Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 531.31

СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ ВИБРАЦИОННЫХ СИСТЕМ С МАКСИМАЛЬНО СЖАТЫМ СПЕКТРОМ

В. Н. Митин, Л. И. Штейнвольф

(Харьков)

Излагается метод синтеза группы параметров дискретных вибрационных систем, обеспечивающий максимальное сжатие спектра собственных частот. Дается способ решения двух задач: 1) при заданной структуре и определенной части параметров найти значения остальных параметров так, чтобы наименьшая частота занимала заданное положение на числовой оси и отношение наибольшей частоты к наименьшей было минимальным; 2) для заданной вибрационной системы за счет оптимального варьирования определенной группы параметров получить систему с максимально сжатым спектром.

Рассматриваются дискретные вибрационные системы с m степенями свободы, амплитудные уравнения которых описываются обобщенным амплитудным уравнением [1] вида

$$D\mathbf{u}\mathbf{x} = \mu A\mathbf{x} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — вектор первых физических параметров, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ — вектор обобщенной формы колебаний, μ — собственное значение обобщенного амплитудного уравнения (квадрат обобщенной собственной частоты вибрационной системы), D — линейный оператор, переводящий произвольный k-мерный вектор $\mathbf{b}=(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ в диагональную k-го порядка: $D\mathbf{b} = \operatorname{diag}(b_1, b_2, \ldots, b_k)$, $A = \| A_{ij} \|_1^m$ — матрица, определяемая структурой вибрационной системы и вектором вторых физических параметров.

Предполагается, что матрица A обладает следующими свойствами:

1°. $A_{ij} = A_{ji}$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$

2°. $A_{ij} \geqslant 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, m$

3°. Существует такое целое k, что все элементы матрицы A^k строго положительны.

4°. $(A\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}) > 0$, где $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ — произвольный m-мерный вектор.

5°. Существует такой вектор знакоперемен [1]

$$\boldsymbol{\nu} = ((-1)^{p_1}, (-1)^{p_2}, \ldots, (-1)^{p_m})$$

где $(p_i)_1^m$ — некоторый набор целых чисел, что матрица $D\boldsymbol{\nu}A^{-1}D\boldsymbol{\nu}$ обладает перечисленными выше свойствами матрицы A.

Используя теорему Перрона [2], можно показать, что наименьшее μ_1 и наибольшее μ_m— собственные значения уравнения (1) являются положительными и простыми корнями характеристического уравнения $| D\mathbf{u} - \mu A | = 0$, а соответствующие им собственные векторы $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_m$ уравнения (1) удовлетворяют неравенствам

$$\mathbf{x}_1 > 0 \tag{2}$$

$$D\mathbf{v}\mathbf{x}_m > 0 \tag{3}$$

Следует отметить, что группу первых физических параметров в механических системах могут составлять или жесткости (податливости) упругих элементов, или инерционности (подвижности) инерционных элементов вибрационной системы. Группу вторых физических параметров будут при этом составлять соответственно инерционности (подвижности) или жесткости (податливости). Под подвижностью инерционного элемента здесь имеем в виду величину, обратную его инерционности.

Для рассматриваемых вибрационных систем решен ряд задач синтеза их параметров при ограничениях, накладываемых как на спектр вибрационной системы, так и на значения параметров [3–5]. Ниже излагается решение задач выбора первых физических параметров вибрационной системы, обеспечивающих максимально сжатый спектр.

Задача 1. Заданы структура вибрационной системы и вектор вторых физических параметров. Определить вектор первых физических параметров, при котором наименьшая обобщенная собственная частота будет занимать заданное положение на числовой оси и отношение наибольшей частоты к наименьшей будет минимальным.

Задача 2. Задана исходная вибрационная система. Минимальным изменением вектора первых физических параметров получить систему, имеющую максимально сжатый спектр.

Следующая теорема показывает, что задача 1 является основной, поскольку ее решение определяет решение задачи 2.

Теорема 1. Увеличение всех координат вектора $\mathbf{u}$ в ρ раз ($\rho > 0$) не изменяет собственных форм обобщенного амплитудного уравнения, а ведет лишь к пропорциональному увеличению всех собственных значений в ρ раз.

Из теоремы 1 следует, что соответствующим пропорциональным изменением всех координат вектора первых физических параметров можно перевести первое собственное значение μ_1 в заданное положение на числовой оси, не изменяя при этом отношение μ_m / μ_1.

Таким образом, если задачи 1 и 2 решены для вибрационных систем с одинаковой структурой и одинаковым вектором вторых физических параметров, то их решения будут коллинеарными

$$\mathbf{u}_r = \rho \mathbf{u}_\alpha, \quad \rho > 0$$

Здесь $\mathbf{u}_r$ — решение задачи 2, когда исходным вектором первых физических параметров является вектор $\mathbf{r}$, $\mathbf{u}_\alpha$ — решение задачи 1 при $\mu_1 = \alpha$. Множитель коллинеарности ρ легко определяется из условия минимума длины вектора невязки $(\mathbf{u}_r - \mathbf{r})$

$$\rho = (\mathbf{r}, \mathbf{u}_\alpha) / (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\alpha)$$

Перейдем к решению задачи 1. Зафиксировав структуру и вектор вторых физических параметров вибрационной системы, будем изменять вектор $\mathbf{u}$. Собственные значения уравнения (1) при этом будут изменяться. Умножим обе части уравнения (1) скалярно на $\mathbf{x}$, найдем зависимость

(4) $$\mu(\mathbf{u}) = (D\mathbf{u}\mathbf{x}(\mathbf{u}),\ \mathbf{x}(\mathbf{u})) / (A\mathbf{x}(\mathbf{u}),\ \mathbf{x}(\mathbf{u}))$$

Можно изменять вектор $\mathbf{u}$ так, чтобы одно из собственных значений уравнения (1) сохраняло свое значение, равное α ($\alpha > 0$). Множество

$$L_\alpha = \{\mathbf{u} \mid \mu(\mathbf{u}) = \alpha,\ \mathbf{u} > 0\}$$

назовем полной эквичастотной поверхностью.

Отметим следующую интересную особенность полной эквичастотной поверхности. Вектор, определяемый соотношением

(5) $$\mathbf{n} = D\mathbf{x}_e\mathbf{x}_e$$

где $\mathbf{x}_e$ — собственная форма уравнения $D\mathbf{u}_e\mathbf{x}_e = \alpha A\mathbf{x}_e$, является нормалью к поверхности L_α в точке $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e$.

Действительно, L_α — поверхность уровня функции $\mu = \mu(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} > 0$, поэтому нормаль, проведенная в произвольной точке $\mathbf{u} \in L_\alpha$, коллинеарна градиенту $\nabla\mu(\mathbf{u})$ в данной точке. Из уравнений (1) и (4) получим

(6) $$d\mu = (D\mathbf{x}\mathbf{x},\ d\mathbf{u})/(A\mathbf{x},\ \mathbf{x})$$

Тогда значение градиента в точке $\mathbf{u} = \mathbf{u}_e$ будет равно

$$\nabla\mu(\mathbf{u}_e) = D\mathbf{x}_e\mathbf{x}_e/(A\mathbf{x}_e,\ \mathbf{x}_e)$$

Полагая коэффициент коллинеарности равным $(A\mathbf{x}_e,\ \mathbf{x}_e)$, получим соотношение (5).

Полная эквичастотная поверхность является объединением всех эквичастотных поверхностей, соответствующих различным номерам собственных значений

$$L_\alpha = \bigcup_{k=1}^{m} L_{\alpha,k}, \quad L_{\alpha,k} = \{\mathbf{u} \mid \mu_k(\mathbf{u}) = \alpha,\ \ \mathbf{u} > 0\}$$

Теорема 2. Эквичастотная поверхность $L_{\alpha,1}$ определяется параметрическим уравнением

(7) $$\mathbf{u} = \alpha D\mathbf{z}^{-1}A\mathbf{z}$$

где $\mathbf{z} = (z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_m)$ пробегает ортант $\mathbf{z} > 0$. Вектор $D\mathbf{z}\mathbf{z}$ является нормальным к данной поверхности.

Справедливость теоремы вытекает из уравнения (1) и соотношений (2) и (5). Являясь решением задачи 1, вектор $\mathbf{u}_\alpha$ принадлежит $L_{\alpha,1}$ и удовлетворяет равенству

(8) $$\mu_m(\mathbf{u}_\alpha) = \min_{(\mathbf{u} \in L_{\alpha,1})} \mu_m(\mathbf{u})$$

Теорема 2 позволяет перейти от задачи нахождения условного экстремума (8) к задаче нахождения обычного экстремума

$$\mu_m(\mathbf{u}_\alpha) = \min_{(\mathbf{z} > 0)} \mu_m(\mathbf{u}(\mathbf{z}))$$

Необходимые параметры вибрационной системы в стационарной точке функции $\mu_m = \mu_m(\mathbf{z})$ будем обозначать так: $\mathbf{u}^\circ$, $\mathbf{x}_m^\circ$, $\mathbf{z}^\circ$, μ_m°. Эти параметры связаны соотношением

(9) $\nabla\mu_m(\mathbf{z}^\circ) = 0$

Для точки, скользящей по поверхности $L_{\alpha,1}$, из (7) вытекает следующее равенство:

(10) $d\mathbf{u} = D\mathbf{z}^{-1}[\alpha A - D\mathbf{u}]\,d\mathbf{z}$

Используя соотношения (6) и (10), получим

$$d\mu_m = ([\alpha A - D\mathbf{u}]\,D\mathbf{z}^{-1}D\mathbf{x}_m\mathbf{x}_m,\ d\mathbf{z})\,/\,(A\mathbf{x}_m,\ \mathbf{x}_m)$$

Таким образом

$$\nabla\mu_m(\mathbf{z}) = [\alpha A - D\mathbf{u}]\,D\mathbf{z}^{-1}D\mathbf{x}_m\mathbf{x}_m\,/\,(A\mathbf{x}_m,\ \mathbf{x}_m)$$

и уравнение (9) преобразуется к виду

(11) $[\alpha A - D\mathbf{u}^\circ]\,\mathbf{y}^\circ = 0, \quad \mathbf{y}^\circ = D\mathbf{z}^{\circ\,-1}D\mathring{\mathbf{x}}_m\mathring{\mathbf{x}}_m$

Равенство (11) может быть достигнуто только на векторе $\mathbf{y}^\circ$, коллинеарном $\mathbf{z}^\circ$. Полагая $\mathbf{y}^\circ = \mathbf{z}^\circ$, получим зависимость между первой и m-й формами колебаний в стационарной точке

(12) $D\mathbf{z}^\circ\mathbf{z}^\circ = D\mathring{\mathbf{x}}_m\mathring{\mathbf{x}}_m$

Неравенство (3) позволяет преобразовать соотношение (12) к виду

(13) $\mathring{\mathbf{x}}_m = D\mathbf{v}\mathbf{z}^\circ$

Можно показать, что в стационарной точке $\mathbf{z}^\circ$ функция $\mu_m = \mu_m(\mathbf{z})$ достигает точной нижней границы. Таким образом, $\mathbf{u}_\alpha = \mathbf{u}^\circ$.

Равенство (12) означает касание эквичастотных поверхностей $L_{\alpha,1}$ и $L_{\beta,m}$, где $\beta = \mu_m(\mathbf{z}^\circ)$, в точке $\mathbf{u} = \mathbf{u}^\circ$. Поэтому точка $\mathbf{u}^\circ$ удовлетворяет уравнениям

$$D\mathbf{u}^\circ\mathbf{z}^\circ = \alpha A\mathbf{z}^\circ, \quad D\mathbf{u}^\circ\mathring{\mathbf{x}}_m = \beta A\mathbf{x}^\circ$$

Используя эти уравнения и соотношение (13), получим уравнение для нахождения $\mathbf{z}^\circ$ и β

(14) $\alpha A\mathbf{z}^\circ = \beta D\mathbf{v}AD\mathbf{v}\mathbf{z}^\circ, \quad \mathbf{z}^\circ > 0$

Пусть $B = D\mathbf{v}A^{-1}D\mathbf{v}A$, тогда одно из решений уравнения

(15) $B\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$

определяет решение уравнения (14).

Отметим следующие свойства матрицы B, вытекающие из ее определения.

1) Матрица B подобна симметрической матрице. Действительно $B = A^{-1/2}[A^{1/2}D\mathbf{v}A^{-1}D\mathbf{v}A^{1/2}]\,A^{1/2}$.

2) Элементы матрицы B неотрицательны, но существует такое целое k, что все элементы матрицы B^k строго положительны. Действительно, матрица B — произведение двух матриц $D\mathbf{v}A^{-1}D\mathbf{v}$ и A, обладающих таким свойством

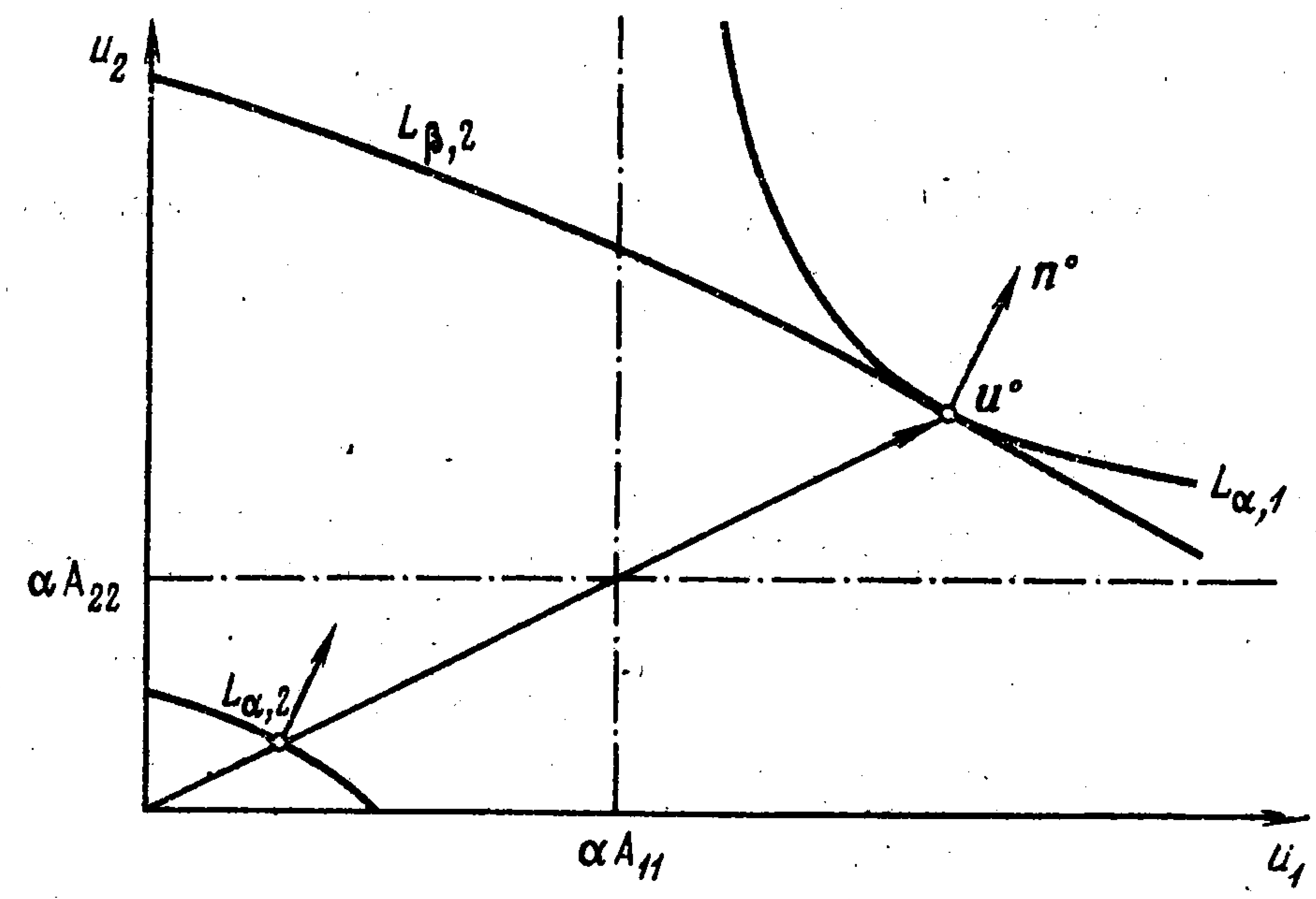
3) $D\mathbf{v}B^{-1}D\mathbf{v} = B$

(4) $(B\tau, \tau) > 0$, $\tau \neq 0$, так как произведение положительно определенных матриц $D\nu A^{-1}D\nu$ и A есть положительно определенная матрица.

Из первого свойства матрицы B следует, что все ее собственные значения вещественны. Второе свойство означает, что к матрице B применима теорема Перрона, т. е. ее наибольшему собственному значению λ_m, являющемуся простым корнем характеристического уравнения

$$|\lambda E - B| = 0 \tag{16}$$

соответствует собственный вектор с положительными координатами. Этот вектор и будет решением уравнения (14). При этом $\beta = \alpha\lambda_m$. Свойства 3 и 4 означают, что матрица B обладает симметричным относительно единицы спектром. Это позволяет, по крайней мере, понизить порядок урав-



Фиг. 1

нений (16) не менее, чем в два раза. При нечетном m правая часть этого уравнения содержит множитель $(\lambda - 1)$, исключение которого понижает порядок уравнения до четного. При четном порядке уравнения (16) переход к переменной σ, определяемой равенством $\sigma = (\lambda^2 + 1)/2\lambda$, понижает порядок уравнения в два раза.

Пример 1. Рассмотрим решение задачи 1 для вибрационной системы с двумя степенями свободы.

Следует отметить, что матрица A вибрационной системы с двумя степенями свободы в силу условий 2° — 4°, накладываемых на матрицу обобщенного амплитудного уравнения, всегда осцилляционная. Условие 5° в этом случае оказывается лишним, так как оно следует из предыдущих условий. При этом $\nu = (1, -1)$ (или $\nu = (1-1, 1)$). Следовательно

$$B = \frac{1}{\Delta_-}\begin{Vmatrix} A_{22} & A_{12} \\ A_{21} & A_{11} \end{Vmatrix} \quad \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix}$$

$$|\lambda E - B| = \lambda^2 - 2\frac{\Delta_+}{\Delta_-}\lambda + 1, \quad \Delta_\pm = A_{11}A_{22} \pm A_{12}A_{21}$$

Решая характеристическое уравнение (16), получим

$$\lambda_2 = \Delta_+° / \Delta_-°, \qquad \Delta^\circ_\pm = \sqrt{A_{11}A_{22}} \pm \sqrt{A_{12}A_{21}}$$

Подставляя значение λ_2 в уравнение (15), найдем вектор $\mathbf{z}^\circ$

$$\mathbf{z}^\circ = \sqrt{\rho}\,(1/\sqrt{A_{11}},\ 1/\sqrt{A_{22}})$$

Значение скалярного множителя ρ удобно выбрать из условия $(A\,\mathbf{z}^\circ, \mathbf{z}^\circ) = 1$

$$\rho = \sqrt{A_{11}A_{22}}\,/\,2\Delta_+^\circ$$

Тогда параметры вибрационной системы с максимально сжатым спектром определяются соотношениями

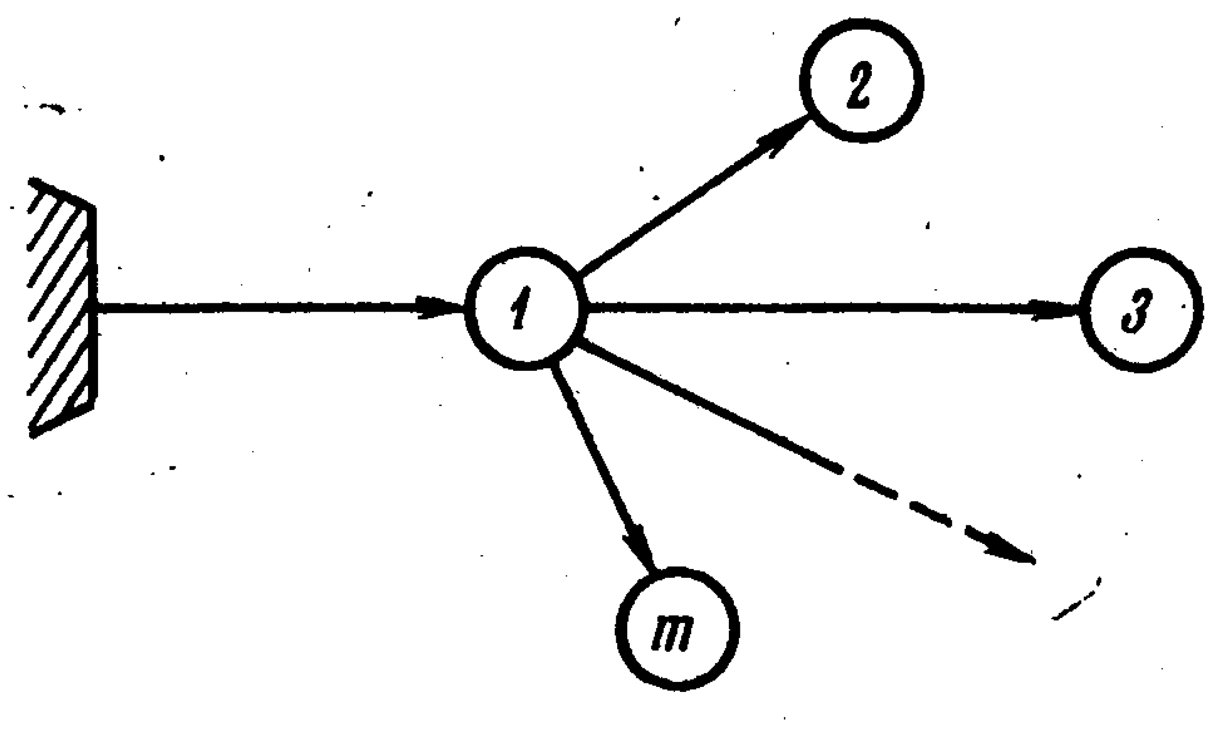
$$\mathbf{u}^\circ = \frac{\alpha}{2\rho}(A_{11}, A_{22}), \quad \beta = \alpha\frac{\Delta_+^\circ}{\Delta_-^\circ}, \ \mathbf{n}^\circ = \rho\left(\frac{1}{A_{11}}, \frac{1}{A_{22}}\right)$$

Полученным результатам можно дать геометрическую интерпретацию.

На фиг. 1 представлены полная эквичастотная поверхность L_α и эквичастотная поверхность $L_{\beta,2}$. L_α представляет собой гиперболу

$$(u_1 - \alpha A_{11})(u_2 - \alpha A_{22}) = \alpha^2 A_{12} A_{21}$$

Точка $\mathbf{u}^\circ$ является точкой касания поверхности $L_{\alpha,1}$ и $L_{\beta,2}$.



Фиг. 2

Пример 2. Рассмотрим цепную вибрационную систему с m степенями свободы, структура которой представлена на фиг. 2.

Стрелками обозначены упругие элементы, а кружками — инерционные. Направления стрелок определяют положительную деформацию соответствующих упругих элементов. Примером такой вибрационной системы может служить механическая модель привода с $(m-1)$-й рабочей машиной, совершающая малые крутильные (продольные) колебания.

Полагая квадрат наименьшей собственной частоты данной вибрационной системы равным α, получим решение задачи 1 варьированием жесткостей упругих элементов.

Будем оперировать со второй обратной формой амплитудного уравнения, которая удовлетворяет всем требованиям уравнения (1). При этом величины, входящие в (1), будут определяться так: $\mathbf{u}$ — вектор жесткостей, $\mathbf{x}$ — форма деформации упругих элементов, μ — квадрат собственной частоты вибрационной системы

$$A = \begin{Vmatrix} J_0 & J_2 & J_3 & \ldots & J_m \\ J_2 & J_2 & 0 & \ldots & 0 \\ J_3 & 0 & J_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ J_m & 0 & 0 & \ldots & J_m \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{J} = (J_1, J_2, \ldots J_m), \quad J_0 = \sum_{i=1}^m J_i$$

Здесь $\mathbf{J}$ — вектор инерционностей, J_0 — суммарная инерционность вибрационной системы.

При $m > 2$ матрица A неосцилляционная.

Согласно [1] $\mathbf{v} = (1, -1, -1, \ldots, -1)$ и

$$D\mathbf{v}A^{-1}D\mathbf{v} = \begin{Vmatrix} h_1 & h_1 & h_1 & \ldots & h_1 \\ h_1 & h_1 + h_2 & h_1 & \ldots & h_1 \\ h_1 & h_1 & h_1 + h_3 & \ldots & h_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_1 & h_1 & h_1 & \ldots & h_1 + h_m \end{Vmatrix}$$

$$\mathbf{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_m), \ h_i = J_i^{-1}, \ i = 1, 2, \ldots, m$$

Здесь $\mathbf{h}$ — вектор подвижностей.

Таким образом, полагая $a = 2h_1J_0 - 1$, получим

$$B = \left\| \begin{matrix} a & 2h_1J_2 & 2h_1J_3 & \dots & 2h_1J_m \\ a+1 & 2h_1J_2+1 & 2h_1J_3 & \dots & 2h_1J_m \\ a+1 & 2h_1J_2 & 2h_1J_3+1 & \dots & 2h_1J_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a+1 & 2h_1J_2 & 2h_1J_3 & \dots & 2h_1J_m+1 \end{matrix} \right\|$$

Определив корни уравнения (16)

$$\lambda_1 = a - \sqrt{a^2-1}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_{m-1} = 1, \quad \lambda_m = a + \sqrt{a^2-1}$$

подставим значение λ_m в уравнение (15). Из множества его решений выберем

$$z^\circ = \left(\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}, 1, 1, \dots, 1 \right)$$

Используя соотношение (7), получим искомое решение

$$u_1 = \alpha \mu_0 J_0, \quad u_2 = \alpha \mu_0 J_2, \quad u_3 = \alpha \mu_0 J_3, \quad \dots, \quad u_m = \alpha \mu_0 J_m$$

Здесь

$$\mu_0 = \sqrt{\frac{a-1}{a+1}} + 1$$

Квадраты собственных частот полученной вибрационной системы имеют следующие значения:

$$\mu_1 = \alpha, \quad \mu_2 = \mu_3 = \dots = \mu_{m-1} = \alpha\mu_0, \quad \mu_m = \alpha\,(a + \sqrt{a^2-1})$$

Изложенный метод дает ответ и на вопрос о том, каковы должны быть сосредоточенные массы, закрепленные на невесомой, однородной, свободноопертой балке, чтобы иметь сжатый спектр. Например, вибрационная система, состоящая из такой балки с симметрично расположенными тремя массами m_1, m_2 и m_3, будет иметь сжатый спектр, если

$$\frac{m_1}{m_2} - \frac{m_3}{m_2} = \frac{l^3}{8b^3(3l-4b)}$$

Здесь b — расстояние массы $m_1(m_3)$ от ближайшего конца балки, l — длина балки.

Поступила 1 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Митин В. Н., Штейнвольф Л. И.* Структурные матрицы цепных вибрационных систем. В сб. Динамика и прочность машин, вып. 17. Изд-во Харьковск. ун-та, 1973.
2. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М., Гостехиздат, 1950.
3. *Глазман И. М., Митин В. Н.* Отстройка вибрационных систем как задача выпуклого программирования. Докл. АН СССР, 1966, т. 169, № 5.
4. *Глазман И. М., Штейнвольф Л. И.* Освобождение резонансно-опасных зон от собственных частот вибрационной системы варьированием ее параметров. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 4.
5. *Глазман И. М., Митин В. Н.* Оптимальная отстройка крутильных вибрационных систем. В сб.: Динамика и прочность машин, вып. 6. Изд-во Харьковск. ун-та, 1967.