2 и на l_2 выполнено $e < e_C$.

Поэтому в G_1 вдоль движения $H^* < 0$ и при некотором $t = t_1 < k_2 / \delta$ (см. п. 7) становится $H = 0$, т. е. точка выходит на l_1 . При $t > t_1$ точка будет находиться в G .

Так как в G_1 величина φ' не обращается в нуль, то точка приближается к l_1 по спирали. При $H_0 > k_3 \delta$ точка заведомо успеет сделать в G_1 полный оборот. Для таких точек определено значение H при пересечении луча Cx на последнем обороте перед уходом в G .

Теорема 1. Пусть при некотором $\lambda = \Lambda > \lambda_*$ точка находится на луче Cx . Тогда для достаточно малых δ ($\delta < \delta_0$, $\delta_0 > 0$ зависит от Λ) можно указать $\alpha_1'' > \alpha_1' > \alpha_2'' > \alpha_2' > \alpha_3'' > 0$, такие, что

1) Если в этот момент $H \in d = (\alpha_1'', \infty)$, точка сделает полный оборот в G_1 и выйдет на Cx .

2) Если $H \in d_1 = (0, \alpha_1')$, точка пересечет l_1 , не выходя больше на Cx ; при этом 2а) если $H \in d_2 = (\alpha_2'', \alpha_1')$, точка, не достигнув полуокружности $e = e_C$, $y < 0$ выйдет на l_2 и в дальнейшем будет находиться в G_2 , 2б) если $H \in d_{12} = (\alpha_3'', \alpha_2')$, точка выйдет на полуокружность $e = e_C$, $y < 0$ и для любого $k > \Lambda$ при достаточно малом $\delta_0 = \delta_0(\Lambda, k)$ при дальнейшем движении остается в G_{12} по крайней мере пока $\lambda < k$.

3) При отправлении с одного из интервалов d, d_1, d_2, d_{12} точка выходит на соответствующую линию (луч Cx, l_1, l_2 или $\{e = e_C; y < 0\}$ при $\lambda < \Lambda + k_4 \delta |\ln \delta|$, $k_4 > 0$ — постоянная).

4) Для α_i', α_i'' справедливы оценки

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \alpha_1'' - \alpha_1' &= \alpha_2'' - \alpha_2' = k_5 \delta^{3/2}, \quad \alpha_3'' = k_6 \delta^2 \\ (\alpha_1' + \alpha_1'') / 2 &= \delta I_1(\Lambda), \quad (\alpha_2' + \alpha_2'') / 2 = \delta I_{12}(\Lambda) \end{aligned}$$

$$(3.2) \quad \begin{aligned} I_1(\lambda) &= - \oint_{l_1} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right) dt, \quad I_2(\lambda) = \oint_{l_2} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right) dt \\ I_{12}(\lambda) &= I_1(\lambda) - I_2(\lambda) = \oint_{l_1 \cup l_2} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right) dt \end{aligned}$$

Здесь k_5 и k_6 — положительные постоянные, интегралы (3.2) берутся по сепаратрисам невозмущенной задачи. Все постоянные (δ_0 и k_i) можно выбрать не зависящими от Λ , удовлетворяющего неравенству $\lambda_* < \gamma < \Lambda < k$ при произвольных γ и k .

Теорема 1 показывает, что точки, отправляющиеся с интервала d , делают еще оборот в G_1 , с интервала d_2 захватываются в G_2 , интервала d_{12} захватываются в G_{12} . «Пропу-

ценные» здесь сегменты

$$(3.3) \quad [0, \alpha_3''], [\alpha_2', \alpha_2''], [\alpha_1', \alpha_1'']$$

имеют общую длину $O(\delta^{3/2})$, а весь интервал $(0, \alpha_1'')$ — длину $O(\delta)$.

Техника доказательства теоремы 1 основана на оценках интегралов вдоль неизвестных кривых, близких к сепаратрисам, с помощью интегралов (3.2) вдоль сепаратрис невозмущенной задачи. Пусть точка начинает двигаться при $\lambda = \Lambda$ с луча Cx , имея $H = H(\Lambda) = O(\delta)$. При $\Lambda \leq \lambda \leq \Lambda_1$ эта точка описывает кривую l_1' , близкую к l_1 , и либо снова выходит на Cx , либо пересекает l_1 и выходит на полуокружность $e = e_C$, $y > 0$. При этом

$$H(\Lambda_1) = H(\Lambda) + \delta \int_{l_1'} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right) dt = H(\Lambda) - \delta I_1(\Lambda) + O(\delta^{3/2})$$

Если $H(\Lambda) \in d$, то $H(\Lambda_1) > 0$, и значит, при $\lambda = \Lambda_1$ точка лежит в G_1 , т. е. сделан полный оборот. Если $H(\Lambda) \in d_1$, то $H(\Lambda_1) < 0$, т. е. при $\lambda = \Lambda_1$ точка лежит в G_{12} . В этом случае точка при $\Lambda_1 \leq \lambda \leq \Lambda_2$ описывает кривую, близкую к l_2 , и $H(\Lambda_2) = H(\Lambda) - \delta [I_1(\Lambda) - I_2(\Lambda)] + O(\delta^{3/2})$.

Если $H(\Lambda) \in d_2$, то $H(\Lambda_2) > 0$, точка попадает в G_2 и там остается. Если $H(\Lambda) \in d_{12}$, то $H(\Lambda_2) < 0$, и точка при $\lambda = \Lambda_2$ лежит на полуокружности $e = e_C$, $y < 0$.

Интегралы (3.2) являются несобственными (движение по сепаратрисе требует бесконечного времени), но сходятся. Их можно вычислить.

Лемма.

$$(3.4) \quad I_1(\lambda) = (2\pi - \Theta) / 2, \quad I_2(\lambda) = \Theta / 2 \\ \Theta = \arccos [(\lambda / 2x_C^2) - 2]$$

Здесь Θ — угол, образуемый касательными к l_1 в точке C , $0 \leq \Theta < \pi$, $x_C = x_C(\lambda)$ — наибольший корень кубического уравнения (2.1).

Из (3.4) видно, в частности, что $I_1 > I_2$ и, следовательно, при достаточно малых δ интервал d_{12} не пуст.

Для точек с $H(\Lambda) \in d_{12}$ при движении в G_{12} , пока $H = O(\delta)$, $\Lambda_2 \leq \lambda \leq k$, на каждом обороте H получает приращение $\Delta H = -\delta [I_{12} + O(\delta^{1/2})] < 0$. Поэтому точка погружается в G_{12} , уходит от сепаратрисы и не сможет снова выйти на нее.

Для доказательства теоремы существенно, чтобы точка не подходила «слишком» близко к C . Точки, не удовлетворяющие этому условию, принадлежат сегментам (3.3) и исключаются из рассмотрения.

Замечание. Доказательство утверждения 1 также основано на свойстве $I_1 > I_2$.

Пусть в начальный момент $(x(0), y(0)) \in G_{12}$. Тогда в силу утверждения 2 точка $(x(t), y(t))$ при некотором $\lambda = \Lambda$ в последний раз пересечет луч Cx .

Определение. Будем говорить, что точка $(x(t), y(t))$ захватилась в G_{12} , если при $\lambda = \Lambda + 1$ она лежит в G_{12} . В противном случае точка захватилась в G_2 .

Из теоремы 1 следует, что если δ достаточно мало, то точки, прошедшие через интервал d_{12} , захватятся в G_{12} , а прошедшие через d_2 — в G_2 .

4. Вероятность захвата и ее вычисление. Из теоремы 1 следует, что изменение значения H перед последним оборотом на малую величину порядка δ может вести к качественному изменению характера движения. Поэтому если начальные условия задаются с точностью ε ($\delta \ll \varepsilon \ll 1$), нель-

зя однозначно указать, в какой из областей G_2 , G_{12} будет происходить эволюция после пересечения сепаратрисы. При асимптотическом рассмотрении задачи ($\delta \rightarrow 0$) целесообразно рассматривать захват в ту или иную область как случайное событие и ввести его вероятность. Такой подход применялся в задаче о захвате в колебания маятника, возмущенного малым диссипативным моментом¹ [3] и в задаче о движении по интегральной поверхности, имеющей седловую точку [4] (последняя задача близка к нашей). В этих работах были вычислены соответствующие вероятности.

В рассматриваемой задаче понятие о случайном захвате было введено в [1]. Из текста работы [1] можно понять, хотя четко это не формулируется, что вероятностью захвата в G_{12} там (в терминах данной работы) называется отношение H_{12} — верхней грани значений H на луче Cx , при которых точка захватится в G_{12} , к H_1 — верхней грани значений H на луче Cx , при которых точка не сможет сделать полного оборота в G_1 . Вычисление этих величин сводится к краевой задаче. Эта задача в [1] решалась путем численного интегрирования уравнений возмущенного движения (1.2).

Теорема 1 дает аналитические оценки величин H_{12} и H_1 :

$$(4.1) \quad |H_{12} - \delta I_{12}| < 0.5k_5\delta^{3/2}, \quad |H_1 - \delta I_1| < 0.5k_5\delta^{3/2}.$$

Если уточняя понятие вероятности захвата в G_{12} , введенное в [1], определить вероятность как

$$(4.2) \quad P = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{12} / H_1$$

то неравенства (4.1) дают

$$(4.3) \quad P = I_{12} / I_1 = (I_1 - I_2) / I_1$$

Здесь $P = P(\lambda)$ и формулы (4.3), (3.4) позволяют вычислить P , если задано Λ — значение параметра λ , при котором точка выходит на последний оборот в G_1 .

В [1] рассмотрен резонанс, в окрестности которого движение пары спутников описывается гамильтонианом (1.1) и показано, что захват изображающей точки в G_{12} означает захват спутников в резонанс, а захват в G_2 — уход от резонанса. Существует предположение, что пара спутников Сатурна Энцелад — Диона некогда пересекла окрестность рассматриваемого резонанса, не захватившись, т. е. изображающая ее точка на фазовой плоскости подошла к сепаратрисе и ушла в G_2 . Для гипотетических параметров подхода к сепаратрисе в [1] с помощью численного интегрирования получена вероятность этого события (захвата в G_2): $p = 0.81$. Для тех же параметров формула (4.3) дает $p = 1 - P = 0.82$. Согласование представляется хорошим, если учесть, что в рассматриваемой задаче $\delta^{1/2} \sim 10^{-2}$.

5. Другое определение вероятности. Для дальнейшего полезно дать определение вероятности в терминах фазового объема. Для гамильтоновой системы фазовый объем — площадь — сохраняется. Пусть при изменении λ на интервале $(\Lambda, \Lambda + \Delta\lambda)$ в G входит объем ΔV_1 . Пусть доля ΔV_{12} этого объема захватится в G_{12} . Определим вероятность захвата в G_{12} как

$$(5.1) \quad R(\Lambda) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta V_{12} / \Delta V_1$$

¹ Сходная задача рассмотрена в диссертации Б. В. Чирикова «Нелинейные колебания в системах, близких к консервативным», Новосибирск, 1959.

(Интуитивно, здесь $\Delta\lambda$ — неточность знания момента подхода к сепаратрисе, $\Delta\lambda \gg \delta$, поэтому внешний предел берется по $\Delta\lambda$.)

Лемма. Определения (5.1) и (4.2) эквивалентны: $R(\Lambda) = P(\Lambda)$.

Доказательство можно провести, подсчитывая потоки фазового объема через интервалы d_1 и d_{12} и оценивая их близость к ΔV_1 и ΔV_{12} соответственно. Другой способ — непосредственное использование (5.1) для подсчета вероятности. Для этого введем $S_1(\lambda) = \text{mes } G$, $S_\nu(\lambda) = \text{mes } G_\nu$ ($\nu = 1, 12$), где $\text{mes } G_\nu$ — площадь на фазовой плоскости. Используя несжимаемость, можно показать

$$\Delta V_1 = S_1(\Lambda + \Delta\lambda) - S_1(\Lambda)$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \Delta V_{12} = S_{12}(\Lambda + \Delta\lambda) - S_{12}(\Lambda)$$

$$R = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{S_{12}(\Lambda + \Delta\lambda) - S_{12}(\Lambda)}{S_1(\Lambda + \Delta\lambda) - S_1(\Lambda)} = \frac{dS_{12}/d\lambda}{dS_1/d\lambda}$$

Используя формулы

$$(5.2) \quad dS_\nu / d\lambda = I_\nu, \quad \nu = 1, 2, 12$$

получим $R = I_{12} / I_1$, что и требовалось.

Формулы (5.2) доказывает следующая выкладка (которую проведем для $\nu = 1$). Пусть $\Gamma_1 = \Gamma_1(\varphi, \lambda)$ — уравнение l_1 . Тогда $H(\Gamma_1, \varphi, \lambda) = 0$, $\partial\Gamma_1 / \partial\lambda = -(\partial H / \partial\lambda) / (\partial H / \partial\Gamma)$

$$S_1 = \int_0^{2\pi} \Gamma_1 d\varphi, \quad \frac{dS_1}{d\lambda} = - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial H / \partial\lambda}{\partial H / \partial\Gamma} \right) d\varphi = - \int_{2\pi}^0 \left(\frac{\partial H / \partial\lambda}{\varphi} \right) dt = - \oint_{l_1} \left(\frac{\partial H}{\partial\lambda} \right) dt = I_1$$

6. Схема приближенного рассмотрения задачи. Если движение происходит вдали от сепаратрис, для приближенного описания изменения «медленной» переменной (в рассматриваемой задаче — функции H) обоснован и применяется метод усреднения вдоль траекторий невозмущенной задачи [6]. В п.7 сформулированы утверждения, позволяющие использовать этот метод в несколько модифицированном виде и для решений, пересекающих сепаратрису. Ниже приводится схема рассмотрения задачи, к которой приводит эта модификация.

В каждой из областей G_ν ($\nu = 1, 2, 12$) рассмотрим уравнение («осредненное уравнение»)

$$(6.1) \quad \frac{dh}{d\lambda} = \frac{1}{T} \oint \frac{\partial H}{\partial\lambda} dt$$

где T — период в невозмущенной задаче, интегралы берутся вдоль траектории невозмущенной задачи $H(x, y, \lambda) = h \neq 0$ при $\lambda = \text{const}$. Фактически (6.1) определяет три различных уравнения в зависимости от выбранной области разбиения. При $h = 0$ (т. е. на границах областей — сепаратрисах) положим $dh/d\lambda = 0$. При этом правые части останутся непрерывными (но не дифференцируемыми).

Пусть $(x(0), y(0)) \in G_1$; тогда $H(x(0), y(0), \lambda_*) = H_0 > 0$. Рассмотрим уравнение (6.1) в G_1 и его решение $h = h_1(\lambda)$. При некотором $\lambda = \Lambda$ станет $h_1(\Lambda) = 0$. В этот момент возникает своеобразное ветвление. Исполь-

зую уравнение (6.1) в области G_2 с начальным условием $h = 0$ при $\lambda = \Lambda$, получим решение $h = h_2(\lambda)$, погружающееся в G_2 ($h_2(\lambda)$ возрастает). Используя (6.1) в G_{12} с тем же начальным условием, получим решение $h = h_{12}(\lambda)$, погружающееся в G_{12} ($h_{12}(\lambda)$ убывает). Типичное поведение $h(\lambda)$ изображено на фиг. 3, а.

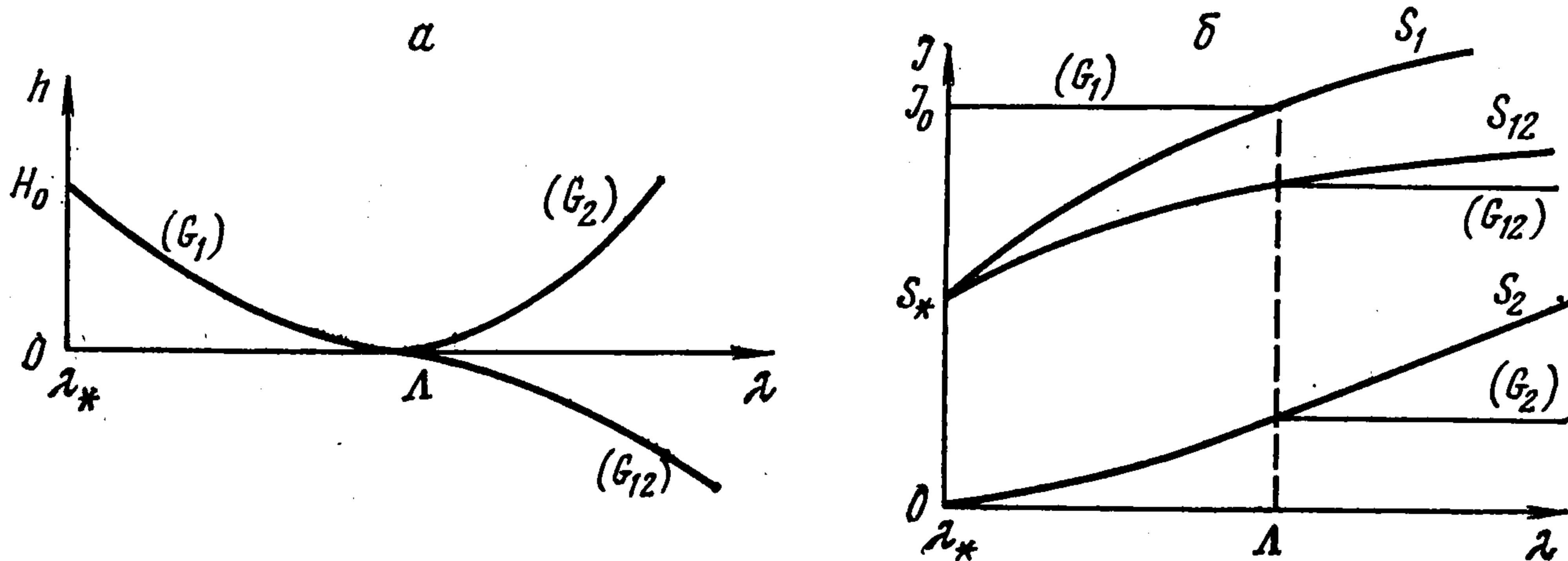
1°. Если после пересечения сепаратрисы эволюция происходит в G_v ($v = 2, 12$), то формула

$$(6.2) \quad h(\lambda) = \begin{cases} h_1(\lambda), & \lambda \leq \Lambda \\ h_v(\lambda), & \lambda > \Lambda \end{cases}$$

описывает изменение H с точностью порядка $\delta |\ln \delta|$ на временах порядка $1/\delta$.

2°. Движение в G_{12} реализуется с вероятностью $P(\Lambda) = I_{12}(\Lambda) / I_1(\Lambda)$, а в G_2 — с вероятностью $1 - P(\Lambda)$.

Эти утверждения будут обоснованы в п.7,8. Таким образом, схема сводится к использованию осредненного уравнения (6.1) в G_1 вплоть до сепаратрисы,



Фиг. 3

ратрисы, подсчету вероятности захвата на сепаратрисе и дальнейшему использованию (6.1) в G_{12} или (и) G_2 .

Эту же схему можно изложить иначе, используя адиабатический инвариант. Рассмотрим в каждой из областей G_v ($v = 1, 2, 12$) функцию $J = J(h, \lambda)$ — площадь, заключенную внутри траектории невозмущенной задачи с $H = h$ в момент «медленного времени» λ . Можно проверить [6], что эта функция является интегралом уравнения (6.1), рассматриваемого в той же области. Этот интеграл называют адиабатическим инвариантом. Тогда:

Момент Λ определяется из уравнения (трансцендентного) $J_0 = J(H_0, \lambda_*) = S_1(\Lambda)$; оно имеет единственный корень, так как $J_0 > S_* = S_1(\lambda_*) = \pi\lambda_*$ и $dS_1/d\lambda = I_1 > \pi/2$.

При $\lambda \leq \Lambda$ движение приближенно определяется соотношением $J(H, \lambda) = J_0$.

При $\lambda > \Lambda$ движение с вероятностью $P(\Lambda)$ описывается соотношением $J(H, \lambda) = S_{12}(\Lambda)$; так как $dS_{12}/d\lambda = I_{12} > 0$, траектория погружается в G_{12} . С вероятностью $1 - P(\Lambda)$ движение описывается соотношением $J(H, \lambda) = S_2(\Lambda)$; так как $dS_2/d\lambda = I_2 > 0$, траектория погружается в G_2 .

Графически эта схема представлена на фиг. 3, б.

Для описания движения с начальным значением $\lambda = \lambda_0 \neq \lambda_*$ рассмотрим площадь $W = W(f, \lambda)$, заключенную внутри траектории с $F = f$. При $\lambda \leq \lambda_*$ эта функция вводится во всей плоскости, при $\lambda > \lambda_*$ — в каждой из областей разбиения и $W(F, \lambda) = J(F - F_c, \lambda)$.³ Пусть при $\lambda = \lambda_0$ задано $F = F_0, W = W_0 = W(F_0, \lambda_0)$. Если $W_0 < S_*$, то осуществляется «автоматический захват», решение не пересекает сепаратрису и применим метод осреднения в обычной форме. Для описания движения можно использовать формулу $W(F, \lambda) = W_0$. Если $W_0 > S_*$, то применима прежняя схема с заменой J на W . Исключительный случай $W_0 = S_*$ детально не рассматривался; оценки точности здесь будут другими.

7. Обоснование процедуры метода усреднения. Напомним прежде всего, что дает в рассматриваемой задаче метод усреднения в обычной формулировке. Пусть движение начинается в G_1 и $H(\lambda) = H(x(t), y(t), \lambda)$, $(t = (\lambda - \lambda_*) / \delta)$ — решение точной задачи (1.2), а $h_1(\lambda)$ — решение уравнения (6.1) в G_1 с одинаковыми начальными значениями: $\bar{H}(\lambda_*) = h_1(\lambda_*) = H_0$.

Теорема [6]. Для любого $k_1 > 0$ существуют $\delta_0 > 0, k_2 > 0$, такие, что при $\delta < \delta_0$ пока $h_1(\lambda) > k_1^{-1}$ будет $|H(\lambda) - h_1(\lambda)| < k_2\delta$.

Ограничение $h_1(\lambda) > k_1^{-1} > 0$ не позволяет пользоваться методом вблизи сепаратрисы!

Оказалось, что в рассматриваемой задаче, и вообще в задачах подобного типа, справедлива теорема, позволяющая пользоваться методом усреднения вплоть до сепаратрисы.

Теорема. 2. Существуют положительные постоянные δ_0, k_1, k_2 , зависящие от H_0 , такие, что при $\delta < \delta_0$ пока $h_1(\lambda) > k_1\delta$ будет

$$(7.1) \quad |H(\lambda) - h_1(\lambda)| < k_2\delta$$

Таким образом, осредненное уравнение можно использовать вплоть до δ -окрестности сепаратрисы.

Для доказательства рассмотрим движение точки в G_1 по оборотам. Пусть в конце n -го оборота $H = H_n, \lambda = \lambda_n, J = J_n, t = t_n$.

Пока выполнены условия

$$(7.2) \quad H > \delta, \quad h_1(\lambda) > \delta$$

справедливы следующие оценки (k_i — положительные постоянные):

1°. Для любого n выполнено $H_n - H_{n+1} > k_3^{-1}\delta$. Поэтому

$$(7.3) \quad H_{n-q} > H_n + qk_3^{-1}\delta, \quad n < k_3(H_0 - H_n) / \delta$$

2°. На n -м обороте

$$(7.4) \quad |H - H_n| < k_4\delta, \quad |\lambda - \lambda_n| < k_5\delta (1 + |\ln H_n|) \\ |J - J_n| < k_6\delta (1 + |\ln H_n|)$$

$$3°. \quad J_n - J_{n-1} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{dJ}{dt} dt - \oint \frac{dJ}{dt} dt$$

где последний интеграл берется вдоль траектории невозмущенной задачи $H = H_n, \lambda = \lambda_n$; он тождественно равен нулю, так как J — интеграл осредненного уравнения. Оценивая правую часть этого соотношения с по-

мощью (7.4), получим

$$(7.5) \quad |J_n - J_{n-1}| < k_7 \delta^2 H_n^{-1}$$

4°. Используя (7.5), (7.3), (7.2), получим

$$(7.6) \quad |J_m - J_0| < \sum_{n=1}^m |J_n - J_{n-1}| < k_7 \delta^2 \sum_{n=1}^m H_n^{-1} = \\ = k_7 \delta^2 \sum_{q=0}^{m-1} H_{m-q}^{-1} < k_7 \delta^2 \sum_{q=0}^{m-1} (H_m + qk_3^{-1}\delta)^{-1} < k_7 \delta^2 \times \\ \times \left[H_m^{-1} + \int_0^m (H_m + qk_3^{-1}\delta) dq \right] < k_7 \delta \left[1 + k_3 \ln \frac{H_m + mk_3^{-1}\delta}{H_m} \right] < \\ < k_7 \delta \left[1 + k_3 \ln \frac{H_0}{H_m} \right] < k_8 \delta (1 + |\ln H_m|)$$

5°. Из (7.4), (7.6), (7.2) следует, что на m -м обороте

$$|J - J_0| < |J - J_m| + |J_m - J_0| < (k_6 + k_8)\delta (1 + |\ln H_m|) < k_9 \delta (1 + |\ln H(\lambda)|)$$

6°. Так как $J(h_1(\lambda), \lambda) = J_0$, то

$$|J(H(\lambda), \lambda) - J(h_1(\lambda), \lambda)| < k_9 \delta (1 + |\ln H(\lambda)|)$$

Используя это неравенство и (7.2), получим

$$(7.7) \quad |H(\lambda) - h_1(\lambda)| < k_2 \delta$$

Пока $h_1(\lambda) > (k_2 + 1)\delta = k_1\delta$, условия (7.2) не могут нарушиться, и можно гарантировать указанную оценку (7.7).

В областях G_{12} и G_2 справедливы аналогичные утверждения. Например, в G_{12} .

Теорема 2'. Пусть заданы постоянные $k > \Lambda' > \lambda_*$. Существуют положительные постоянные δ_0, k_{10}, k_{11} , такие, что при $\delta < \delta_0$ пока $\lambda < k$ справедлива оценка

$$(7.8) \quad |H(\lambda) - h_{12}'(\lambda)| < k_{10} \delta |\ln \delta|$$

где $H(\lambda)$ — решение точных уравнений, а $h_{12}'(\lambda)$ — решение осредненного уравнения с одинаковыми начальными значениями: $h_{12}'(\Lambda') = H(\Lambda') < -k_{11}\delta$.

Доказательство аналогично предыдущему, только вместо (7.6) получим $|J_m - J_0| < k_{12}\delta (1 + |\ln H(\Lambda')|) < k_{13}\delta |\ln \delta|$ и отсюда вместо (7.7) приходим к (7.8).

Следствие. Пусть U — замкнутая подобласть G_1 при $\lambda = \lambda_*$, $k > \lambda_*$ — постоянная. Существуют положительные постоянные δ_0, k_{10}, k_{11} , такие, что при $\delta < \delta_0$, $\lambda < k$ для точек, захватывающихся в G_v ($v = 2, 12$) оценка

$$(7.9) \quad |H(\lambda) - h(\lambda)| < k_{14} \delta |\ln \delta|$$

($h(\lambda)$ согласно (6.2)) выполнена, если $(x(0), y(0)) \in U \setminus u$, где $u \subset U$ — некоторое «исключительное» множество: $\text{mes } u < k_{15}\delta$.

Для доказательства введем $k_{16} > k_1 + k_{11}$ равномерно по $(x(0), y(0)) \in U$ и Λ' из некоторого интервала. Пусть, например, точка захватится в G_{12} . Обозначим для нее Λ_- и Λ_+ — значения λ , такие, что $H(\Lambda_-) = k_{16}\delta$, $H(\Lambda_+) = -k_{16}\delta$. Если k_{16} достаточно велико, то $\Lambda_- < \Lambda < \Lambda_+$ и

$$(7.10) \quad \Lambda_+ - \Lambda_- < k_1 \delta |\ln \delta|$$

для точек, проходящих «не слишком близко» от C (последнее гарантируется условием $(x(0), y(0)) \notin u$, где $\text{mes } u < k_{15}\delta$).

При $\lambda_* \leq \lambda \leq \Lambda_-$ оценка (7.9) следует из теоремы 2. При $\Lambda_- \leq \lambda \leq \Lambda_+$ выполнено $H(\lambda) = O(\delta)$, $h(\lambda) = O(\delta)$, так что (7.9) очевидна. При $\Lambda_+ \leq \lambda \leq k$ применима теорема 2'

$$|H(\lambda) - h_{12}'(\lambda)| < k_{10}\delta |\ln \delta|, \quad (h_{12}'(\Lambda_+) = -k_{16}\delta)$$

С помощью (7.10) получим

$$|h_{12}'(\lambda) - h(\lambda)| < k_{18}\delta |\ln \delta|$$

$$|H(\lambda) - h(\lambda)| < (k_{10} + k_{18})\delta |\ln \delta| = k_{14}\delta |\ln \delta|$$

что и требовалось.

Это следствие обосновывает утверждение 1° п. 6.

8. Определение вероятности по начальным условиям. Рассмотрим в пространстве (x, y, λ) точку $M(x_0, y_0, \lambda_*)$, для которой $H_0 = H(x_0, y_0, \lambda_*) > 0$. Пусть V — ее ε -окрестность. В V выделим подмножество V_{12} точек, которые захватятся в G_{12} .

Определение. Вероятностью захвата точки M в G_{12} называется

$$(8.1) \quad Q(M) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{mes } V_{12} / \text{mes } V$$

где $\text{mes } V$ — объем в пространстве (x, y, λ) . Это определение представляет собой формализацию обычного «физического» определения вероятности. Оно заимствовано с небольшой модификацией из [5].

Теорема 3. $Q(M) = P(\Lambda)$, где $P(\lambda)$, согласно (4.3) и Λ , определяется из уравнения $S_1(\Lambda) = J(H_0, \lambda_*)$.

Эта теорема обосновывает утверждение 2° п. 6. Доказательство получается объединением результатов п.5 и 7.

9. Влияние малых возмущений. Рассмотрим наряду с системой, определяемой гамильтонианом (1.3), близкую систему уравнений

$$(9.1) \quad \dot{x} = \partial F' / \partial y + \kappa \delta g_1, \quad \dot{y} = -\partial F' / \partial x + \kappa \delta g_2, \quad F' = F + \kappa F_1$$

где F_1, g_1, g_2 — гладкие и ограниченные функции x, y, λ ; $\kappa > 0$ — постоянная. Так же, как в п. 8, определим для системы (9.1) вероятность $Q_\kappa(M)$ захвата точки M в область G_{12} .

Теорема 4. Существуют $\kappa_0 > 0, k_1 > 0$, такие, что при $\kappa < \kappa_0$ вероятность $Q_\kappa(M)$ существует и

$$(9.2) \quad |Q_\kappa(M) - Q(M)| < k_1 \kappa$$

Доказательство громоздко; оно основано на том, что для системы (9.1) можно провести рассуждения, аналогичные п.3, 7, 8, и получить для Q_κ формулы типа теоремы 3. Оценки по этим формулам и приводят к (9.2).

В силу теоремы 4 вероятность мало меняется при малых возмущениях, которые всегда отбрасываются при выводе уравнений типа (1.2) (см. [1, 2]).

10. Задача о маятнике. Рассмотрим теперь задачу о маятнике (0.1). Примем $L = \delta\beta, \beta > 0 - \text{const}, \omega = \omega(\lambda), \omega' = d\omega/d\lambda > 0, \lambda^* = \delta,$

$0 < \delta \ll 1$. Запишем уравнение движения маятника

$$(10.1) \quad \theta'' + \omega^2 \sin \theta = -\delta\beta$$

Можно показать, что маятник, первоначально вращавшийся в прямом направлении, тормозится и с вероятностью

$$(10.2) \quad P = \begin{cases} 8\omega' / (4\omega' + \pi\beta), & \omega' < \pi\beta / 4 \\ 1, & \omega' \geq \pi\beta / 4 \end{cases}$$

захватывается в колебания. Здесь $\omega' = \omega'(\Lambda)$, где Λ — момент подхода к сепаратрисе.

В работе [7] уравнение (10.1) применялось для анализа эволюции орбит резонансных спутников Сатурна. Для пары спутников Мимас — Тетис в [1] с использованием такой модели численным интегрированием (10.1) получено значение вероятности захвата: $P = 0.04$. Для тех же параметров задачи формула (10.2) дает $P = 0.044$.

Для описания эволюции применима схема, аналогичная приведенной в п. 6. Введем гамильтониан невозмущенной задачи $H = (\theta'^2/2) - 2\omega^2 \cos^2(\theta/2)$; для вращений $H > 0$, для колебаний $H < 0$. При $H \geq 0$ введем

$$J(H, \lambda) = \int_0^{2\pi} |\theta'| d\theta = \frac{8\omega}{z} E(z), \quad z = \frac{2\omega}{\sqrt{2H + 4\omega^2}}$$

где $E(z)$ — полный эллиптический интеграл второго рода с модулем z . В силу осредненного уравнения в области прямого вращения $dJ/d\lambda = -2\pi\beta$, и при $\lambda_0 \leq \lambda \leq \Lambda$ эволюция описывается формулой $J(H, \lambda) = J(H_0, \lambda_0) - 2\pi\beta(\lambda - \lambda_0)$. Момент Λ определяется из условия $J(0, \Lambda) = S(\Lambda)/2$, где $S(\lambda) = 16\omega(\lambda)$ — площадь колебательной области на отрезке длины 2π . Поэтому $8\omega(\Lambda) + 2\pi\beta(\Lambda - \lambda_0) = J(H_0, \lambda_0)$.

Уход на обратное вращение происходит с вероятностью $1 - P(\Lambda)$. Если $1 - P(\Lambda) > 0$, то эволюция в случае ухода на обратное вращение определяется формулой $J(H, \lambda) = 2\pi\beta(\lambda - \Lambda) + 8\omega(\Lambda)$.

С вероятностью $P(\Lambda)$ происходит захват в колебательную область. Здесь введем

$$J(H, \lambda) = \oint |\theta'| d\theta = 16\omega [E(z) - (1 - z^2)K(z)]$$

где

$$z = \sqrt{1 + H/2\omega^2} \quad (H < 0)$$

$K(z)$ и $E(z)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно с модулем z . Формула $J(H, \lambda) = S(\Lambda) = 16\omega(\Lambda)$ описывает движение в колебательной области.

Автор благодарит М. Л. Лидова за постановку задачи и внимание к этой работе.

Поступила 8 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Sinclair A. T. On the origin of the commensurabilities amongst the satellites of Saturn. Month Notic Roy. Astron. Soc., 1972, vol. 160, № 2.
2. Greenberg R. J. Evolution of satellite resonances by tidal dissipation. Astron. J., 1973, vol. 78, № 4.
3. Goldreich P., Peale S. J. Spin-orbit coupling in the solar system. Astron J., 1966, vol. 71, № 6.
4. Лифшиц И. М., Слуцкий А. А., Набутовский В. М. О явлении «рассеяния» заряженных квазичастиц на особых точках в p -пространстве. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 3.
5. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике. Успехи матем. наук, 1963, т. 18, № 6.
6. Волосов В. М., Моргунов Б. И. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, 1971.
7. Allan R. R. Evolution of Mimas-Tethys commensurability. Astron J., 1969, vol. 74, № 3.