Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 62—50

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ТИПА ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Л. Д. Акуленко

(Москва)

Рассматривается задача оптимального управления системой с нефиксированным моментом окончания процесса. Система уравнений движения содержит малый параметр и приводится к виду систем с вращающейся фазой. Предполагается, что частота зависит от «медленного времени», а управление входит в малые члены, так что система является слабо управляемой.

При помощи метода усреднения строится решение задачи оптимального управления, причем предполагается, что интервал времени, на котором развивается процесс, по величине порядка $1 / \varepsilon$, где ε — малый параметр. Это предположение оказывается естественным, если конечное многообразие зависит лишь от медленных переменных. Таким образом, исследуются интересные для практики случаи управляемых систем с малыми, но длительными управляющими воздействиями. При помощи развитой методики канонического усреднения решаются некоторые конкретные задачи.

1. Постановка задачи. Пусть движение системы описывается уравнениями

$$(1.1) \qquad a^{\cdot} = \varepsilon f(\tau, a, \psi, u, \varepsilon), \qquad a(t_0) = a_0$$

$$\psi^{\cdot} = \nu(\tau) + \varepsilon F(\tau, a, \psi, u, \varepsilon), \qquad \psi(t_0) = \psi_0$$

Здесь a — n-мерный вектор «медленных» переменных, принадлежащий некоторой ограниченной области определения и гладкости функций f и F; $\tau = \varepsilon(t - t_0) + \tau_0$ — медленное время, ψ — скалярная «быстрая» переменная (фаза), изменяющаяся на неограниченном интервале; ε — малый параметр, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$; t_0, τ_0, a_0 и ψ_0 — начальные данные, t — время, $t \in [t_0, t_1]$, $t_1 \sim 1 / \varepsilon$. Вектор управляющих функций $u(t)$ размерности m предполагается принадлежащим классу кусочно-непрерывных функций, таких, что решение системы (1.1) существует и единственно на рассматриваемом интервале времени. Функции f, ν и F предполагаются достаточно гладкими по медленным переменным, причем $\nu(\tau) \geqslant \nu_0 > 0$. Относительно быстрой фазы ψ функции f и E предполагаются периодическими с периодом 2π и кусочно-непрерывными. Требования гладкости по медленным переменным определяются порядком приближений (по степеням ε).

По аналогии с неуправляемыми системами [1-3] уравнения (1.1) можно назвать слабоуправляемой системой с вращающейся фазой. К виду (1.1) приводится ряд колебательных систем, подверженных возмущениям и малым управляющим воздействиям.

Ставится следующая задача оптимального управления. Найти такое кусочно-непрерывное управление $u(t)$, чтобы в некоторый нефиксированный момент t_1 медленные фазовые переменные принадлежали многообразию (1.2) и при этом достигался минимум функционала (1.3) (g — скалярная функция)

(1.2) $$G(\tau, a, \varepsilon)|_{t_1} = 0, \quad G = (G_1, \ldots, G_l), \quad 1 \leqslant l \leqslant n.$$

(1.3) $$J = g(\tau_1, a(t_1), \varepsilon) \to \min_{u \in U}, \quad \tau_1 = \varepsilon(t_1 - t_0) + \tau_0$$

Функции G и g предполагаются достаточно гладкими. Отметим, что к виду (1.3) приводится функционал

(1.4) $$J = g_1(\tau_1, a(t_1), \varepsilon) + \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} g_2(\tau, a, \psi, u, \varepsilon)\, dt$$

Действительно, введением дополнительной медленной переменной a_{n+1}, изменяющейся согласно уравнению

$$\dot{a}_{n+1} = \varepsilon g_2(\tau, a, \psi, u, \varepsilon), \quad a_{n+1}(t_0) = 0$$

функционал (1.4) принимает частный вид (1.3): $J = g_1(\tau_1, a(t_1), \varepsilon) + a_{n+1}(t_1)$.

Если многообразие (1.2) имеет вид $a(t_1) = a_1$, где a_1 — заданные величины, а функционал $y = \varepsilon t_1 \to \min$ по $u \in U$, то получаем задачу максимального быстродействия по медленным переменным. Отметим, что в задачах с малыми управляющими воздействиями значение быстрой переменной — фазы ψ обычно не фиксируют, т. е. ее первый конец свободный. Случаи, когда нужно учитывать зависимость от быстрой переменной ψ в (1.2), (1.3), а также, когда начальное многообразие имеет вид

$$L(\tau, a, \psi, \varepsilon)|_{t_0} = 0, \quad L = (L_1, \ldots, L_r), \quad 1 \leqslant r \leqslant n$$

требуют специального рассмотрения.

Предположим, что оптимальная задача (1.1) — (1.3) имеет, и притом единственное, решение для всех рассматриваемых достаточно малых значений параметра $\varepsilon > 0$. Тогда оптимальное управление и траектория удовлетворяют принципу максимума [4], который в рассматриваемом случае может быть сформулирован следующим образом.

Пусть p — n-мерный вектор переменных, сопряженных вектору a, а через q обозначим скалярную сопряженную переменную, соответствующую ψ. Тогда для оптимального управления $u^*(t)$ справедливо равенство в любой момент $t \in [t_0, t_1]$

(1.5) $$H^* \equiv \varepsilon(pf(\tau, a, \psi, u^*, \varepsilon)) + [\nu(\tau) + \varepsilon F(\tau, a, \psi, u^*, \varepsilon)]\, q = \max_{u \in U} \mathrm{H} \equiv \max_{u \in U} \{\varepsilon(pf(\tau, a, \psi, u, \varepsilon)) + [\nu(\tau) + \varepsilon F(\tau, a, \psi, u, \varepsilon)]\, q\}$$

Здесь

(1.6) $$H = \varepsilon(pf) + (\nu + \varepsilon F)q \equiv \nu q + \varepsilon h$$

— функция Гамильтона системы, (pf) означает скалярное произведение векторов p и f, а p и q удовлетворяют сопряженным уравнениям и условиям трансверсальности на правом конце

(1.7)
$$\dot{p} = -\varepsilon \frac{\partial (pf)}{\partial a}\bigg|_{u^*} - \varepsilon q \frac{\partial F}{\partial a}\bigg|_{u^*}, \quad p(t_1) = -\frac{\partial g}{\partial a}\bigg|_{t_1} - \frac{\partial (\alpha G)}{\partial a}\bigg|_{t_1}, \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_l)$$
$$\dot{q} = -\varepsilon \frac{\partial (pf)}{\partial \psi}\bigg|_{u^*} - \varepsilon q \frac{\partial F}{\partial \psi}\bigg|_{u^*}, \quad q(t_1) = 0$$

Переменные a и ψ удовлетворяют системе (1.1) с $u = u^*(t)$, причем в конце интервала должно выполняться равенство

(1.8)
$$H^*|_{t_1} = \varepsilon \frac{\partial g}{\partial \tau}\bigg|_{t_1} + \varepsilon \left(\alpha \frac{\partial G}{\partial \tau}\right)\bigg|_{t_1}$$

а в случае отсутствия зависимости от медленного времени

(1.9)
$$H^*(t) = H^*(t_1) = 0, \qquad t \in [t_0, t_1]$$

Если, например, ограничения на управление сняты, т. е. $u \in R_m$, то вследствие принятых предположений гладкости функций f и F необходимое условие максимальности H по u (1.5) при фиксированных других аргументах имеет вид

(1.10)
$$\partial H / \partial u_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

из которого могут быть определены искомые оптимальные управления как функции τ, a, ψ, p, q и ε

(1.11)
$$u^* = V(\tau, a, \psi, p, q, \varepsilon)$$

Здесь функция V предполагается достаточно гладкой и периодической по ψ с периодом 2π. Считается, что уравнения (1.10) однозначно разрешимы относительно компонент вектора u, а u^* действительно является точкой максимума. Эти условия, очевидно, выполняются, если функция H строго выпукла вверх, например отрицательно определенная квадратичная форма от u. Если же управления стеснены некоторыми геометрическими ограничениями, то оптимальное управление (1.11) определяется из общего условия (1.5), причем его определение предполагается однозначным, т. е. особые управления отсутствуют.

Итак, пусть достаточно гладкое управление V (1.11) определено и подставлено в уравнения (1.1), (1.6), правые части которых предполагаются гладкими относительно τ, a, p, q, ε и кусочно-непрерывными и периодическими с периодом 2π функциями ψ. Тогда среди решений полученной краевой задачи (1.1), (1.2), (1.7), (1.8), (1.11) находится оптимальное в смысле (1.3), при подстановке которого в (1.11) получается решение исходной задачи оптимального управления (1.1) — (1.3). Если решение краевой задачи единственно, то оно и определяет решение задачи оптимального управления [4]. Однако на ряде примеров и из общих соображений можно показать, что решение краевой задачи, точнее решение трансцендентного уравнения (1.8) или (1.9) относительно t_1, как правило, неоднозначно. Среди указанных решений выбирается оптимальное, дающее минимум функционалу (1.3). Такое решение существует в силу предположения о существовании и единственности решения задачи оптимального уравнения (1.1) — (1.3).

Следует отметить, что методы малого параметра применялись в [3,5–9]. Случаи асимптотически большого фиксированного момента окончания процесса управления $T \sim 1 / \varepsilon$ исследовались в [8,9] методом усреднения, асимптотические методы применялись в [3].

2. Построение канонической усредненной системы. Приближенное решение задачи. Система (1.1), (1.7), (1.11) — стандартная система с вращающейся фазой, к которой применим метод усреднения по быстрой переменной — фазе ψ [1–3]. Если гамильтониан (1.5) — достаточно гладкая функция медленных переменных, то усредненная система может быть построена с любой степенью точности по малому параметру ε. Ниже на основании развитого в [9] метода канонического усреднения строится новый (усредненный) гамильтониан, не содержащий быстрой переменной.

Итак, строится такая унивалентная каноническая замена исходных переменных (a, ψ, p, q) к новым (усредненным) переменным $(\xi, \varphi, \eta, \beta)$, чтобы, во-первых, соответствующая система уравнений не содержала быстрой переменной φ в правой части и, во-вторых, при $\varepsilon = 0$ исходные и новые переменные совпадали. Такая замена осуществляется при помощи производящей функции S [10]

$$p = \frac{\partial S}{\partial a}, \quad q = \frac{\partial S}{\partial \psi}, \quad \xi = \frac{\partial S}{\partial \eta}, \quad \varphi = \frac{\partial S}{\partial \beta} \quad (S = S(\tau, a, \psi, \eta, \beta, \varepsilon)) \tag{2.1}$$

где S при $\varepsilon = 0$ должна давать тождественное преобразование, т. е.

$$S = (a\eta) + \psi\beta + \varepsilon\sigma(\tau, a, \psi, \eta, \beta, \varepsilon) \tag{2.2}$$

Следовательно

$$p = \eta + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial a}, \quad q = \beta + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial \psi}, \quad \xi = a + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial \eta}, \quad \varphi = \psi + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \tag{2.3}$$

Так как исходный и новый гамильтониан при $\varepsilon = 0$ также должны совпадать, то усредненный гамильтониан K ищем в виде

$$K = K(\tau, \xi, \eta, \beta, \varepsilon) = \nu(\tau)\beta + \varepsilon k(\tau, \xi, \eta, \beta, \varepsilon) \tag{2.4}$$

Функции H, S и K стеснены следующим дифференциальным соотношением:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H^*\left(\tau, a, \psi, \frac{\partial S}{\partial a}, \frac{\partial S}{\partial \psi}, \varepsilon\right) = K(\tau, \xi, \eta, \beta, \varepsilon) \tag{2.5}$$

Это уравнение позволяет определить искомые функции с необходимой точностью. С учетом (2.3), подставляя представления (2.2) и (2.4), преобразуем полученное уравнение

$$\nu\frac{\partial \sigma}{\partial \psi} + h\left(\tau, a, \psi, \eta + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial a}, \beta + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial \psi}, \varepsilon\right) + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = k\left(a + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial \eta}, \eta, \beta, \varepsilon\right) \tag{2.6}$$

где $h = H^* - q\nu$. Решение уравнения (2.6) строим приближенно разложением в ряды по целым степеням малого параметра

$$\sigma = \sigma_0(\tau, a, \psi, \eta, \beta) + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2 + \ldots,\quad k = k_0(\tau, \xi, \eta, \beta) + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \ldots \tag{2.7}$$

Подставим ряды (2.7) в (2.6), разложим по малому параметру и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим последовательность зацепляющихся уравнений, решение которых позволяет найти искомые функции σ_i, k_i. Для коэффициентов разложений (2.7) справедливы представления

$$k_i(\tau, a, \eta, \beta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_i(\tau, a, \psi, \eta, \beta)\, d\psi \equiv \langle h_i \rangle \tag{2.8}$$

$$\sigma_i(\tau, a, \psi, \eta, \beta) = -\frac{1}{\nu(\tau)}\int (h_i - \langle h_i \rangle)\, d\psi, \quad i = 0, 1, 2, \ldots$$

Коэффициенты h_i определяются последовательно через известные величины. Например, первые три имеют вид

$$h_0(\tau, a, \psi, \eta, \beta) = h(\tau, a, \psi, \eta, \beta, 0) \tag{2.9}$$

$$h_1(\tau, a, \psi, \eta, \beta) = \frac{\partial\sigma_0}{\partial\tau} + \frac{\partial h_0}{\partial\eta}\frac{\partial\sigma_0}{\partial a} + \frac{\partial h_0}{\partial\beta}\frac{\partial\sigma_0}{\partial\psi} + \left(\frac{\partial h}{\partial\varepsilon}\right)_0 - \frac{\partial k_0}{\partial a}\frac{\partial\sigma_0}{\partial\eta}$$

$$h_2(\tau, a, \psi, \eta, \beta) = \frac{\partial\sigma_1}{\partial\tau} + \frac{\partial h_0}{\partial\eta}\frac{\partial\sigma_1}{\partial a} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_0}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial a}\right)^2 + \frac{\partial h_0}{\partial\beta}\frac{\partial\sigma_1}{\partial\psi} +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_0}{\partial\beta^2}\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial\psi}\right)^2 + \frac{\partial^2 h_0}{\partial\eta\,\partial\beta}\frac{\partial\sigma_0}{\partial a}\frac{\partial\sigma_0}{\partial\psi} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial\eta\,\partial\varepsilon}\frac{\partial\sigma_0}{\partial a} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial\beta\,\partial\varepsilon}\frac{\partial\sigma_0}{\partial\psi} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial\varepsilon^2}\right)_0 - \frac{\partial k_0}{\partial a}\frac{\partial\sigma_1}{\partial\eta} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_0}{\partial a^2}\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial\eta}\right)^2 - \frac{\partial k_1}{\partial a}\frac{\partial\sigma_0}{\partial\eta}$$

и так далее. Из (2.9), (2.8) следует, что количество коэффициентов ограничивается степенью гладкости исходного гамильтониана.

Если правые части системы (1.1), (1.7) при $u = V$ лишь кусочно-непрерывны по ψ, то можно выписать так называемую систему первого приближения и соответствующие начальные и краевые условия [11]

$$\xi^\cdot = \frac{\partial K}{\partial\eta} = \varepsilon\langle f_0^*(\tau, \xi, \eta, \beta)\rangle, \quad \xi(t_0) = a_0,\ G_0(\tau_1, \xi(t_1)) = 0 \tag{2.10}$$

$$\eta^\cdot = -\frac{\partial K}{\partial\xi} = -\varepsilon\frac{\partial}{\partial\xi}(\langle f_0^*\rangle\eta), \quad \eta(t_1) = -g'_{0\xi}|_{t_1} - (\alpha G'_{0\xi})_{t_1}$$

$$\varphi^\cdot = \frac{\partial K}{\partial\beta} = \nu(\tau) + \varepsilon\langle F_0^*(\tau, \xi, \eta, \beta)\rangle, \quad \varphi(t_0) = \psi_0$$

$$\beta = \mathrm{const}, \quad \beta(t_1) = \beta = 0$$

Здесь и в (2.8) угловые скобки означают усреднение по ψ, например

$$\langle f_0^*(\tau, \xi, \eta, \beta)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(\tau, \xi, \psi, \eta, \beta, 0)\, d\psi$$

а выражение типа (XY) означает, как и раньше, скалярное произведение векторов X и Y.

В краевой задаче первого приближения первые два векторные уравнения интегрируются независимо от φ, что позволяет ввести медленное время $s = \varepsilon (t - t_0)$

$$\frac{d\xi}{ds} = f_0(\tau, \xi, \eta), \quad \xi(0) = a_0, \quad G_0(\tau_1, \xi(s_1)) = 0 \tag{2.11}$$

$$\frac{d\eta}{ds} = -\frac{\partial}{\partial\xi}(f_0(\tau, \xi, \eta)\eta), \quad \eta(s_1) = -g'_{0\xi}(\tau_1, \xi(s_1)) - (\alpha G'_{0\xi}(\tau_1, \xi(s_1)))$$

Здесь $s_1 = \varepsilon (t_1 - t_0)$, а постоянная β с погрешностью порядка ε полагается равной нулю вследствие краевого условия. Действительно, из (2.3) и (1.7) следует, что

$$\beta = -\varepsilon \frac{\partial\sigma}{\partial\psi}\bigg|_{t_1} \sim O(\varepsilon)$$

Начальные и краевые условия для задачи первого приближения выписываются с погрешностью порядка ε, как и уравнения в медленном времени s.

Отметим, что в рассматриваемой задаче усредненная фаза — быстрая переменная φ — определяет ψ также с погрешностью порядка ε после интегрирования системы медленных переменных

$$\psi = \psi_0 + \int_{t_0}^{t} [\nu(\tau') + \varepsilon F_0(\tau', \xi(s'), \eta(s'))]\, dt' + O(\varepsilon) \tag{2.12}$$

В медленном времени s получим для φ

$$\varphi(s, \varepsilon) = \psi_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^s [\nu(\tau') + \varepsilon F_0(\tau', \xi(s'), \eta(s'))]\, ds' \tag{2.13}$$

Относительно краевой задачи (2.11) предполагается, что она допускает единственное решение для любого заданного $s_1 \sim 1$.

Рассмотрим теперь условие (1.8) как уравнение для определения момента окончания процесса управления. В это уравнение подставим найденные приближенные выражения

$$a = \xi(s, s_1) + O(\varepsilon), \quad p = \eta(s, s_1) + O(\varepsilon), \quad \beta = O(\varepsilon)$$

$$\psi = \varphi(s, s_1, \varepsilon) + O(\varepsilon)$$

Получим приближенное соотношение для определения s_1

$$h(s_1) = (\eta(s_1, s_1) f^*(\tau_1, \xi(s_1, s_1), \varphi(s_1, s_1, \varepsilon), \eta(s_1, s_1), 0, 0) + O(\varepsilon) = \partial g_0 / \partial\tau_1 + (\alpha \partial G_0 / \partial\tau_1) \tag{2.14}$$

Из вида левой части можно установить, что полученное трансцендентное уравнение допускает, вообще говоря, много корней, количество которых стремится к бесконечности как $[1 / \varepsilon]$ при $\varepsilon \to 0$, так как слева стоит быстро осциллирующая функция s_1 с частотой порядка $1 / \varepsilon$ и амплитудой порядка единицы. Множество корней $\{s_1^*\}$ этого уравнения образует дискретный интервал длины порядка единицы, а расстояние между соседними корнями порядка ε. Значения корней из этого множества определяются с необходимой погрешностью порядка ε^2. Очевидно, искомое оптимальное решение получается минимизацией приближенного значения функционала по множеству допустимых корней $\{s_1^*\}$.

Не уменьшая точности по медленным переменным и функционалу, величину s_1 можно определить с погрешностью также порядка ε. Тогда допустимое множество корней $\{s_1^*\}$ непрерывно, а в ε-окрестности любого значения находится корень уравнения в указанном выше смысле.

Найдем минимальное значение приближенного функционала и соответствующее значение s_1^*. Для этой цели воспользуемся выражением усредненного гамильтониана (2.4), содержащим неизвестный параметр β. Вычислим его значение с погрешностью порядка ε^2 с помощью второй формулы (2.3), взятой при $s = s_1$, и соответствующего выражения для σ_0 (см. (2.8), (2.9)). Получим

$$\beta = -\varepsilon \frac{\partial \sigma_0}{\partial \psi}\bigg|_{s_1} + O(\varepsilon^2) \tag{2.15}$$

если значение s_1 известно также с погрешностью $O(\varepsilon^2)$.

Выпишем выражение для усредненного гамильтониана

$$K(s_1) = \varepsilon (\eta \langle f_0^* \rangle)_{s_1} + \nu(\tau_1)\beta - \varepsilon\left(\frac{\partial g_0}{\partial \tau_1} + \left(\alpha \frac{\partial G_0}{\partial \tau_1}\right)\right) + O(\varepsilon^2) = 0 \tag{2.16}$$

Подставляя сюда выражение для β (2.15), получим то же уравнение (2.14) для приближенного определения неизвестного параметра задачи s_1.

Далее, однако, будем определять величину s_1 с погрешностью $O(\varepsilon)$. Полагая $\varkappa = \beta / \varepsilon$ и отбрасывая члены $O(\varepsilon)$, из (2.16) получим уравнение для s_1

$$(\eta \langle f_0^* \rangle)_{s_1} - \frac{\partial g_0}{\partial \tau_1} - \left(\alpha \frac{\partial G_0}{\partial \tau_1}\right) + \nu(\tau_1)\varkappa = 0 \tag{2.17}$$

Это уравнение с погрешностью $O(\varepsilon)$ позволяет определить момент s_1 окончания процесса как функцию параметра $\varkappa$ из некоторого непрерывного интервала, содержащего в силу (2.15) точку ноль. Как указывалось выше, величину $\varkappa$ следует выбрать такой, чтобы величина функционала (1.3), вычисленного приближенно

$$J_0(\varkappa) = g_0(\tau_1(\varkappa), \xi(s_1(\varkappa), s_1(\varkappa))) \tag{2.18}$$

достигала минимума по $\varkappa$ (или $s_1 = s_1(\varkappa)$). Необходимое условие минимума имеет вид

$$J_0'(\varkappa) = \left(\frac{\partial g_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}\frac{d\xi}{ds_1}\right)\frac{ds_1}{d\varkappa} = 0 \quad (\tau_1 = s_1 + \tau_0) \tag{2.19}$$

Предположим далее, что при помощи (2.17) между s_1 и $\varkappa$ в рассматриваемой области осуществляется взаимно однозначное соответствие, т. е.

$$\frac{ds_1}{d\varkappa} = 1 \bigg/ \frac{d\varkappa}{ds_1} = \nu^2 \bigg/ \left[\nu'\left((\eta f_0) - \frac{\partial g_0}{\partial \tau_1} - \left(\alpha \frac{\partial G_0}{\partial \tau_1}\right)\right) - \right.$$
$$\left. - \nu \frac{d}{ds_1}\left((\eta f_0) - \frac{\partial g_0}{\partial \tau_1} - \left(\alpha \frac{\partial G_0}{\partial \tau_1}\right)\right)\right] \neq 0 \tag{2.20}$$

Тогда необходимое условие минимума (2.19) приводится к виду

$$\frac{dg_0}{ds_1} = \frac{\partial g_0}{\partial \tau_1} + \frac{\partial g_0}{\partial \xi}\frac{d\xi}{ds_1} = 0 \tag{2.21}$$

Так как согласно (2.11)

$$\frac{\partial g_0}{\partial \xi}\bigg|_{s_1} = -[\eta + (\alpha G_{0\xi}')]_{s_1}$$

то для искомой производной справедливо выражение

$$\frac{dg_0}{ds_1} = \frac{\partial g_0}{\partial \tau_1} - (\eta f_0)_{s_1} - (\alpha G'_{0\xi})_{s_1} \frac{d\xi}{ds_1}, \qquad \xi = \xi(s_1, s_1)$$

Подставим теперь величину $(\eta f_0)_{s_1}$ согласно (2.17); получим

$$\frac{\partial g_0}{\partial s_1} = \frac{\partial g_0}{\partial \tau_1} - (\alpha G'_{0\xi})_{s_1} \frac{d\xi}{ds_1} + \left[\nu\varkappa - \frac{\partial g_0}{\partial \tau_1} - \left(\alpha \frac{\partial G_0}{\partial \tau_1}\right)\right]_{s_1} =$$

$$= \left(\alpha \frac{d}{ds_1} G_0(\tau_1, \xi(s_1, s_1))\right) + \nu(\tau_1)\varkappa, \qquad \alpha = \alpha(s_1)$$

Так как $G_0(\tau_1, \xi(s_1, s_1)) \equiv 0$ относительно s_1, то $dG_0 / ds_1 = 0$. В результате

(2.22) $\qquad dg_0 / ds_1 = \nu(\tau_1)\varkappa$

откуда следует, что

(2.23) $\qquad J_0'(\varkappa) = \dfrac{d}{d\varkappa} g_0 |_{s_1(\varkappa)} = \dfrac{ds_1}{d\varkappa} \nu(\tau_1)\varkappa, \qquad \tau_1 = \tau_1(\varkappa)$

Здесь функции $s_1(\varkappa)$ и $\tau_1(\varkappa)$ считаются вычисленными согласно (2.17). На основании предположений $\nu \geqslant \nu_0 > 0$ и (2.20) из (2.23) следует, что точка $\varkappa = 0$ является подозрительной на экстремум. Если имеет место неравенство

(2.24) $\qquad ds_1 / d\varkappa |_{\varkappa=0} > 0$

то значение $\varkappa = 0$ — точка локального минимума. Условие глобального минимума точки $\varkappa = 0$ на рассматриваемом интервале допустимых значений $\varkappa$ имеет вид

(2.25) $\qquad \displaystyle\int_0^{\varkappa} \nu(\tau_1(\varkappa')) \frac{ds_1(\varkappa')}{d\varkappa'} \varkappa' d\varkappa' \geqslant 0$

Полученное неравенство может быть преобразовано при помощи соотношения (2.17), записанного следующим образом:

(2.26) $\qquad -\chi(s_1(\varkappa)) + \nu(\tau_1(\varkappa))\varkappa = 0$

(2.27) $\qquad \chi(s_1) = \dfrac{\partial g_0}{\partial \tau_1} + \left(\alpha \dfrac{\partial G_0}{\partial \tau_1}\right) - (\eta f_0)_{s_1}, \qquad \tau_1 = s_1 + \tau_0, \qquad \alpha = \alpha(s_1)$

Из (2.26) находим $\varkappa = \chi / \nu$, что позволяет записать неравенство (2.25) в виде

(2.28) $\qquad \displaystyle\int_{s_1(0)}^{s_1} \chi(s_1') ds_1' \geqslant 0$

Здесь параметр задачи s_1 принадлежит некоторой рассматриваемой окрестности точки $s_1(0)$ — локально оптимального значения момента окончания процесса, соответствующего $\varkappa = 0$.

Итак, если неравенство (2.28) установлено, то этим завершается процедура построения оптимального решения первого приближения. Алгоритм решения задачи оптимального управления (1.1) — (1.3) сводится к решению краевой задачи (2.11) относительно $2n$ переменных ξ, η на ограниченном интервале ($s_1 \sim 1$), причем оптимальный момент окончания процесса управления задается соотношением (2.17), в котором $\varkappa = 0$. С погрешностью $O(\varepsilon)$ минимальное значение функционала (1.3) равно $J_0(0)$; приближенное оптимальное управление получается из (1.11) подстановкой в него найденных выражений

$$u_0^* = V(\tau, a, \psi, \eta, 0, 0) = V(\tau, \xi, \varphi, \eta, 0, 0) + O(\varepsilon) \tag{2.29}$$

Если зависимость от τ в первом приближении не имеет места, то алгоритм решения упрощается и сводится к построению решения краевой задачи

$$\frac{d\xi}{ds} = f_0(\xi, \eta), \quad \xi(0) = a_0, G_0(\xi)|_{s_1} = 0 \tag{2.30}$$

$$\frac{d\eta}{ds} = -\frac{\partial}{\partial\xi}(f_0(\xi, \eta)\eta), \quad \eta(s_1) = -g'_{0\xi}(\xi)|_{s_1} - (\alpha G'_{0\xi})_{s_1}$$

где s_1 — корень уравнения

$$k_0(s_1) = (\eta(s_1, s_1)), f_0(\xi(s_1, s_1), \eta(s_1, s_1)) = 0$$

Отметим, что порядок системы дифференциальных уравнений может быть понижен, так как $k_0(s) = 0$, $s \in [0, s_1]$. Для системы с одной степенью свободы решение находится в квадратурах. Некоторые примеры оптимального управления квазилинейными колебательными системами с одной степенью свободы решены в первом приближении в п. 3.

Рассмотрим кратко процедуру построения решения более высоких приближений по ε. Для этой цели должна быть выписана усредненная краевая задача нужного приближения при помощи формул (2.7) — (2.9), которая также позволяет ввести медленное время $s = \varepsilon(t - t_0)$

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{\partial}{\partial\eta}k(\tau, \xi, \eta, \beta, \varepsilon), \quad \xi(0) = \xi_0 \tag{2.31}$$

$$\frac{d\eta}{ds} = -\frac{\partial}{\partial\xi}k(\tau, \xi, \eta, \beta, \varepsilon), \quad \eta(s_1) = \eta_1$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\nu(\tau)}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial\beta}k(\tau, \xi, \eta, \beta, \varepsilon), \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \beta = \text{const}$$

Здесь неизвестные постоянные ξ_0, η_1, s_1, φ_0 и β определяются из начальных условий (1.1) для a, ψ, условий окончания процесса (1.2), условий трансверсальности на правом конце для сопряженных переменных (1.7) и условия равенства нулю гамильтониана в момент s_1. Так как величина s_1 находится, вообще говоря, неоднозначно, то для его определения используется условие минимума функционала (1.3), вычисленного с соответствующей точностью.

Приведем алгоритм решения. Пусть построено общее решение системы (2.31), зависящее от s и ξ_0, η_1, s_1, φ_0, β, ε как от параметров

$$\xi = \xi(s, \xi_0, \eta_1, s_1, \beta, \varepsilon), \quad \eta = \eta(s, \xi_0, \eta_1, s_1, \beta, \varepsilon) \tag{2.32}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^s \left[\frac{\nu(\tau')}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial\beta}k(\tau', \xi, \eta, \beta, \varepsilon)\right] ds'$$

Разрешим последние два уравнения (2.3) относительно a и ψ с нужной точностью по ε

$$a = \xi + \varepsilon A(\tau, \xi, \varphi, \eta, \beta, \varepsilon), \quad \psi = \varphi + \varepsilon\Psi(\tau, \xi, \varphi, \eta, \beta, \varepsilon) \tag{2.33}$$

и подставим в первые два соотношения; получим

$$p = \eta + \varepsilon P(\tau, \xi, \varphi, \eta, \beta, \varepsilon), \quad q = \beta + \varepsilon Q(\tau, \xi, \varphi, \eta, \beta, \varepsilon) \tag{2.34}$$

$$P = \frac{\partial}{\partial a}\sigma(\tau, \xi + \varepsilon A, \varphi + \varepsilon\Psi, \eta, \beta, \varepsilon),$$

$$Q = \frac{\partial}{\partial \psi}\sigma(\tau, \xi + \varepsilon A, \varphi + \varepsilon\Psi, \eta, \beta, \varepsilon)$$

Здесь A, Ψ, P, Q — известные функции. Для построения первых двух из них можно использовать метод разложения в ряды или схему последовательных приближений по степеням ε.

В результате для определения неизвестных параметров ξ_0, φ_0, η_1, s_1 и β получим с нужной точностью систему

$$\begin{aligned} &\xi_0 + \varepsilon A(\tau_0, \xi_0, \varphi_0, \eta(0), \beta, \varepsilon) = a_0 \\ &\varphi_0 + \varepsilon\Psi(\tau_0, \xi_0, \varphi_0, \eta(0), \beta, \varepsilon) = \psi_0 \\ &G(\tau_1, \xi(s_1), \varphi(s_1), \eta_1, \beta, \varepsilon) = 0 \\ &\eta_1 + \varepsilon P(\tau_1, \xi(s_1), \varphi(s_1), \eta_1, \beta, \varepsilon) = -g_a'|_{s_1} - (\alpha G_a')_{s_1} \\ &\beta = -\varepsilon Q(\tau_1, \xi(s_1), \varphi(s_1), \eta_1, \beta, \varepsilon) \\ &H^*|_{s_1} = \frac{\partial g}{\partial \tau}\Big|_{s_1} + \left(\alpha\frac{\partial G}{\partial \tau}\right)_{s_1} \end{aligned} \tag{2.35}$$

Как показано для случая первого приближения, решение последнего трансцендентного уравнения системы (2.35) относительно s_1 находится с соответствующей точностью, вообще говоря, неоднозначно. Для параметра s_1 получается дискретное множество значений (порядка $[1/\varepsilon]$) на интервале конечной длины, причем расстояние между соседними корнями порядка ε. Для выбора оптимального значения должен быть использован критерий качества управления (1.3), причем величину s_1 можно выбирать из некоторого непрерывного отрезка.

Очевидно, в случае более высоких приближений допустимые значения s_1 образуют, вообще говоря, дискретное множество. Оптимальное значение s_1 находится из условия минимума функционала (1.3), вычисленного с соответствующей точностью, минимизацией по дискретному множеству $\{s_1^*\}$

$$J^* = \min_{\{s_1^*\}} g(\tau_1, \xi(s_1, s_1) + \varepsilon A|_{s_1}, \varepsilon) \tag{2.36}$$

где $\{s_1^*\}$ — множество допустимых корней системы (2.35). Очевидно, что оптимальное значение s_1^* лежит в ε-окрестности величины $s_1(0)$, найденной из (2.17) при $\varkappa = 0$.

Решение задачи оптимального управления (1.1) — (1.3) строится аналогично рассмотренному выше случаю первого приближения; соответствующее приближенное оптимальное управление строится при помощи выражения (1.11), в которое подставляются найденные решения (2.34) (и (2.33)).

Отметим, что если управляющая вектор-функция стеснена некоторыми геометрическими ограничениями, то и в этом случае может быть развита аналогичная процедура построения приближенного решения. Так как правые части, как правило, лишь кусочно-непрерывны, то удается построить только первое приближение. Некоторые конкретные задачи решены в п. 3.

3. Примеры. Исследуем в первом приближении некоторые слабоуправляемые колебательные системы.

Пусть имеет место квазилинейная управляемая система с одной степенью свободы вида

$$x^{\cdot\cdot} + \nu^2(\tau)\, x = \varepsilon f(\tau, x, x^{\cdot}, u), \; x(t_0) = x_0, \quad x^{\cdot}(t_0) = x_0^{\cdot} \tag{3.1}$$

Здесь τ — медленное время, x — координата, $x^{\cdot}$ — скорость, u — скалярное управление, f — некоторая достаточно гладкая функция. При $\varepsilon = 0$ частота $\nu = \mathrm{const}$, а x и $x^{\cdot}$ — периодические функции времени

$$x = a\sin\psi, \; x^{\cdot} = a\nu\cos\psi, \; \psi = \nu t + \psi_0 \tag{3.2}$$

$$a = (x_0^2 + x_0^{\cdot 2}/\nu^2)^{1/2} > 0, \; \psi_0 = \operatorname{arctg} x_0 \nu / x_0^{\cdot}$$

где a — амплитуда колебаний, ψ — фаза, ψ_0 — постоянная.

При $\varepsilon \neq 0$ в новых переменных a, ψ, связанных с исходными соотношениями (3.2), система описывается уравнениями типа (1.1)

$$a^{\cdot} = \frac{\varepsilon}{\nu}[f(\tau, a\sin\psi, a\nu\cos\psi, u) - a\nu'\cos\psi]\cos\psi, \qquad a(t_0) = a_0 \tag{3.3}$$

$$\psi^{\cdot} = \nu(\tau) - \frac{\varepsilon}{\nu a}[f(\tau, a\sin\psi, a\nu\cos\psi, u) - a\nu'\cos\psi]\sin\psi, \quad \psi(t_0) = \psi_0$$

Поставим задачу изменить амплитуду колебаний системы (3.3)

$$a(t_1) = a_1(\tau_1) \tag{3.4}$$

где a_1 — заданная функция τ, большая нуля, а t_1 не фиксировано. При этом критерий качества управления

$$J = \varepsilon \int_{t_0}^{t_1} [k(\tau) + l(\tau) u^2]\, dt \to \min, \qquad k, l > 0 \tag{3.5}$$

по u. В (3.5) первый член — «плата» за величину времени, а второй — соответствующий расход ресурсов управления.

Далее будем рассматривать случай линейной по u функции f

$$f(\tau, x, x^{\cdot}, u) = f_0(\tau, x, x^{\cdot}) + f_1(\tau, x, x^{\cdot})\, u \tag{3.6}$$

Выписывая функцию Гамильтона (1.6), получим из (1.10)

$$u^* = V(\tau, a, \psi, p, q) = \tag{3.7}$$

$$= \frac{1}{2l(\tau)\nu(\tau)} f_1(\tau, a\sin\psi, a\nu(\tau)\cos\psi)\left(p\cos\psi - \frac{q}{a}\sin\psi\right)$$

Очевидно, u^* — единственная точка максимума функции H по u, который равен

$$H^* = \frac{\varepsilon}{\nu}(f_0 - a\nu'\cos\psi)\left(p\cos\psi - \frac{q}{a}\sin\psi\right) + \frac{\varepsilon}{4\nu^2 l} f_1^2\left(p\cos\psi - \frac{q}{a}\sin\psi\right) +$$

$$+ \nu q - \varepsilon k \equiv \nu q + \varepsilon h(\tau, a, \psi, p, q)$$

Краевая задача описывается уравнениями (3.3), в которые подставлено выражение (3.7), условием (3.4), а также уравнениями для сопряженных переменных p и q

типа (1.7) и условиями трансверсальности, имеющими вид

$$p^{\cdot} = -\varepsilon\, \partial h/\partial a,\ p\,(t_1) = -\alpha;\quad q^{\cdot} = -\varepsilon\, \partial h/\partial\psi,\ q\,(t_1) = 0$$

Уравнение типа (1.8), используемое для определения момента окончания процесса t_1, имеет вид: $h\,(t_1) = \alpha\,(t_1)\,a_1'\,(\tau_1)$, где штрих означает производную по τ_1.

Применим развитую для построения первого приближения методику в простом случае, когда зависимость от τ отсутствует, а $t_0 = 0$, $f_0 \equiv 0$, $l = f_1 = 1$. Тогда на основании (2.30) получим

$$\xi = -\alpha s\,/\,4\,\nu^2 + a_0,\quad \eta = -\alpha,\quad s = \varepsilon t,\quad \alpha = 4\nu^2\,(a_0 - a_1)\,/\,s_1$$

Уравнение для определения оптимального s_1 имеет вид: $\alpha^2 = 8\,\nu^2\,(k - \nu\varkappa)$, откуда, полагая $\varkappa = 0$, находим $s_1\,(0) = \nu\,\sqrt{2\,/\,k}\,\mid a_0 - a_1\mid$.

Покажем, что условие локального минимума (2.24) выполнено, т. е. $ds_1\,/\,d\,\varkappa\,|_{\varkappa=0} > 0$ или, что то же самое, $d\varkappa\,/\,ds_1\,|_{s_1=s_1(0)} > 0$. Действительно, так как $\varkappa = [k - 2\,\nu^2\,(a_0 - a_1)^2\,/\,s_1^2]\,/\,\nu$, то

$$\left.\frac{d\varkappa}{ds_1}\right|_{s_1=s_1(0)} = \frac{4\nu}{s_1^3\,(0)}\,a_0 - a_1)^2 > 0$$

Покажем также, что выполняется условие глобального минимума (2.28). Действительно

$$\int\limits_{s_1(0)}^{s_1} \chi_1\,(s_1')\,ds_1' = \frac{k}{s_1}\,[s_1 - s_1\,(0)]^2/s_1 \geqslant 0$$

Таким образом, приближенное решение задачи (3.3) — (3.5) имеет вид

$$\xi = -\frac{s}{s_1\,(0)}\,(a_0 - a_1) + a_0 = \frac{1}{\nu}\sqrt{\frac{k}{2}}\,\mathrm{sign}\,(a_1 - a_0) + a_0$$

$$u_0^* = \frac{\eta}{2\nu}\cos\psi = \sqrt{2k}\,[\mathrm{sign}\,(a_1 - a_0)]\cos\psi,\qquad \psi = \frac{\nu s}{\varepsilon} + \psi_0 + O\,(\varepsilon)$$

$$J_0\,(0) = 2s_1\,(0)\,k = 2\nu\,\sqrt{2k}\,|\,a_0 - a_1|$$

причем «временные затраты» и затраты ресурсов управления равны.

Для сравнения рассмотрим аналогичную задачу с ограничением на управление: $|\,u\,| \leqslant u_0$, а в качестве критерия возьмем время: $J = \varepsilon t_1 \to \min$ по $|\,u\,| \leqslant u_0$. Решение задачи в первом приближении имеет вид

$$\xi = \frac{2}{\pi\nu}\,u_0 s\,\mathrm{sign}\,(a_1 - a_0) + a_0,\qquad s_1 = \frac{\pi\nu}{2u_0}\,|\,a_1 - a_0\,|$$

$$u_0^* = u_0\,\mathrm{sign}\,[(a_1 - a_0)\cos\psi],\qquad \psi = \frac{\nu s}{\varepsilon} + \psi_0 + O\,(\varepsilon)$$

Пусть времена окончания процесса для обеих постановок задач взяты одинаковыми, т. е. $\nu\,\sqrt{2\,/\,k}\,\mid a_0 - a_1\mid = \pi\nu\,\mid a_1 - a_0\,|\,/\,2u_0$, что соответствует значению $u_0 = \pi\sqrt{k\,/\,2}\,/\,2$. Вычислим соответствующие управлению с указанным u_0 затраты ресурсов управления; получим

$$\int\limits_0^{s_1} u^2 ds = \frac{\pi^2}{4}\,\nu\,\sqrt{\frac{k}{2}}\,|\,a_1 - a_0\,|$$

Возьмем отношение к затратам, полученным для критерия качества типа (3.5) $u_0^2 s_1\,/\,s_1\,(0)\,k = \pi^2\,/\,8 > 1$. Таким образом, в указанном смысле управление при помощи управления типа (3.7) оказывается более «экономным».

Отметим, что система типа (3.1) с фиксированным моментом окончания процесса управления $T \sim 1\,/\,\varepsilon$ исследовалась в [9] для различных видов функционала и ограничений на управление.

Пусть теперь (см. [9]) $f = f_0(\tau, x, x^\cdot) + d(\tau)\,u$; тогда для критерия (3.5) получим краевую задачу

$$
\frac{d\xi}{ds} = \frac{1}{\nu} f_{0c} + \frac{1}{4\nu^2}\frac{d^2}{l}\eta, \quad \xi(s_0) = a_0, \quad \xi(s_1) = a_1(\tau_1) \tag{3.8}
$$

$$
\frac{d\eta}{ds} = \frac{1}{2}\frac{\nu'}{\nu}\eta - \frac{1}{\nu}\frac{\partial f_{0c}}{\partial\xi}\eta, \quad \eta(s_1) = -\alpha, \quad s = \varepsilon t
$$

$$
\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\nu}{\varepsilon} - \frac{1}{\nu\xi} f_{0s}, \quad \varphi(s_0) = \psi_0
$$

Здесь

$$
\begin{Bmatrix} f_{0c} \\ f_{0s} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{0c}(\tau, \xi) \\ f_{0s}(\tau, \xi) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\tau, \xi\sin\psi, \xi\nu\cos\psi)\begin{Bmatrix}\cos\psi \\ \sin\psi\end{Bmatrix} d\psi
$$

Момент окончания процесса s_1 определяется из соотношения

$$
\frac{1}{\nu}\left(f_{0c} - \frac{\xi\nu'}{2}\right)\eta\Big|_{s_1} + \frac{d^2}{4\nu^2 l}\frac{\eta^2}{2}\Big|_{s_1} = \alpha a_1'(\tau_1) + k
$$

Возьмем, например, $\nu = \text{const}$, $l = d = 1$, $f_0 = -2\lambda x^\cdot + \mu x^3$; тогда полагая $t_0 = 0$, получим точное решение усредненной краевой задачи (3.8) в виде

$$
\xi(s, s_1) = a_0 e^{-\lambda s} + \frac{\eta_1}{8\lambda\nu^2} e^{\lambda(s-s_1)}(1 - e^{-2\lambda s}), \quad \lambda, \mu = \text{const} \tag{3.9}
$$

Здесь

$$
\eta_1 = \eta(s_1, s_1) = 8\lambda\nu^2 \frac{a_1 - a_0 e^{-\lambda s_1}}{1 - e^{-2\lambda s_1}}, \quad \eta(s, s_1) = \eta(s_1, s_1)\, e^{\lambda(s-s_1)}, \quad a_1 = \text{const}
$$

Полагая $z = e^{-\lambda s_1}$, для z получим уравнение четвертого порядка, разрешая которое при условии $z > 0$, находим

$$
z_{1,2} = \frac{a_0}{2c_{1,2}} + \sqrt{\left(\frac{a_0}{2c_{1,2}}\right)^2 + 1 - \frac{a_1}{c_{1,2}}} \tag{3.10}
$$

$$
c_{1,2} = a_1\left(\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{k}{8\lambda^2\nu^2 a_1^2}}\right)
$$

Здесь знак плюс соответствует положительному η_1, т. е. возрастанию ξ $(a_1 / a_0 > 1)$, а минус убыванию ξ. Из полученного выражения следует, что при $a_0 = a_1$ оба корня $z_{1,2} = 1$, т. е. $s_1 = 0$. Значения $z_{1,2}$ должны удовлетворять неравенству $z_{1,2} \leqslant 1$, что эквивалентно неотрицательности s_1.

Исследуем корни $z_{1,2}$ в предположении, что $|a_1 - a_0| \ll a_0, a_1$. В первом приближении по $\Delta a = a_0 - a_1$ получим

$$
\Delta z_{1,2} \equiv z_{1,2} - 1 \approx \frac{\Delta a}{2c_{1,2} - a_1} = \pm\frac{\Delta a}{a_1 R_1} \approx \pm\frac{\Delta a}{a_0 R_0}, \quad R_i = (1 + k / 2\nu^2\lambda^2 a_i^2)^{1/2}, \quad i = 0, 1
$$

Из полученного выражения для $\Delta z_{1,2}$ следует, что $\Delta z_{1,2} \leqslant 0$ для любых достаточно малых значений $|\Delta a|$, независимо от знака Δa, так как для отрицательного Δa следует брать знак плюс, а для положительного Δa — знак минус. Таким образом, задача имеет решение, оптимальное в смысле (3.5). Для задачи раскачки $(a_1 > a_0)$ или гашения колебаний $(a_1 < a_0)$ оптимальные моменты времени s_1 окончания процесса управления равны

$$
s_1 = -\frac{1}{\lambda}\ln z_{1,2} \approx \frac{|\Delta z|}{\lambda} \tag{3.11}
$$

Приближенное значение оптимального управления имеет вид ($\Omega = \Omega(s)$ —возмущенная частота колебаний)

$$u_0^* = \frac{1}{\nu}\eta(s, s_1)\cos\psi, \quad \psi = \psi_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \Omega(s')\,ds' + O(\varepsilon) \tag{3.12}$$

$$\Omega(s) = \nu - \frac{3}{8}\frac{\varepsilon\mu}{\nu}\xi^2(s, s_1)$$

Формулы (3.9) — (3.12) дают приближенное решение задачи оптимального управления.

Автор благодарит Ф. Л. Черноусько и Г. К. Пожарицкого за внимание к работе и важные замечания.

Поступила 17 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
2. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. Изд-во МГУ, 1971.
3. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.
4. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.
5. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., «Наука», 1967.
6. *Моисеев Н. Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. М., «Наука», 1971.
7. *Черноусько Ф. Л.* Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
8. *Евтушенко Ю. Г.* Приближенный расчет задач оптимального управления. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
9. *Акуленко Л. Д.* Исследование некоторых оптимальных систем методом усреднения. ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
10. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М., «Наука», 1966.
11. *Самойленко А. М.* Обоснование принципа усреднения для дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. В сб.: Приближенные методы решения дифференциальных уравнений. Киев, Изд-во АН УССР, 1963.