Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 531.31

КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЯПУНОВА И НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ГАМИЛЬТОНИАНОВ

Л. М. Штеренлихт

(Москва)

Исследуется вопрос о том, к какому общему виду может быть приведен гамильтониан с помощью произвольного канонического преобразования, сохраняющего свойства устойчивости по Ляпунову. В случае устойчивого автономного гамильтониана на этот вопрос удается ответить полностью. Одним из результатов предпринятого рассмотрения является способ приведения гамильтониана к нормальной форме в конечном порядке, отличный от предложенных ранее [1], обладающий по сравнению с ними определенными преимуществами и выявляющий связь между методами нормализации и усреднения. Приводится таблица, позволяющая по исходному гамильтониану выписать его нормальную форму третьего порядка при наличии любых резонансов третьего порядка.

При исследовании устойчивости по Ляпунову положения равновесия гамильтоновых систем обычно используется каноническое преобразование исходного гамильтониана к виду, более удобному для изучения. С такой точки зрения можно подходить к методу преобразований Биркгофа [2], и на этом пути в последнее время получены многие результаты об устойчивости, имеющие прикладное значение (например, [3–5] и др.). При применении указанного приема необходимо, чтобы существовала тесная связь между свойствами устойчивости исходного и преобразованного гамильтонианов. Поэтому обычно используют только автономные преобразования. Однако такое ограничение не связано с условиями применимости данного метода даже в случае автономного исходного гамильтониана. Представляет интерес рассмотреть эту проблему с общей точки зрения, не ограничиваясь автономным случаем.

1. Рассматриваются гамильтонианы, не содержащие линейных членов, определенные на одном и том же $2n$-мерном пространстве, непрерывно дифференцируемые по фазовым координатам и непрерывно зависящие от времени. Канонические преобразования трактуются как канонические автоморфизмы этого пространства.

Под устойчивостью (или неустойчивостью) гамильтониана подразумевается устойчивость (или неустойчивость) по Ляпунову нулевого решения соответствующей гамильтоновой системы при $t \geqslant 0$.

Каноническое преобразование

$$k : q;\ p \to q'\ (t,\ q,\ p);\ p'\ (t,\ q,\ r);\ t \geqslant 0$$

будет называться каноническим преобразованием Ляпунова, если k переводит всякий устойчивый гамильтониан в устойчивый и неустойчивый — в неустойчивый.

Через L обозначим множество всех канонических преобразований Ляпунова. Множество L, являясь подгруппой группы всех канонических преобразований, задает на множестве рассматриваемых гамильтонианов отношение эквивалентности, а именно, два гамильтониана будут эквивалентными (обозначим: $H_1 \sim H_2$), если найдется $k \in L$ и $k : H_1 \to H_2$. Обозначим через $L(H)$ класс эквивалентности гамильтониана H. Если H автономен, то $L_a(H)$ будет обозначать множество всех автономных гамильтонианов, эквивалентных H.

Применительно к исследованию устойчивости в конечном порядке необходимо несколько видоизменить формулировки приведенных определений. Во-первых, все гамильтонианы и канонические преобразования в этом случае будут предполагаться $m+1$ раз непрерывно дифференцируемыми по фазовым координатам (m — порядок, в котором исследуется устойчивость). Во-вторых, вместо k и H достаточно рассматривать начальные отрезки их тейлоровских разложений до m-го порядка. Будем их обозначать $k^{(m)}$ и $H^{(m)}$. В-третьих, соответственно меняется определение эквивалентности: оба гамильтониана H_1 и H_2 будут называться m-эквивалентными ($H_1 \widetilde{m} H_2$), если найдется каноническое преобразование k: $k^{(m-1)} \in L$, переводящее H_1 в H_1' и $H_1'^{(m)} \equiv H_2^{(m)}$.

Заметим, что если $H_1 \widetilde{m} H_2$ и $H_2^{(m)}$ — устойчивый гамильтониан, что H_1 называется устойчивым в m-м порядке, и для его фазового потока справедливы стандартные оценки [6]. Если же $H_2^{(m)}$ неустойчив, то в большинстве случаев можно показать неустойчивость H_1.

2. Рассмотрим некоторые критерии принадлежности k к L. Если функции q', p', задающие каноническое преобразование, известны в явной форме, то можно применять следующее

Утверждение 1. Преобразование $k \in L$ тогда и только тогда, когда выполнены условия: а) $\| p'(t, q, p); q'(t, q, p) \|$ имеет в нуле бесконечно малый высший предел; б) существует функция $\delta(\varepsilon) > 0$, определенная в некоторой положительной окрестности нуля, такая, что $\| p'(t, q, p); q'(t, q, p) \| \geqslant \delta(\varepsilon)$ при $\| p; q \| \geqslant \varepsilon$; $t \geqslant 0$. Здесь $\| \cdot \|$ норма в фазовом пространстве.

Доказательство. Достаточность проверяется непосредственно. Докажем необходимость условия а). Если оно не выполнено, то найдутся последовательности $q_i, p_i \to 0$; $t_i > 0$ и постоянная $C > 0$, такие, что

$$\| p'(t_i, q_i, p_i); q'(t_i, q_i, p_i) \| > C \tag{2.1}$$

Пусть H_1 — прообраз тождественно нулевого гамильтониана $H_2 \equiv 0$ при преобразовании k. Тогда q', p' будут задавать фазовый поток H_1 при $t \geqslant 0$. В этом случае из (2.1) следует неустойчивость H_1, а так как H_2 устойчив, то $k \bar{\in} L$. Аналогично доказывается необходимость б).

Оказывается, что для многих важных классов канонических преобразований условие б) является следствием условия а). Приведенные ниже три утверждения относятся к этому случаю.

Утверждение 2. Если k обладает групповым свойством, т. е.

$$x(t_1 + t_2, x) = x(t_1, x(t_2, x)) \quad (x = (p, q)) \tag{2.2}$$

то $k \in L$ тогда и только тогда, когда выполнено условие а) утверждения 1.

Доказательство. Из взаимной однозначности k и из (2.2) следует, что $q' = q$, $p' = p$ при $t = 0$ и поэтому k задает каноническую динамическую систему в окрестности нуля фазового пространства. Рассмотрим произвольную, инвариантную при $t \geqslant 0$, открытую окрестность R начала координат. R найдется в силу выполнения условия а) и в R справедлива теорема Пуанкаре о возвращении точек [7]. Выберем постоянные $0 < \delta_0 < \varepsilon_0$, такие, чтобы шар $S_{\varepsilon_0} = \{p, q \mid \| p, q \| \leqslant \varepsilon_0\} \in R$ и

$$p'(t, q, p); \; q'(t, q, p) \in S_{\varepsilon_0} \text{ при } t \geqslant 0; \; p, q \in S_{\delta_0} \tag{2.3}$$

Предположим теперь, что условие б) не выполняется. Тогда найдется такая точка $q_0, p_0 \in R$, что, во-первых, она возвращающаяся по Пуассону при $t \geqslant 0$ [7], во-вторых, $\| q_0, p_0 \| > \varepsilon_0$ и $\| p' (T, q_0, p_0); q' (T, q_0, p_0) \| \leqslant \delta_0$ при некотором $T > 0$. Отсюда следует, что найдется $t_0 > T$, при котором

$$\| p' (t_0, q_0, p_0); \; q' (t_0, q_0, p_0) \| > \varepsilon_0 \tag{2.4}$$

Если обозначить $q_1 = q' (T, q_0, p_0)$, $p_1 = p' (T, q_0, p_0)$, то из (2.2) и (2.4) получим

$$\| p' (t_0 - T, q_1, p_1); \; q' (t_0 - T, q_1, p_1) \| \geqslant \varepsilon_0; \; q_1, p_1 \in S_{\delta_0}$$

что противоречит (2.3). Полученное противоречие и доказывает требуемое.

Следующие два утверждения приведем без доказательств, основанных на задании канонического преобразования с помощью производящей функции.

Утверждение 3. Для того, чтобы линейное каноническое преобразование было каноническим преобразованием Ляпунова, необходимо и достаточно выполнения условия а) утверждения 1.

Утверждение 4. Если каноническое преобразование начинается с тождественного, то $k^{(m)} \in L$ тогда и только тогда, когда $u^{(m-1)}$ имеет в нуле бесконечно малый высший предел при $t \geqslant 0$, где u — производящая функция для k.

3. Утверждение 2 дает возможность описать достаточно широкий класс канонических преобразований Ляпунова.

Фазовый поток гамильтониана H будем обозначать k_H.

Утверждение 5. Если H — устойчивый автономный гамильтониан, то $k_H \in L$.

Доказательство. По определению устойчивого гамильтониана для канонического преобразования k_H выполнено условие а) утверждения 1. Так как H автономен, то k_H удовлетворяет групповому свойству. Таким образом, выполнены все требования утверждения 2 и $k_H \in L$.

Приведем здесь несколько следствий из последнего утверждения, которые могут быть полезными при исследовании устойчивости гамильтонианов. Ниже все гамильтонианы предполагаются автономными.

Следствие 1. Если H — устойчивый гамильтониан, то $H_1 \equiv -H$ также устойчив.

Следствие 2. Если $H (q, p)$ — устойчивый гамильтониан, то $H_2 (q, p) \equiv H (p, q)$ также устойчив.

Следствие 3. Если H — устойчивый гамильтониан, то нулевое решение соответствующей гамильтоновой системы будет устойчиво по Ляпунову и при $t \leqslant 0$.

Следствие 4. Если $\{H, F\} = 0$ ($\{,\}$ — скобка Пуассона) и F — устойчивый гамильтониан, то $H \sim H + F$.

Утверждение 5 дает возможность полностью описать класс $L_a(H)$ в случае, когда H устойчив.

Утверждение 6. Пусть H — устойчивый автономный гамильтониан, тогда $L_a(H)$ состоит из всех устойчивых автономных гамильтонианов.

Доказательство. Пусть F — устойчивый гамильтониан. Каноническое преобразование $k = k_F^{-1} \circ k_H$ переводит H в F. Так как H и F устойчивы и L — группа, то по утверждению 5 $k \in L$. Значит $F \sim H$.

4. Рассмотрим автономный гамильтониан

$$H = H_2 + H_3 + \dots \tag{4.1}$$

При исследовании устойчивости таких гамильтонианов удобно использовать канонические преобразования с производящей функцией вида (u_i — однородный полином i-го порядка)

$$u = qp' + \sum_i u_i(t, q, p') \tag{4.2}$$

Обозначим через $L^m(H)$ множество всех $F^{(m)}$, соответствующих тем гамильтонианам F, для которых $H\tilde{m}F$ (см. п. 1) в классе канонических преобразований с производящей функцией вида (4.2). Класс $L_a^m(H)$ определяется по $L^m(H)$ так же, как $L_a(H)$ по $L(H)$.

Основным вопросом, изучаемым в п. 4, является описание классов $L_a^m(H)$. Класс $L_a^2(H)$ состоит только из одного гамильтониана H_2. Поэтому начнем рассмотрение с $m = 3$. При этом, как обычно, предполагается, что H_2 — устойчивый гамильтониан; если это не так, то за исключением особого случая непростых элементарных делителей, H будет неустойчивым.

Для изучения класса $L_a^3(H)$ достаточно в (4.2) оставить только u_3. Как следует из утверждения 4, для того, чтобы $k^{(2)} \in L$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{t \geqslant 0} | u_3(t, q, p) | < +\infty \tag{4.3}$$

Рассмотрим каноническое преобразование k с производящей функцией (4.2), где $u_i = 0$ при $i > 3$ и u_3 удовлетворяет (4.3). Преобразование k переводит H в F, определяемый из тождества по q, p', t

$$F\left(t, \frac{\partial u}{\partial p'}, p'\right) \equiv H\left(q, \frac{\partial u}{\partial q}\right) + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Разлагая обе части тождества в окрестности точки q, p, получим, что $F_2 \equiv H_2$, и F_3 находится из соотношения

$$\partial u_3/\partial t + \{u_3, H_2\} = \Phi_3 \equiv F_3 - H_3 \tag{4.4}$$

Таким образом, для принадлежности $F^{(3)} \equiv H_2 + F_3$ к $L_a^3(H)$ необходимо и достаточно, чтобы нашлось кубическое решение уравнения (4.4), удовлетворяющее (4.3). При этом F_3 не зависит от t.

Непосредственными вычислениями можно проверить, что общее кубическое решение (4.4) имеет вид

$$u_3 = \int_0^t \Phi_3(k_{H_2}(-\tau, q, p))\, d\tau + v_3(t, q, p) \tag{4.5}$$

где v_3 — произвольный кубический первый интеграл для H_2 ($\{v_3, H_2\} = 0$).

Выясним, при каких условиях решение (4.5) уравнения (4.4) будет удовлетворять (4.3). Фазовый поток устойчивого квадратичного гамильтониана H_2 будет почти-периодическим на всей оси линейным коническим преобразованием. Поэтому первое слагаемое в выражении (4.5) будет ограниченным при $t \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда оно будет почти-периодическим при $t \geqslant 0$ [8]. Обозначим его w_3. Заметим, что почти-периодичность w_3 при $t \geqslant 0$ эквивалентна почти-периодичности w_3 при $t \leqslant 0$. Действительно, справедливо тождество

$$w_3(t, k_{H_2}(t, q, p)) \equiv -w_3(-t, q, p)$$

Левая часть этого тождества, являясь суперпозицией двух почти-периодических при $t \geqslant 0$ функций, будет также почти-периодической при $t \geqslant 0$ [9]. Необходимым, а так как w_3 — тригонометрический полином, то и достаточным условием почти-периодичности $w_3(-t, q, p)$ служит равенство [8]

$$\bar{\Phi}_3 \equiv M\Phi_3(k_{H_2}) = 0$$

Здесь черта означает усреднение при $t \geqslant 0$ по фазовому потоку k_{H_2}, а M — оператор усреднения по t при $t \geqslant 0$.

Второе слагаемое в (4.5) представляется в виде [10]

$$v_3(t, q, p) = \omega_3(k_{H_2}(-t, q, p))$$

где ω_3 — произвольная форма третьего порядка. Поэтому w_3 — почти-периодическая функция. Следовательно, если $\bar{\Phi}_3 = 0$, то u_3 будет почти-периодической и, следовательно, ограниченной функцией.

Таким образом, критерий принадлежности $F^{(3)}$ к $L_a^3(H)$ можно записать в виде

$$\bar{F}_3 = \bar{H}_3 \tag{4.6}$$

($\bar{H}_3$ — однозначно определяемый по H кубический полином). Соотношение (4.6) означает, что имеет место

Утверждение 7. Класс $L_a^3(H)$ является инвариантным множеством для оператора усреднения по фазовому потоку k_{H_2} и полностью этим условием определяется.

Для доказательства заметим только, что $\bar{H}_2 \equiv H_2$. Остальное непосредственно вытекает из (4.6).

Утверждение 8. Если $F^{(3)} \in L_a^3(H)$, то найдется автономное каноническое преобразование, устанавливающее эту принадлежность.

Это утверждение имеет несколько неожиданное следствие: расширение класса допустимых канонических преобразований до неавтономных вида (4.1) не расширяет класса получаемых эквивалентных гамильтонианов.

Доказательство. Пусть $F^{(3)} \in L_a{}^3(H)$. В этом случае согласно (4.6) $\overline{F}_3 = \overline{H}_3$ и, как было выяснено выше, определяемая по (4.5) производящая функция u_3 будет кубическим полиномом с почти-периодическими коэффициентами. Поэтому $\partial u_3 / \partial x_i$ ($x = (q, p)$) будет квадратичной формой с почти-периодическими коэффициентами. Покажем что,

$$M \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial}{\partial x_i} M u_3 \tag{4.7}$$

Для этого запишем u_3 в виде

$$u_3 = \sum_{|l|=3} \alpha_l(t) x^l$$

$$l = (l_1, \ldots l_2), \quad x^l = x_1^{l_1} \ldots x_{2n}^{l_{2n}}, \quad |l| = \sum_{j=1}^{2n} l_j$$

Пользуясь линейностью оператора усреднения, получим

$$\frac{\partial}{\partial x_i} M u_3 = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{|l|=3} (M \alpha_l) x^l = M \frac{\partial u_3}{\partial x_i}$$

Применим оператор усреднения к тождеству (4.4), где функция u_3 определена по (4.5)

$$M \frac{\partial u_3}{\partial t} + M \{u_3, H_2\} \equiv M \Phi_3 \tag{4.8}$$

Из (4.7) следует, что $M\{u_3, H_2\} = \{M u_3, H_2\}$. Кроме того, в силу ограниченности u_3 и автономности Φ_3 $M \partial u_3 / \partial t = 0$ и $M\Phi_3 = \Phi_3$. Поэтому (4.8) переходит в тождество $\{M u_3, H_2\} \equiv \Phi_3$. Это тождество означает, что $M u_3$ — автономное решение (4.4), что и доказывает требуемое.

Утверждение 8 сужает класс допустимых канонических преобразований вида (4.2) до автономных.

Оказывается, что для получения класса $L_a{}^3(H)$ достаточно рассматривать даже не все автономные преобразования, а лишь те, у которых производящая функция удовлетворяет условию $\bar{u}_3 = 0$.

Докажем это. Как было выяснено выше, если $F^{(3)} \in L_a{}^3(H)$, то каноническое преобразование с производящей функцией $u = qp' + M_t^- w_3$, где w_3 определяется по (4.5), будет устанавливать эквивалентность $H_3 \sim F$. (Нижний индекс у символа M оператора усреднения означает переменную, по которой производится усреднение, а верхний — направление усреднения: минус соответствует $t \to -\infty$, плюс — $t \to +\infty$.)

Обозначим $u_3^* \equiv M_t^- w_3$.

Используя усиленную теорему о среднем [8], получим

$$\bar{u}_3^* = M_\tau^+ u_3^* (k_{H_2}(\tau, q, p)) = M_\tau^+[M_t^- w_3(k_{H_2})] = M_\tau^+ [M_t^- (w_3 (t - \tau, q, p) - w_3(-\tau, q, p))] = M_\tau^+ [u_3^* - w_3(-\tau, q, p)] = u_3^* - u_3^* = 0$$

Таким образом, чтобы получить весь класс $L_a{}^3(H)$, достаточно к H применить множество K_3 автономных канонических преобразований вида (4.2) с $u_i = 0$ при $i > 3$ и $\bar{u}_3 = 0$. Можно показать, что K_3 — минимальное множество, порождающее $L_a{}^3(H)$.

Объединяя доказанные выше факты, можно сформулировать

Утверждение 9. Для получения класса $L_a{}^3(H)$ необходимо и достаточно применить к H множество канонических преобразований K_3.

Множество K_3 существенно зависит от наличия резонансов третьего порядка у H_2. Так, если H_2 вообще их не имеет, то можно показать, что K_3 содержит все кубические формы, а в другом крайнем случае $H_2 \equiv 0$ легко убедиться, что K_3 содержит только тождественное преобразование. Соответственно в первом случае класс $L_a^3(H)$ будет включать все возможные $F^{(3)}$, а во втором — только $F^{(3)} \equiv H^{(3)}$.

Перейдем к исследованию класса $L_a^4(H)$. Пусть $F^{(4)} \in L_a^4(H)$. Тогда, согласно утверждению 4, $F^{(3)} \in L_a^3(H)$. Для опредения F_4 получим уравнение

$$\frac{\partial u_4}{\partial t} + \{u_4, H_2\} = \Phi_4 \equiv F_4 - H_4 - \Psi_4 \tag{4.9}$$

$$\Psi_4 = -\frac{\partial F_3}{\partial q}\frac{\partial u_3}{\partial p} + \frac{\partial H_3}{\partial p}\frac{\partial u_3}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 H_2}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{\partial u_3}{\partial p_1}\frac{\partial u_3}{\partial p_2}$$

Уравнение (4.9) исследуется так же, как и уравнение (4.4). Сформулируем здесь результат такого исследования.

Утверждение 10. Для того, чтобы $F^{(4)} \in L_a^4(H)$, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{F}^{(4)} = \overline{H}^{(4)} + \overline{\Psi}_4$.

Утверждения типа 7 и 8 для $L_a^4(H)$ не имеют места, так как, вообще говоря, Ψ_4 зависит от t. Но если в (4.2) ограничиться $u_3 \in K_3$, то утверждение 7 дословно переносится на $L_a^4(H)$, а в утверждении 8 вместо K_3 следует взять множество K_4 автономных канонических преобразований вида (4.2) с $u_i \equiv 0$ при $i > 4$ и $\bar{u}_3 = \bar{u}_4 = 0$.

Аналогично проводится исследование классов $L_a^m(H)$ при $m > 4$. В общем случае условием принадлежности: $F^m \in L_a^m(H)$ будет равенство $\overline{F}^{(m)} = \overline{H}^{(m)} + \overline{\Psi}^{(m)}$, где $\Psi^{(m)}$ зависит от $F^{(i)}$, $H^{(i)}$ при $i < m$. При этом, если для получения $F^{(m-1)}$ использовать только канонические преобразования из K_{m-1}, то для получения $F^{(m)}$ необходимо и достаточно применить к H преобразования из K_m, где K_m — множество автономных канонических преобразований вида (4.2) с $u_i \equiv 0$ при $i > m$ и $\bar{u}_3 = \ldots = \bar{u}_m = 0$.

5. Выясним, как находить в классе $L_a^m(H)$ нормальную форму m-го порядка гамильтониана H. Для этого, прежде всего, приведем определение нормальной формы в виде, несколько отличном от обычного.

Определение. Нормальной формой m-го порядка гамильтониана (4.1) называется гамильтониан $h^{(m)} \equiv H_2 + h_3 + \ldots + h_m \in L_a^m(H)$, находящийся в инволюции с H_2.

Как следует, например, из [1], это определение эквивалентно стандартному (определяющему нормальную форму, как полином с членами специальной структуры), если H_2 уже нормализовано, т. е. $H_2 = {}^1/_2 \Sigma \lambda_i \times (q_i^2 + p_i^2)$. В общем случае данное определение является не существенным, но удобным для приложений обобщением классического определения нормальной формы.

Начнем с нахождения нормальной формы третьего порядка. Из приведенного выше определения и из (4.6) следует, что $h^{(3)} \equiv H_2 + h_3$; $\bar{h}_3 = \overline{H}_3$; h_3 — первый интеграл для H_2 и поэтому $\bar{h}_3 = h_3$. Следовательно, нормальная форма третьего порядка имеет вид

$$h^{(3)} = H_2 + \overline{H}_3 \tag{5.1}$$

Формула (5.1) дает возможность, не находя нормализующего преобразования, сразу определить нормальную форму третьего порядка, причем от H_2 требуется только устойчивость. В частности, H_2 может иметь нулевые и равные собственные частоты. Отметим, что вычисление $\overline{H}_3$ сводится к простому вычислению интегралов синусов и косинусов.

При обычном подходе к нормальной форме гамильтониана эти случаи не рассматривались. Исключение составляют появившиеся недавно работы [11,12], в которых находилась нормальная форма гамильтониана системы с двумя степенями свободы при наличии равных частот и изучались некоторые приложения полученной нормальной формы к вопросам устойчивости.

Для нахождения нормальной формы четвертого порядка, как и в рассмотренном выше случае, получим, что

$$h^{(4)} = h^{(3)} + \overline{H}_4 + \overline{\Psi}_4 \tag{5.2}$$

где Ψ_4 определяется по (4.9).

При нахождении h_4 в Ψ_4 следует положить $F_3 \equiv \overline{H}_3$ и $u_3 \equiv w_3 \in K_3$

Аналогично показывается, что при $m > 4$ нормальная форма определяется соотношением

$$h^{(m)} = h^{(m-1)} + \overline{H}_m + \overline{\Psi}_m \tag{5.3}$$

где Ψ_m полностью определяется $H^{(m-1)}$.

Не будем приводить здесь общий вид Ψ_m из-за его громоздкости. Отметим только, что если ограничиться при нахождении нормализующего преобразования классом K_m, которого достаточно, как был выяснено выше, то Ψ_m и соответственно нормальная форма $h^{(m)}$ определяется однозначно. Если же от этого условия отказаться, то из-за наличия в формуле (4.5) произвольного первого интервала такой однозначности, вообще говоря, не получится.

Изложенный способ нормализации позволяет установить тесную связь между методами нормализации и усреднения. Для этого к исходному гамильтониану H применим каноническое преобразование $k_{H_2}^{-1} \in L$. Тогда получим $H \sim F$: $F_2 = 0$, $F_3 = H_3(k_{H_2})$, $F_4 = H_4(k_{H_2})$.

Сделаем затем еще одно каноническое преобразование k_ε: $q, p \to \varepsilon^{-1}q$, $\varepsilon^{-1}p$ с валентностью ε^{-2}, где ε — малый параметр. Получим, что $F \sim G$: $G_2 = 0$, $G_3 = \varepsilon F_3$, $G_4 = \varepsilon^2 F_4$.

Система уравнений с гамильтонианом G

$$\dot{q} = \frac{\partial G}{\partial p} \equiv \varepsilon \frac{\partial F_3}{\partial p} + \cdots, \quad \dot{p} = -\frac{\partial G}{\partial q} \equiv -\varepsilon \frac{\partial F_3}{\partial q}$$

является стандартной системой теории усреднения. Убедимся, что к ней можно применить основную теорему об усреднении Н. Н. Боголюбова [8]. Для этого достаточно показать, что $M_t^+ \partial F_3/\partial x$ $(x = (q, p))$ существует равномерно в окрестности нуля. Для чего, в свою очередь, достаточно, чтобы семейство функций

$$f_T(x) = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial F_3}{\partial x}\, dt$$

было равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным. Первое очевидно. А второе вытекает из того, что $\partial^2 F_3 / \partial x_i \partial x_j$ — линейные по x почти-периодические по t функции и поэтому равномерно ограничены.

Используя переостановочность операторов усреднения и дифференцирования (см. п. 4), усредненную систему в первом приближении можно записать в виде

$$q^{\cdot} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial p} \overline{H}_3, \quad p^{\cdot} = -\varepsilon \frac{\partial}{\partial q} \overline{H}_3$$

Производя обратное каноническое преобразование $k_{H_2}^{-1} \circ k^{-1}$, получим, что гамильтониан системы уравнений первого приближения эквивалентен (в смысле п. 1) нормальной форме третьего порядка исходного гамильтониана. Аналогичное рассмотрение можно провести и для высших порядков.

6. Рассмотрим представляющий самостоятельный интерес механический пример, который иллюстрирует применение результатов п. 5 к исследованию устойчивости гамильтоновых систем.

В работе [2] при исследовании устойчивости стационарных вращений симметричного спутника на круговой орбите остались нерассмотренными случаи, которым в плоскости параметров соответствуют границы областей устойчивости. Разберем здесь один такой случай, а именно, когда $\alpha = \beta = 1$. Этот случай соответствует относительному равновесию сферического спутника. Гамильтониан этой задачи можно записать в виде [2]

$$H = {}^1/_2\, p_1^2 + {}^1/_2\, p_2^2 + {}^1/_2\, q_2^2 + p_1 q_2 + {}^1/_8\, q_1^4 + {}^1/_2\, q_1^3 p_2 - {}^1/_{24}\, q_2^4 - {}^1/_6\, q_2^3 p_1 + {}^1/_2\, p_1^2 q_1^2 + {}^1/_4\, q_1^2 q_2^2 + {}^1/_2\, q_1 q_2^2 p_2$$

С помощью способа, описанного в п. 5, найдем нормальную форму четвертого порядка этого гамильтониана. Собственные частоты линейной системы равны нулю и единице. Поэтому квадратичный гамильтониан не нормализуется в обычном смысле. Зато легко выписать его фазовый поток

$$\begin{aligned} q_1 &= -p_2^\circ \cos\nu + p_1^\circ + q_2^\circ \sin\nu + q_1^\circ + p_2^\circ \\ q_2 &= (q_2^\circ + p_1^\circ)\cos\nu + p_2^\circ \sin\nu - p_1^\circ \\ p_1 &= p_1^\circ, \quad p_2 = p_2^\circ \cos\nu - (p_1^\circ + q_2^\circ)\sin\nu \end{aligned} \tag{6.1}$$

Так как $H_3 = 0$, то согласно (5.1) $h^{(3)} = H_2$ и $u_3 = 0$. Тогда из (5.2) получим, что $h^{(4)} = H_2 + \overline{H}_4$. Для нахождения $\overline{H}_4$ следует в H_4 подставить (6.1) и усреднить по ν при $\nu \to +\infty$. После несложных вычислений найдем, что

$$\overline{H}_4 = {}^1/_8\,(q_1^4 + p_1^4 + p_2^4 + 2\, q_1^2 p_1 + 2\, p_2^2 p_1 + 4\, q_1 p_1^2 p_2)$$

Окончательно $h^{(4)}$ можно представить в виде

$$h^{(4)} = {}^1/_2\,[(p_1 + q_2)^2 + p_2^2] + {}^1/_8\,[(q_1 + p_2)^2 + p_1^2]^2 \tag{6.2}$$

Из (6.2) видно, что $h^{(4)}$, а следовательно, и h — положительно определенные функции. Отсюда непосредственно следует устойчивость H, что означает устойчивость по Ляпунову рассматриваемого стационарного вращения сферического спутника на круговой орбите.

7. На основании описанного метода нормализации составим таблицу, позволяющую непосредственно по исходному гамильтониану

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (q_i^2 + p_i^2) + \sum_{|k+l|=3} \alpha_{kl} q^k p^l \tag{7.1}$$

выписать его нормальную форму третьего порядка.

Как было показано в п. 6, нормальную форму третьего порядка гамильтониана (7.1) можно представить в виде

$$h^{(3)} = \frac{1}{2}\sum \alpha_i (q_i^2 + p_i^2) + \sum_{|k+l|=3} \alpha_{kl}\overline{q^k p^l}$$

Значения усредненных величин берутся из таблицы в столбце с соответствующими значениями целочисленных n-векторов k и l (в таблице указаны значения только отличных от нуля компонент целочисленных векторов k и l)

$k = (k_1, \ldots, k_n)$	$l = (l_1, \ldots, l_n)$	$\overline{q^k p^l}$
$k_{i_1} = k_{i_2} = k_{i_3} = 1$	$l = 0$	$\langle + + + + \rangle q_{i_1}q_{i_2}q_{i_3} + \langle - + + - \rangle q_{i_1}p_{i_2}p_{i_3} +$ $+ \langle - + - + \rangle p_{i_1}q_{i_2}p_{i_3} + \langle - - + + \rangle p_{i_1}p_{i_2}q_{i_3}$
$k_{i_1} = k_{i_2} = 1$	$l_{i_3} = 1$	$\langle + + + + \rangle q_{i_1}q_{i_2}p_{i_3} + \langle + - - + \rangle q_{i_1}p_{i_2}q_{i_3} +$ $+ \langle + - + - \rangle p_{i_1}q_{i_2}q_{i_3} + \langle - - + + \rangle p_{i_1}p_{i_2}p_{i_3}$
$k_{i_1} = 1$	$l_{i_2} = l_{i_3} = 1$	$\langle + + + + \rangle q_{i_1}p_{i_2}p_{i_3} + \langle - + + - \rangle q_{i_1}q_{i_2}p_{i_3} +$ $+ \langle + + - - \rangle p_{i_1}q_{i_2}p_{i_3} + \langle + - + - \rangle p_{i_1}p_{i_2}q_{i_3}$
$k = 0$	$l_{i_1} = l_{i_2} = l_{i_3} = 1$	$\langle + + + + \rangle p_{i_1}p_{i_2}p_{i_3} + \langle - - + + \rangle q_{i_1}q_{i_2}p_{i_3} +$ $+ \langle - + - + \rangle q_{i_1}p_{i_2}q_{i_3} + \langle - + + - \rangle p_{i_1}q_{i_2}q_{i_3}$

Символ $\langle \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 \rangle$ $(\varepsilon_i = \pm 1)$ обозначает алгебраическую сумму $\varepsilon_1\chi_1 + \varepsilon_2\chi_2 + \varepsilon_3\chi_3 + \varepsilon_4\chi_4$ характеристических функций χ_i резонансов третьего порядка

$$\chi_i = \begin{cases} 0, & A_i \neq 0 \\ {}^1/_4, & A_i = 0 \end{cases}$$

$$A_1 = \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3}, \qquad A_2 = \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} - \alpha_{i_3}$$

$$A_3 = \alpha_{i_1} - \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3}, \qquad A_4 = -\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3}$$

Автор благодарит В. В. Румянцева и участников руководимого им семинара за полезное обсуждение результатов этой работы.

Поступила 2 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Moser J. K.* Lectures on Hamiltonian systems. Mem. Amer. Math. Soc., 1968, № 81. (Рус. перев.: Лекции о гамильтоновых системах. М., «Мир», 1973.)
2. *Birkhoff G. D.* Dynamical systems. N. Y., 1927. (Рус. перев.: Динамические системы. М.— Л., Гостехиздат, 1941.)
3. *Маркеев А. П.* Резонансные эффекты и устойчивость стационарных вращений спутника. Космические исследования, 1967, т. 5, вып. 3.
4. *Маркеев А. П.* Об устойчивости треугольных точек либрации в эллиптической ограниченной задаче трех тел. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
5. *Хазин Л. Г.* Об устойчивости гамильтоновых систем при наличии резонансов. ПММ, 1971, т. 35, вып. 3.
6. *Sigel C. L.* Vorlesungen über Himmelsmechanik. Berlin, Springer Verlag, 1957. (Рус. перев.: Лекции по небесной механике. М., Изд-во иностр. лит., 1959.)
7. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
8. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
9. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., «Наука», 1970.
10. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М., Физматгиз, 1959.
11. *Сокольский А. Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
12. *Сокольский А. Г.* Об устойчивости лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел при критическом соотношении масс. ПММ, 1975, т. 39, вып. 2.