Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 62—50

ИГРОВАЯ ЗАДАЧА ИМПУЛЬСНОГО СБЛИЖЕНИЯ С ПРОТИВНИКОМ ОГРАНИЧЕННЫМ ПО ЭНЕРГИИ

Г. К. Пожарицкий

(Москва)

Рассматривается следующая задача. Две материальные точки $m_{1,2}$ (первый, второй игроки) [1,2] движутся в трехмерном пространстве под действием позиционных сил $F_{1,2} = -\omega^2 m_{1,2} r_{1,2}$ притяжения к неподвижному центру и управляющих сил $f_{1,2}$, произвольных по направлению. Предполагается, что число $\omega^2 \geqslant 0$, массы $m_{1,2}$ постоянны, а $r_{1,2}$ — радиус-векторы точек относительно центра. Сила $f_1 = m_1 u$ ограничена по полному импульсу [3–5], а сила $f_2 = -m_2 v$ ограничена по энергии

$$\nu_0^2 - \int_0^\tau v^2 dt = \nu^2(\tau) \geqslant 0, \qquad \nu = \sqrt{\nu^2} \geqslant 0$$

Задача первого (второго) игрока — минимизация (максимизация) времени сближения с противником на расстоянии $R = |r_1 - r_2| \geqslant 0$. По способам решения работа примыкает к [5,6].

1. После нормировки, приводящей к равенству $\omega^2 = 1$ (при $\omega^2 > 0$) в переменных $x_1 = r_1 - r_2$, $y_1 = r_1^{\bullet} - r_2^{\bullet}$, $x = |x|$, y_α, y_β, уравнения относительного движения примут вид

$$x^{\bullet} = y_\alpha, \quad y_\alpha^{\bullet} = -x + y_\beta^2 / x + u_\alpha + v_\alpha \tag{1.1}$$
$$y_\beta^{\bullet} = -y_\alpha y_\beta / x + u_\beta + v_\beta, \quad \mu^{\bullet} = -|u|, \quad (\nu^2)^{\bullet} = -v^2$$

Вектор j_α ($|j_{\alpha,\beta,\gamma}| = 1$) выбирается вдоль вектора x_1, вектор j_β — вдоль трансверсальной y_β^1 составляющей вектора y_1, вектор j_γ дополняет тройку. Если $y_\beta^1 = 0$, то пара ортов $j_{\beta,\gamma}$ направлена произвольно в плоскости, нормальной к j_α. Нижние индексы указывают на проекции по ортам. При $y_\beta = 0$ третье уравнение системы (1.1) принимает вид

$$y_\beta^{\bullet} = [(u_\beta + v_\beta)^2 + (u_\gamma + v_\gamma)^2]^{1/2}$$

Движение в силу системы (1.1) происходит при фазовых ограничениях $\mu \geqslant 0$, $\nu^2 \geqslant 0$. Импульсное $u = \mu_1 \delta$ управление первого игрока переводит позицию $w\,[x, y_\alpha, y_\beta, \mu, \nu]$ в результат импульса

$$w^{(1)}\,[x,\ y_\alpha^{(1)},\ y_\beta^{(1)},\ \mu^{(1)},\ \nu]$$
$$y_\alpha^{(1)} = y_\alpha + \mu_{1,\alpha}, \qquad y_\beta^{(1)} = [(y_\beta + \mu_{1,\beta})^2 + \mu_1{}^2\gamma]^{1/2}, \ \mu^{(1)} = $$
$$= \mu - |\mu_1| \geqslant 0$$

Определение допустимых пар $u\,(w,\ v)$, $v\,(w)$ повторяет статью [5].

Условимся о некоторых обозначениях. Число x и вектор j_α при сдвиге вдоль траектории системы (1.1) при $u + v = 0$ преобразуются к моменту t в число $x_t = [(xb_t + y_\alpha a_t)^2 + y_\beta{}^2 a_t{}^2]^{1/2}$, $a_t = \sin t$, $b_t = \cos t$ и вектор $j_{\alpha,t} = [(xb_t + y_\alpha a_t) j_\alpha + y_\beta a_t j_\beta] / x_t |$.

Ниже в пространстве w, t будет вводиться различными способами функция $\zeta(w, t)$ и функция $t_\zeta(w)$ — минимальный положительный нуль функции ζ. Замена нижнего индекса t на индекс ζ во всех случаях обозначает, что $t = t_\zeta$. Например, $a_\zeta = \sin t_\zeta(w)$, $x_\zeta = x_{t=t_\zeta}$.

Если область $D_{j,t}$ задается некоторым способом, например

$$D_{1,t}\,[R - \nu\sqrt{t/2 - (\sin 2t)/4} \geqslant 0,\ t \in (0, \pi/2]]$$

и обозначает, что числа ν, t одновременно удовлетворяют обеим оценкам, то область

$$D_{1,\zeta}\,[R - \nu\sqrt{t_\zeta/2 - (\sin 2t_\zeta)/4} \geqslant 0, \qquad t_\zeta \in (0, \ \pi/2]]$$

указывает на ограничения в пространстве w.

Пусть первый игрок при $t = 0$ реализовал импульс $u = \mu_1\delta$ и при $t > 0$ применяет конечное u, а второй игрок применяет v, и движение при $t > 0$ вытекает из результата импульса $w^{(1)}$. Обозначение $t_\zeta{}^\cdot\,(w^{(1)}, u, v)$ относится к правой производной функции t_ζ вдоль движения в силу системы (1.1).

2. Построение решения разобьем на ряд вспомогательных задач.

Задача 2.1. Пусть $\mu = 0$. Найти управление $v^\circ(w, \mu = 0)$ и время $t_\zeta(w, \mu = 0)$ медленнодействия на множество $M\,[x = R > 0]$. Ограничение $R > 0$ необходимо для того, чтобы задача 2.1 имела смысл, а ее решение будем искать в области $W_1\,[x > R]$. Интегрирование характеристик [1], применяемое по схеме [6] в неподвижной системе координат x_1, y_1, приводит к следующим выводам.

2.1.1. Пусть $w \in W_1$ — некоторая позиция, для которой существует непрерывно дифференцируемая в этой позиции функция $t_\zeta(w, \mu = 0)$, и оптимальная траектория, исходящая из w, попадает на множество M в точку x_1, тогда при $t_\zeta < \pi$ управление v° имеет вдоль траектории постоянное направление — $x_1 / | x_1 |$, а его модуль вдоль траектории изменяется по закону $| v^\circ | = c(w) \sin(t_\zeta - t)$, где $c(w) \geqslant 0$ зависит только от траектории (характеристики).

2.1.2. Формальное приложение необходимых условий приводит к выводу о том, что производные $\partial t_\zeta / \partial \nu^2 > 0$ должны быть постоянными вдоль характеристик основного уравнения [1]. С другой стороны, имеется очевидное равенство $\partial t_\zeta / \partial \nu^2 |_{w \in M} = 0$. Это заставляет предположить, что указанные производные разрывны. Трудность преодолевает очевидное соображение: управление v° медленнодействия расходует весь энергетический ресурс ν^2. Последнее предположение приводит к равенствам

$$\int_{t_\zeta}^{0} c^2 \sin^2(t_\zeta - t)\, dt = \nu^2 \tag{2.1}$$

$$c(w) = \nu / d_\zeta, \qquad d_t = \sqrt{t/2 - (\sin 2t)/4}$$

Зафиксируем в качестве неподвижной тройку $j_{\alpha,\beta,\gamma}$, отвечающую некоторой позиции w. Согласно 2.1.1 вдоль характеристики управление

v° будет иметь вид

$$v^\circ = (v_\alpha{}^\circ j_\alpha + v_\beta{}^\circ j_\beta)\, c \sin (t_\zeta - t)$$

Здесь $t > 0$ — время движения вдоль характеристики, а функция t_ζ и вектор

$$v_\alpha{}^\circ j_\alpha + v_\beta{}^\circ j_\beta = - x_1 \,/\, | x_1 | = x_1 (t_\zeta) \,/\, | x_1 (t_\zeta) | \tag{2.2}$$

подлежат определению, но вдоль характеристики постоянны. Компоненты $x_{\alpha,\zeta}$, $x_{\beta,\zeta}$ вектора $x_1 (t_\zeta)$ отвечают по формуле Коши уравнениям

$$x_{\alpha,\zeta} = x b_\zeta + y_\alpha a_\zeta + v_\alpha{}^\circ c \int_0^{t_\zeta} \sin^2 (t_\zeta - t)\, dt \tag{2.3}$$

$$x_{\beta,\zeta} = y_\beta a_\zeta + v_\beta{}^\circ c \int_0^{t_\zeta} \sin (t_\zeta - t)\, dt$$

Равенства (2.1) — (2.3) и условие непрерывности t_ζ на множестве M позволяют искать t_ζ как наименьший нуль функции $\zeta = R - \nu d_t - x_t$.

Функция $\zeta (w, t)$ получается наложением на периодическую по t функцию $R - x_t$ монотонно убывающей функции $- \nu d_t$. Нетрудно проверить, что на периоде $t \in (0, \pi)$ функции $R - x_t$ может присутствовать не более двух $\tau_1 < \tau_2$ точек изолированного максимума функции ζ, причем справедлива оценка $\zeta_1 \equiv \zeta (w, \tau_1) > \zeta_2 \equiv \zeta (w, \tau_2)$ при $\nu > 0$. При $y_\alpha = 0$ возможен еще случай, когда $\zeta_{t=0}' = 0$, $\zeta_{t=0}'' < 0$, т. е. «изолированный при $t > 0''$» максимум при $t = 0$. Однако оценка $\zeta_1 > \zeta_2$ для тех позиций, в которых существует $\tau_2 < \pi$, гарантирует непрерывность [5] функции t_ζ $(w, \mu = 0)$ в области $t_\zeta \in (0, \pi)$. Это важное обстоятельство наряду с равенством $\zeta'_{t=0} = y_\alpha$ позволяет утверждать, что t_ζ — первый момент попадания траектории w° на множество M из позиции w. Траектории w° рождается управлением

$$v^\circ = a_\zeta (\nu \,/\, d_\zeta) j_{\alpha,\zeta}, \qquad w \in W^{\circ,\circ} \in [x_\zeta > 0]$$

$$v^\circ = a_\zeta (\nu \,/\, d_\zeta) j_s, \qquad w \in W^{\circ,\circ} \cap [x_\zeta^\cdot = 0]$$

$$s = + \nu d_\zeta / \sqrt{(- x b_\zeta + y_\alpha a_\zeta)^2}, \qquad j_s = s j_\alpha + \sqrt{1 - s^2}\, j_\beta$$

где через $W^{\circ,\circ}$ $[\zeta_1 \geqslant 0]$ обозначена область, допускающая нуль t_ζ. Управление v° удовлетворяет всем необходимым условиям в области $w \in W^{\circ,\circ} \cap [x_\zeta > 0]$. Можно показать, что в позициях $w \in [t_\zeta = \tau_1]$ управление v° реализует равенство

$$0 = \zeta_1^\cdot (w, v^\circ) \leqslant \zeta_1^\cdot (w, v)$$

Это равенство и оценка были основой для построения v° в позициях $w \in [x_\zeta = 0]$, поскольку здесь характеристики слипаются и допускают целый «пучок» оптимальных управлений v° с одинаковым временем t_ζ. Ясно, что на множестве $[\tau_1 = t_\zeta]$ производные $\partial t_\zeta \,/\, \partial w$ не существуют. Это замечание справедливо и в дальнейшем.

По аналогии с [5,6] продолжим управление в область $W_{0,0} = [x > R] \,/\, / \, W^{\circ,\circ}$ по равенствам

$$v_0 = v^\circ(w,\ t_\zeta = \tau_1),\quad w \in W_{0,0} \cap [\zeta(w,\ 0) < \zeta_1] \equiv W_{1,0,0}$$
$$v_0 = 0,\quad w \in W_{0,0} \setminus W_{1,0,0}$$

Теорема 2.1. В области $W^{\circ,\circ}$ управление v° реализует медленнодействие $t_\zeta(w, \mu = 0)$, а в области $W_{0,0}$ управление v_0 уклоняет позицию от множества M.

Для доказательства первого утверждения достаточно проверить оценку $-1 = t^{\cdot}_\zeta(w, v^\circ) \geqslant t_\zeta^{\cdot}(w, v)$ для $w \in [x_\zeta > 0]$ и для тех управлений v (в позициях $w \in [x_\zeta = 0]$), которые реализуют конечную производную $t_\zeta^{\cdot}$, и показать, что для остальных неоптимальных управлений справедливо соотношение

$$t_\zeta^{\cdot}(w \to [x_\zeta = 0],\ v) \to -\infty$$

Второе утверждение вытекает из оценки

$$(\max_t \zeta(w,\ t \in [0,\ \pi/2]))^{\cdot}_{v=v_0} \leqslant 0$$

Эта оценка обращается в равенство при $w \in W_{1,0}$ и в строгое неравенство при $w \in W_{0,0} \setminus W_{1,0}$.

Таковы результаты решения задачи 2.1.

3. Предыдущий опыт [5,6] показывает, что оптимальное управление первого игрока является импульсным, поэтому для многих позиций сформулируем еще одну вспомогательную задачу.

Задача 3.1. Среди импульсных управлений $u = \mu_1\delta$, $|\mu_1| \leqslant \mu$ найти управление u°, отвечающее равенству

$$t_\zeta^{(1)}(w) = \min{}_u t_\zeta(w^{(1)}(w,\ u))$$

Решение этой задачи сводится к простым операциям по теореме о неявных функциях и имеет вид:

$$\zeta = R - \nu d_t + \mu a_t - x_t \tag{3.1}$$

Если функция ζ допускает нуль в области $D_{1,t}$ $[\xi \equiv R - \nu d_t \geqslant 0,$ $t \in (0,\ \pi/2]]$, то $t_\zeta^{(1)}(w) = t_\zeta$ (т. е. минимум равен минимальному нулю) и реализуется на векторе $u^\circ = -\mu j_{\alpha,\zeta}$.

Задача 3.2. Найти импульс $u_0 = -\mu_{(0)}\delta$, реализующий оценку

$$t_\zeta(w^{(1)}(u_0)) \leqslant t_\zeta(w^{(1)}(\mu_1))$$

Решение. Среди импульсов μ_1, сохраняющих включение $w^{(1)} \in D_{1,\zeta}$, задачу 3.2 решают импульсы $u_{(0)} = mu^\circ$ $(0 \leqslant m \leqslant 1)$. Последнее семейство определено с точностью до множителя. Проверка соответствия делается на основании соотношений

$$\zeta(w,\ t) \leqslant \zeta(w^{(1)}(\mu_1),\ t),\qquad \zeta(w,\ t_\zeta) = \zeta(w^{(1)}(u^\circ),\ t_\zeta)$$

Задача 3.3. Среди семейства $u_{(0)}$ найти вектор u_1° и конечное управление u_2°, а также управление v°, согласное с оценками

$$t_\zeta^{\cdot}(w^{(1)}(u_1^\circ),\ u_2^\circ,\ v) \leqslant t_\zeta^{\cdot\circ} \leqslant t_\zeta^{\cdot}(w^{(1)}(u_{(0)}),\ u,\ v^\circ)$$
$$t_\zeta^{\cdot\circ} = t_\zeta^{\cdot}(w^{(1)}(u_1^\circ),\ u_2^\circ,\ v^\circ)$$

Задача 3.3 отвечает управлению

$$
(3.2)\qquad
\begin{aligned}
&u_1^\circ = u^\circ, \quad u_2^\circ = 0, \quad v^\circ = |v^\circ|\, j_{\alpha,\zeta}, \quad w \in D_{1,\zeta} \cap [x_s > 0]\\
&u_1^\circ = u_2^\circ = u^\circ = 0, \quad v^\circ = |v^\circ|\,(sj_\alpha + \sqrt{1-s^2}j_\beta) \equiv v^\circ j_s\\
&w \in D_{1,\zeta} \cap [x_\zeta = 0]\\
&|v^\circ| = a_\zeta \nu d_\zeta^{-1}, \quad s = -\xi_\zeta' / \sqrt{(-xa_\zeta + yb_\zeta)^2}; \quad u^\circ = \mu j_{\alpha\zeta}
\end{aligned}
$$

Решение задачи 3.3 опирается на соотношения

$$(3.3)\qquad t_\zeta^{\cdot}\zeta_\zeta' = -\zeta_\zeta' - a_\zeta|v^\circ| + \mu^{(1)}b_\zeta + R_1 + R_2, \quad \zeta_\zeta' = \partial\zeta/\partial t\,|_{t=t_\zeta}$$

$$(3.4)\qquad R_1 = a_\zeta(|u| + j_{\alpha,\zeta}u) \geqslant 0$$

$$(3.5)\qquad R_2 = a_\zeta \nu j_{\alpha,\zeta} - (d_\zeta / 2\nu)\, v^2 \leqslant R_2(w, v^\circ) = a_\zeta|v^\circ|$$

Третье слагаемое правой части уравнения (3.3) указывает на равенство $u_1^\circ = u^\circ$. Оценка (3.4) показывает, что $R_1 \geqslant R_1(w, u_2^\circ = 0) = 0$. Оценка (3.5) доказывает правильность выбора управления v°. Все эти результаты очевидны в области $D_\zeta \cap [x_\zeta > 0, \ \zeta_\zeta' > 0]$. В области $D_\zeta \cap [x_\zeta > 0, \ \zeta_\zeta' = 0] \equiv D_\zeta \cap [x_\zeta > 0, \ t_\zeta = \tau_1]$ производная $t_\zeta^{\cdot}(w^{(1)}, u_2^\circ, v)$ существует не при всех v. Однако при любом $v \neq v^\circ$ справедливо равенство $t_\zeta^{\cdot}(w^{(1)}(u_0), u_2^\circ, v) \to -\infty$ при $w^{(1)} \to D_\zeta \cap [x_\zeta > 0, \ t_\zeta = \tau_1]$. В области $D_\zeta \cap [x_\zeta = 0]$ необходимые условия оставляют некоторую свободу для выбора v° и этот выбор осуществлен по оценке

$$0 = \zeta_1^{\cdot}(w, u_2^\circ, v^\circ) \geqslant \zeta_1^\circ(w, u_2^\circ, v)$$

4. Пусть $\pi/2 \in D_{1,t}$, т. е. справедлива оценка $\xi(w, \pi/2) = R - \nu\sqrt{\pi/2} \equiv \xi_{\pi/2} \geqslant 0$. Формула (3.3) подсказывает, что за границей $t_\zeta = \pi/2$ нужно положить $u^\circ = 0$. Конструирование медленнодействия v° на границу $\zeta(w, \pi/2) = 0$ из области $[\zeta/w, \pi/2) < 0]$ приводит к функции

$$(4.1)\qquad \zeta = R - \nu d_t + \mu - x_t, \qquad (w, t) \in D_{2,t}[\xi_{\pi/2} \geqslant 0, \ t \in (\pi/2, \pi]]$$

а последовательное решение задач 3.2, 3.3. приводит к управлениям

$$
(4.2)\qquad
\begin{aligned}
&u_1^\circ = u_2^\circ = u^\circ = 0, \quad v^\circ = |v^\circ| j_{\alpha,\zeta}, \quad w \in D_{2,\zeta} \cap [x_\zeta > 0]\\
&u_1^\circ = u_2^\circ = u^\circ = 0, \quad v^\circ = |v^\circ| j_s, \quad w \in D_{2,\zeta} \cap [x_\zeta = 0]
\end{aligned}
$$

За границей $\xi(w, t) = R - \nu d_t = 0$ рассмотрим две функции $\nu_\xi(t)$, $t_\xi(\nu)$ — решения относительно ν, t уравнения $\xi = 0$, и предположим, что $t_\xi(\nu) < \pi/2$.

Для построения решения будем рассуждать по схеме [5]. Пусть $t_1 \in (t_\xi, \pi/2)$ — некоторое число, и запас μ первого игрока настолько велик, что при $t = 0$ он может применить импульс $u_1 = \mu_1^1\delta$

$$(4.3)\qquad \mu_1^1 = -(xb_1 / a_1 + y_\alpha)j_\alpha - y_\beta j_\beta, \quad a_1 = \sin t_1, \quad b_1 = \cos t_1$$

а при $t \in (0, t_\xi(\nu) - t_1]$ управлять по правому $u_1 = -v$. Такое управление при $t = 0$ реализует равенство

$$x_{t_1}^{(1)} = [(xb_1 + y_\alpha^{(1)}a_1)^2 + y_\beta^{(1)2}a_1]^{1/2} = 0$$

а при $t \in (0,\ t_1 - t_\xi]$ сохраняет равенство

$$x^{(1)}_{t_1-1} = [(xb_{t_1-t} + y_\alpha^{(1)}a_{t_1-t})^2 + y_\beta{}^2 a^2_{t_1-t}]^{1/2} = 0$$

и при любых действиях второго игрока к моменту $t^1 = t_1 - t_\xi\ (\nu)$ окажутся справедливыми равенства $\xi\,(\nu,\ \ t_\xi(\nu)) = 0,\ x_{t=t_\xi} = 0,$ если $\mu\,(t^1) = \mu_\xi \geqslant 0$, т. е. первый игрок располагает достаточным запасом. Последние равенства показывают, что к моменту t^1 заведомо реализуется включение $w \in D_{1,\zeta}$. Полный расход импульса первого игрока за время t^1 имеет вид

$$|\Delta\mu| = |\mu_1{}^1| + \int_0^{t_1} |v|\, d\tau$$

Пусть при фиксированных t_1, t_ξ второй игрок выбирает модуль управления $|v^1|$, решая «изопериметрическую» задачу на максимум

$$\int_0^{t^1} |v^1|\, d\tau = \max_v \int_0^{t_1} |v|\, d\tau$$

при условии

$$\int_0^{t^1} v^2 dt = \nu^2 - \nu_\xi{}^2$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\int_0^{t^1} |v^1|\, dt = \varkappa\,(\nu, t_\xi, t_1) = [(\nu^2 - \nu_\xi{}^2)\,(t_1 - t_\xi)]^{1/2} \tag{4.4}$$

$$|v^1| = \varkappa/(t_1 - t_\xi)$$

Пусть, изменяя t_ξ в пределах $t_\xi \in [t_\xi\ (v),\ t_1]$, второй игрок выбирает управление $|v_1|$ из условия максимизации по t_ξ функции $\varkappa^2\ (\nu,\ t_\xi,\ t_1)$. Обозначая $(\varkappa^2)_\xi = \partial x^2 \,/\, \partial t_\xi$, получим функцию

$$(\varkappa^2)_\xi = (-\partial\nu_\xi{}^2 \,/\, \partial t_\xi)\,(t_1 - t_\xi) - (\nu^2 - \nu_\xi{}^2)$$

где

$$-\partial\nu_\xi{}^2/\partial t_\xi = R^2 a_\xi{}^2/d_\xi{}^2, \quad a_\xi = a_{t=t_\xi}, \quad d_\xi = d_{t=t_\xi}$$

Очевидно, что функция $(\varkappa^2)_\xi$ меняет знак с плюса на минус, по крайней мере один раз при изменении t_ξ на интервале $[t_\xi\ (\nu),\ t_1]$. С другой стороны, справедливо равенство

$$(\varkappa^2)_{\xi,\xi} = 2\,(R^2/d_\xi{}^6)\,a_\xi\,[(b_\xi d_\xi{}^2 - a_\xi{}^3)\,(t_1 - t_\xi) - a_\xi{}^2 d_\xi{}^2]$$

Производная первого множителя в квадратной скобке

$$(b_\xi d_\xi{}^2 - a_\xi{}^3)_\xi{}' = -a(d_\xi{}^2 + 2a_\xi b_\xi) < 0, \quad a_\xi = \sin t_\xi, \quad b_\xi = \cos t_\xi$$

указывает на оценку $(\varkappa^2)_{\xi,\xi} < 0$. Это значит, что функция $(\varkappa^\circ)_\xi$ допускает единственный и непрерывно дифференцируемый нуль $t_\xi{}^\circ\ (\nu,\ t_1)$ — точку максимума по t_ξ функции $\varkappa^2$

$$\varkappa^\circ\,(\nu, t_1) = \varkappa\,(\nu, t_\xi{}^\circ, t_1) = \max_{t_\xi} \varkappa\,(\nu, t_\xi, t)$$

В итоге возможность применения управления u_1 зависит от выполнения оценки

$$\zeta(w, t_1) = a_1(\mu - |\mu_1^1| - \varkappa^\circ(\nu, t_1)) \geqslant 0$$

и функция

$$\zeta = (\mu - \varkappa^\circ(\nu, t))\, a - x_t, \quad (w, t) \in D_{3,t}\, [\xi_{\pi/2} < 0, \quad t \in \in (t_\xi(\nu), \pi / 2]] \tag{4.5}$$

может продолжать функцию ζ в область $D_{3,t}$. Решение задачи 3.2 на импульсах $u = \mu_1\delta$ при ограничении $w^{(1)} \in D_{3,\zeta}$, а также задачи 3.3 имеет вид

$$\begin{aligned} &u_0 = mu^\circ, \quad u_1^\circ = u^\circ \\ &v^\circ = |v^\circ|\, j_{\alpha,\zeta}, \quad u^\circ = -|\mu_1^\circ|\, j_{\alpha,\zeta}\delta, \quad w \in D_{3,\zeta}\, [x_\zeta = 0] \\ &v^\circ = |v^\circ|\, j_s, \quad u^\circ = u_2^\circ = -v, \quad w \in D_{3,\zeta}\, [x_\zeta = 0] \end{aligned} \tag{4.6}$$

где числа $|v^\circ|$, $|\mu_1^\circ|$ в отличие от (3.2) даются равенствами

$$|\mu_1^\circ| = x_\zeta / a_\zeta, \qquad |v^\circ| = \varkappa^1(\nu, t_\zeta) / (t_\zeta^= - t_\zeta^\circ(\nu, t_\zeta)) \tag{4.7}$$

На ограничение $t_\zeta \leqslant \pi / 2$ указывает уравнение

$$t_\zeta^{\boldsymbol\cdot}\zeta_\zeta' = -\zeta' - a_\zeta |v^\circ| + (\mu^1 - \varkappa_\zeta^\circ)\, b_\xi + R_1 + R_2 \tag{4.8}$$

где слагаемое R_1 имеет вид (3.4), а слагаемое R_2 в отличие от (3.5) имеет вид

$$R_2 = a_\zeta v j_{\alpha,\zeta} - (|v^\circ| / 2)\, v^2 \leqslant R_2(w, v^\circ) = a_\zeta |v^\circ|$$

Построение u_2°, v° в области $D_{3,\zeta} \cap [x_\zeta = 0]$ повторяет построение в области $D_{2,\zeta} \cap [x_\zeta = 0]$, однако v° вычисляется по уравнению (4.7).

5. Уравнение (4.8) указывает, что за границей $G\, [\xi(w, \pi / 2) \leqslant 0,$ $t_\zeta = \pi / 2]$ области $D_{3,\zeta}$ управление u_1 вряд ли разумно. Предположим, что там $u^\circ = 0$ и снова будем строить медленнодействие v°, на границу $G\, [\xi(w, \pi / 2) \leqslant 0, \ \zeta(w, \pi / 2) = 0]$ области $D_{3,\zeta}$ из области $D_4\, [\xi(w, \pi / 2) < 0, \ \zeta(w, \pi / 2) < 0]$.

Пусть ν_g — некоторое число, равное резерву второго игрока при $t_\zeta = \pi / 2$, а $t_g \leqslant \pi / 2 = t_\xi^\circ(\nu_g, \pi / 2)$. Интегрирование, применяемое по схеме п. 2, приводит к функции

$$\begin{aligned} &\chi = \mu - \sqrt{\nu_g^2 - \nu_\xi^2(t_g)'}\, \sqrt{t - t_g} - \sqrt{\nu^2 - \nu_g^2}\, d_{t-\pi/2} - x_t \\ &d_{t-\pi/2} = \sqrt{(t - \pi/2)/2 - (\sin 2t)/4} \end{aligned}$$

Функции ν_g^2, t_g пока неизвестны. Однако необходимые условия указывают на непрерывность модуля оптимального управления $|v^\circ|$ на границе G. Это условие дает равенство

$$|v^\circ|^2 = (\nu_g^2 - \nu_\xi^2(t_g))/(t - t_g) = (\nu^2 - \nu_g^2)/d_{t-\pi/2}$$

Исключая по этому равенству функцию ν_g^2 и заменяя t_g на t_ξ, получаем функцию

$$\chi_1 = \mu - (\nu^2 - \nu_\xi^2(t_\xi))^{1/2}(\pi/2 - t_\xi + d_{t-\pi/2}^2)^{1/2} - x_t$$

Продолжим функцию $\varkappa(\nu, t_\xi, t)$ в область $[t_\xi < \pi/2, t > \pi/2]$ по формуле

$$\varkappa^2 = (\nu^2 - \nu_\xi(t_\xi))(\pi/2 - t_\xi + d^2_{t-\pi/2})$$

Операция $\max_{t_\xi \leqslant \pi/2} \varkappa^2$ приводит к функции $(\varkappa^2)_\xi = (-\partial \nu_\xi^2 / / \partial t_\xi)(\pi/2 - t_\xi + d^2_{t-\pi/2}) - (\nu^2 - \nu_\xi^2)$ и продолжает функцию $t_\xi^\circ(\nu, t)$ как нуль функции $(\varkappa^2)_\xi$ в область

$$D_{4,t}[\xi(w, \pi/2) < 0, (\varkappa^2)'_{\pi/2} \leqslant 0, t \in (\pi/2, 3\pi/2)]$$
$$\varkappa^{2'}_{\pi/2} = \partial x^2(\nu, t_\xi = \pi/2, t > \pi/2)/\partial t_\xi$$

В область

$$D_{5,t}\ [\xi(w, \pi/2) < 0,\ (\varkappa^2)'_{\pi/2} > 0,\ t \in (\pi/2, 3\pi/2)]$$

функция $t_\xi^\circ(\nu, t)$ продолжается по равенству $t_\xi^\circ = \pi/2$. Все перечисленные построения приводят к функции

$$\zeta = \mu - \varkappa^\circ(\nu, t) - x_t, \quad (w, t) \in D_{4,t} \cup D_{5,t}$$
$$(\varkappa^\circ)^2 = (\nu^2 - \nu_\xi(t_\xi^\circ))(\pi/2 - t_\xi^\circ + d^2_{t-\pi/2}), \quad (w, t) \in D_{4,t} \tag{5.1}$$
$$(\varkappa^\circ)^2 = (\nu^2 - 4R^2/\pi)\, d^2_{t-\pi/2}, \quad (w, t) \in D_{5,t}$$

Задачи 3.2 и 3.3 имеют решение вида

$$u_1^\circ = u_2^\circ = u^\circ = 0 \tag{5.2}$$
$$v^\circ = |v^\circ| j_{\alpha,\zeta}$$
$$v^\circ = -|v^\circ| j_{\alpha,\zeta}, \qquad w \in [D_{4,\zeta} \cup D_{5,\zeta}] \cap [x_\zeta > 0]$$
$$v^\circ = |v^\circ| j_s$$
$$|v^\circ| = |v^\circ| j_{-s}, \qquad w \in [D_{4,\zeta} \cup D_{5,\zeta}] \cap [x_\zeta = 0]$$

Здесь

$$|v^\circ| = \varkappa_\zeta^\circ / (\pi/2 - t_\xi^\circ(\nu, t_\zeta) - d_{\pi/2} - t_\zeta), \quad w \in D_{4,\zeta}$$
$$|v^\circ| = \varkappa^\circ_{\pi/2} / d_{\pi/2-t_\zeta}, \quad w \in D_{5,\zeta}$$
$$x_\zeta^\circ = \varkappa^\circ(\nu, t_\zeta), \quad \varkappa^\circ_{\pi/2} = \varkappa(\nu, \pi/2, t_\zeta)$$
$$j_{-s} = -s j_\alpha + \sqrt{1 - s^2}\, j_\beta$$

6. При $\omega^2 = 0$ система (1.1) теряет слагаемое $-x$ во втором уравнении. Необходимость нормирования времени отпадает. Приведем краткое резюме результатов этого простого случая

$$\zeta = R - \nu\sqrt{t^3/3} + \mu t - x_t, \quad (w, t) \in D_{1,t}[\xi(\omega, t) = $$
$$= R - \nu\sqrt{t^3/3} \geqslant 0]$$
$$\zeta = (\mu - \varkappa^\circ(\nu, t))\, t - x_t, \quad (w, t) \in D_{2,t} \quad [\xi(w, t) < 0]$$
$$\varkappa^2(\nu, t_\xi, t) = (\nu^2 - 3R^2/t_\xi^3)(t - t_\xi)$$
$$(\varkappa^2)_\xi = 9R^2(t - t_\xi)/t_\xi^4 - (\nu^2 - 3R^2/t_\xi^2)$$
$$\varkappa^\circ(\nu, t) = \varkappa(\nu, t_\xi^\bullet(\nu, t), t), \quad x_t = \sqrt{(x - y_\alpha t)^2 + y_\beta^2 t^2}$$

Функция $t_\xi^\circ(\nu, t)$ — это, как и выше,— нуль функции $(\varkappa^2)_\xi$.

Решение задач 3.2, 3.3. имеет вид

$$u_1^\circ = u^\circ = -\mu j_{\alpha,\zeta}, \quad u_2^\circ = 0, \quad v^\circ = |v^\circ| j_{\alpha,\zeta}, \quad w \in D_{1,\zeta} \cap [x_\zeta > 0]$$
$$u_1^\circ = u^\circ = u_2^\circ = 0, \quad v^\circ = |v^\circ| j_s, \quad w \in D_{1,\zeta} \in [x_\zeta = 0]$$

$$|v^\circ| = t_\zeta \nu / \sqrt{t_\zeta^3 / 3}, \quad j_\alpha, \quad w \in D_{1,\zeta}$$
$$u_1^\circ = u^\circ = -(x_\zeta / t_\zeta) j_{\alpha,\zeta}, \; u_2^\circ = 0, \; v^\circ = |v^\circ| j_{\alpha,\zeta}, \; w \in D_{2,\zeta} \cap [x_\zeta > 0]$$
$$u_1^\circ = 0, \quad u_2^\circ = u^\circ = -v, \quad v^\circ = |v^\circ| j_s, \quad w \in D_{2,\zeta} \cap [x_\zeta = 0]$$

где модуль $|v^\circ|$ задается равенством

$$|v^\circ| = \varkappa^\circ (\nu, t) / (t - t_\zeta^\circ (\nu, t)), \quad w \in D_{2,\zeta}$$

7. Управления u°, v° порождают изменяющийся со временем вектор x_1° с проекциями x_α°, x_β°. Дадим его краткое геометрическое описание.

Пусть $w \in D_{2,4,5,\zeta}$. Зафиксируем $j_{\alpha,\beta,\gamma}$ неподвижными, тогда для попадания позиции на границы областей $D_{1,3}$ вектор x_1° изменяется по уравнениям

$$x_\alpha = xb_t + y_\alpha a_t + x_{\alpha,q}, \quad x_\beta = y_\beta a_t + x_{\beta,q}$$
$$x_{\alpha,q} = (j_{\alpha,\zeta})_\alpha q, \quad x_{\beta,q} = (j_{\alpha,\zeta})_\beta q$$
$$q = |v^\circ| \int_0^t \sin(t-\tau)\sin(t_\zeta - \tau)\, d\tau$$

Здесь $(j_{\alpha,\zeta})_{\alpha,\beta}$ — проекции вектора $j_{\alpha,\zeta}$ на орты $j_{\alpha,\beta}$. Можно (с некоторой натяжкой) считать, что изображающая точка движется по эллипсу с подвижным центром $O\,(x_{\alpha,q}, x_{\beta,q})$. Направление и величина осей этого эллипса постоянны. Если позиция $w \in D_{1,\zeta}$, то движение из нее разворачивается при $t > 0$ по уравнениям

$$x_\alpha^\circ = xb_t + y_\alpha^{(1)} a_t + x_{\alpha,q}, \quad x_\beta^\circ = y_\beta^{(1)} + x_{\beta,q}$$
$$y_\alpha^{(1)} = y_\alpha + u_\alpha^\circ, \quad y_\beta^{(1)} = y_\beta + u_\beta^\circ$$

поскольку при $w \in D_{1,\zeta}$ первый игрок начинает управление импульсом $u^\circ = -\mu j_{\alpha,\zeta}$.

Если $w \in D_{3,\zeta}$, то импульс $u^\circ = -(x_\zeta / a_\zeta) j_{\alpha,\zeta}$ приводит к равенству $y_\beta^{(1)} = 0$, а равенство $u^\circ + v^\circ = 0$ показывает, что до попадания на границу области $D_{1,\zeta}$ движение прямолинейное и следует уравнению

$$x_\alpha^\circ = xb_t + y_\alpha^{(1)} a_t, \quad x_\beta^\circ = 0$$

На границе областей $D_{3,\zeta}$ и $D_{1,\zeta}$ необходимо выполняются равенства $\mu = \xi(w, t_\zeta) = x_\zeta = 0$. После пересечения этой границы движение происходит по уравнениям

$$x_\alpha^\circ = xb_t + y_\alpha a_t + (j_s)_\alpha q, \quad x_\beta^\circ = (j_s)_\beta q$$

Здесь значения x, y_α, j_s, t_ζ взяты на границе областей $D_{3,\zeta}$ $D_{1,\zeta}$, и время t отсчитывается от момента попадания на границу. Движение происходит по эллипсу со смещенным центром. Можно показать, что при $t = t_\zeta$ указанная траектория касается шара $x = R$.

8. Дальнейший анализ встречает одну существенную трудность, которая состоит в следующем. Можно показать, что функция ζ по переменной t допускает на интервале $t \in (0{,}3\,\pi/2)$ не более трех изолированных максимумов ζ_1, ζ_2, ζ_3 в точках τ_1, τ_2,

τ_3 соответственно. Последний максимум не является существенным для анализа структуры функции t_ζ, так как справедлива оценка $\zeta_2 > \zeta_3$. Однако геометрически очевидно, что на множестве $F\,[\zeta_1 = 0,\ \zeta_2 \geqslant 0]$ функция t_ζ терпит положительный скачок при переходе его со стороны $F_1[\zeta_1 > 0,\ \zeta_2 \geqslant 0]$ в область $F_2[\zeta_1 < 0,\ \zeta_2 \geqslant 0]$.

Действительно, на множестве F справедливо равенство $t_\zeta = \tau_1$, а при $w \in F_2$ — оценка $\tau_1 < t_\zeta < \tau_2$. Обозначим через $t_{\zeta(2)}$ второй по счету нуль функции ζ. В позициях, близких к множеству F, лежащих в области F_2, второй игрок применяет $v^\circ(w)$. Если существует управление $u\,(w)$, такое, что $\zeta_1{}^\cdot(w,\ u\,(w),\ v^\circ(w)) > 0$, то позиция может попасть на множество F. Можно показать, что максимальное значение $\zeta_1{}^\cdot(w, u, v^\circ)$ реализуется при $u = 0$. Итак, оценка $\zeta_1{}^\cdot(w,\ 0,\ v^\circ(w)) > 0$ указывает на опасность попадания на множество F.

К сожалению, вопрос о существовании позиций, удовлетворяющих оценке

$$\lim \zeta_1{}^\cdot(w \to F,\ 0,\ v^\circ(w \to F)) \geqslant 0$$

не удается разрешить эффективно. Можно показать, что в области $D_{3,\zeta} \cap F$ ответ на этот вопрос эквивалентен вопросу о существовании позиций, удовлетворяющих оценке

$$\varphi = -(\mu - \varkappa^\circ(w,\tau_1))\, b_{\tau_1} + a_{\tau_1}\,|\, v^\circ\,(w, \tau_1)\,| - a_2\,|\, v_2{}^\circ\,| \geqslant 0$$

$$a_2 = \sin t_{\zeta(2)},\quad |\, v_2{}^\circ\,| = |\, v^\circ\,(w,\ t_\zeta = t_{\zeta(2)})\,|,\quad a_{\tau_1} = \sin\tau_1,\quad b_{\tau_1} = \cos\tau_1$$

а в области $D_{1,\zeta} \cap F$ вопрос решает оценка

$$\varphi\,(w) = -\mu\, b_{\tau_1} + a_{\tau_1}\,|\, v^\circ\,(w, \tau_1)\,| - a_2\,|\, v_2{}^\circ \geqslant 0$$

В области $[x_{\tau_1} > 0,\ x_{t=t_{\zeta(2)}} > 0]$ множество $H\,[F \cap [\varphi\,(w) \geqslant 0]]$ определяется двумя уравнениями $\zeta\,(w, \tau_1) = \zeta\,(w,\ t_{\zeta(2)}) = \zeta_t{}'\,(w,\ \tau_1) = 0$ и двумя оценками $\varphi\,(v) \geqslant 0,\ \ t_{\zeta(2)} \leqslant \tau_2$.

К сожалению, не удалось ответить даже на вопрос о том, пусто или не пусто множество H. Если множество H не пусто, то обозначим через H_1 область, занимаемую траекториями w°, пересекающимися с областью H со временем $t_\zeta\,(w), > t_{\zeta(2)}\ (w \in H)$. Остальные области $W^\circ\,[\zeta\,(w,\ 0) < 0,\ \max_{t \leqslant 3\pi/2} \zeta\,(w,\ t) \geqslant 0]$ обозначим через H_2. Через H_3 обозначим область, определяемую оценками $H_3[0 > \zeta\,(w,\ 0) = \zeta_1 = \zeta_2,$ $\varphi_1(w) > 0]$, где $\varphi_1(w)$ получается из $\varphi\,(w)$ заменой $t_{\zeta(2)}$ на τ_2.

В этих терминах сформулируем результаты исследования без громоздких доказательств.

8.1. При $w \in W^\circ$ управления u°, v° реализуют время t_ζ первого попадания на M и второй игрок не может на паре u°, v привести движение на M позднее.

8.2. При $w \in H_2$ первый игрок на любой паре u, v°, сохраняющей траекторию в области H_2, не может уменьшить время t_ζ, т. е. привести позицию на M ранее чем к моменту t_ζ.

8.3. Если множества H_1, H_3 пусты, то управление

$$v_0\,(w) = v^\circ\,(\tau_1),\quad w \in W_{1,0}$$
$$v_0\,(w) = v^\circ\,(\tau_2),\quad w \in W_{2,0}$$
$$v_0\,(w) = 0,\quad w \in W_{3,0}$$

не позволяет первому игроку привести движение на M, если это движение начинается вне области $W^\circ \cup [x \leqslant R]$ либо покидает эту область при неоптимальных действиях первого игрока.

Управление $v^\circ\,(\tau_1)$ $(v^\circ\,(\tau_2))$—это управление $v^\circ\,(w,\ t_\zeta)$ после замены t_ζ на τ_1 (τ_2) соответственно. Область $W_{1,0}$ объединяет позиции, допускающие τ_1, τ_2 с оценками $0 > \zeta_0 = \zeta\,(w,\ 0) \leqslant \zeta_1,\ \zeta_1 > \zeta_2$, а также позиции, не допускающие τ_2, но допускающие τ_1 с оценками $0 > \zeta_0 \leqslant \zeta_1$. В область $W_{2,0}$ входят позиции, допускающие τ_2 с оценками $0 > \zeta_0 \leqslant \zeta_1 \leqslant \zeta_2$. В область $W_{3,0}$ входят остальные позиции

$$W_{3,0}\,[W \diagdown [[x \leqslant R] \cup W^\circ \cup W_{1,0} \cup W_{2,0}]]$$

Геометрический смысл упомянутой трудности прост. Пусть $w \in [W^\circ \cap \zeta_1 < 0, \zeta_2 > 0]$. При этом управление v° второго игрока строится из условия $t_\zeta^{\cdot}(w, u, v^\circ) \geqslant t_\zeta^{\cdot}(w, u, v)$. Если первый игрок применяет $u \neq u^\circ$, то ζ_1 может возрасти до нуля, и t_ζ получит отрицательный скачок. При $w \in W_0^{\cdot}[W \setminus [W^\circ \cup [x < R]] \cap [\zeta_1 \subset \zeta_2]$ второй игрок строит v_0 из условия $\zeta_2^{\cdot}(w, u, v^\circ) \leqslant \zeta_2^{\cdot}(w, u, v)$. Если первый игрок применяет $u \neq u^\circ$, то может реализоваться равенство $\zeta_1 = \zeta_2$. В этих позициях второй игрок в затруднении. Если он будет стараться сохранить или уменьшить ζ_1 (ζ_2), то не гарантирован от того, что первый игрок применит управление u'' так, что будет увеличиваться ζ_2 (ζ_1) и в итоге позиция попадет на множество $\zeta_2 = 0$ ($\zeta_1 = 0$).

Вопрос о существовании управлений первого игрока, увеличивающих меньший максимум, автору не удалось разрешить. Поэтому теорема содержит оговорки. Описанная трудность достаточно типична. Ее существование и пути преодоления отмечены в [2].

Поступила 21 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М., «Мир», 1967.
2. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
3. *Пожарицкий Г. К.* Игровая задача о жесткой встрече двух точек с импульсной тягой в линейном центральном поле. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
4. *Пожарицкий Г. К.* Импульсное преследование точки с ограниченной тягой. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
5. *Пожарицкий Г. К.* Обобщенная задача импульсной погони за точкой с ограниченной тягой. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
6. *Пожарицкий Г. К.* Игровая задача импульсной жесткой встречи в позиционном поле притяжения с противником, реализующим ограниченную тягу. ПММ, 1975, т. 39, вып. 2.