

Радиусы кривизны α - и β -линий в физической плоскости

$$(2.4) \quad \begin{aligned} R(0, \beta) &= R_0 + S_0 \beta, & S(\gamma, 0) &= S_0 + R_0 \gamma \\ R(\alpha, \beta) &= R_0 I_0(2\sqrt{|\alpha|\beta}) + S_0 \sqrt{\frac{\beta}{|\alpha|}} I_1(2\sqrt{|\alpha|\beta}) \\ S(\alpha, \beta) &= S_0 I_0(2\sqrt{|\alpha|\beta}) + R_0 \sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}} I_1(2\sqrt{|\alpha|\beta}) \end{aligned}$$

Формулы (2.3) и (2.4) представляют собой обобщение результата, полученного Хиллом для поля, образованного дугами равных радиусов.

Наконец, координаты узловых точек в поле линий скольжения, образованном круговыми дугами

$$(2.5) \quad \begin{aligned} X(\gamma, 0) &= R_0 \sin \gamma, & X(0, \beta) &= S_0 (1 - \cos \beta) \\ X(\alpha, \beta) &= R_0 U_1(2|\alpha|, 2i\sqrt{|\alpha|\beta}) + S_0 U_2(2\beta, 2i\sqrt{|\alpha|\beta}) \\ Y(\gamma, 0) &= R_0 (1 - \cos \gamma), & Y(0, \beta) &= S_0 \sin \beta \\ Y(\alpha, \beta) &= R_0 U_2(2|\alpha|, 2i\sqrt{|\alpha|\beta}) + S_0 U_1(2\beta, 2i\sqrt{|\alpha|\beta}) \end{aligned}$$

Следует отметить, что в силу нечетности функции U_1 относительно первого аргумента формулы (2.5) тождественны результату, полученному в работе [2].

Поступила 16 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.
2. Макушок Е. М., Сегал В. М. О некоторых зависимостях в поле линий скольжения, образованном круговыми дугами. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 4.
3. Хилл Р. Математическая теория пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
4. Агамирзян Л. С. Решение задач статики сыпучей и пластической сред при помощи рядов метацилиндрических функций. Инж. ж., 1961, т. 1, № 4; 1962, т. 2, № 2.
5. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление. М., «Высшая школа», 1966.
6. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.

УДК 532.517.4

ГИПОТЕЗЫ КАРМАНА И СТЕПЕННЫЕ ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ЛИНЕЙНОГО МАСШТАБА ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А. И. Корнеев

(Москва)

Рассматривается связь между гипотезами Кармана о «самосохранении» (самоподобии) корреляционных функций и степенными законами изменения энергии и линейного масштаба турбулентности за решеткой. Законы, основанные на гипотезах Кармана, в интервалах измерений близки к степенным (согласуются с опытом не хуже степенных) и обладают некоторыми преимуществами с точки зрения теории однородной турбулентности вязкой несжимаемой жидкости.

Показано, что решения, основанные на гипотезах Кармана, совместимы с уравнениями для высших моментов, даже если принять для этих моментов дополнительные гипотезы, аналогичные гипотезам Кармана.

1. Теория вырождения однородного изотропного турбулентного движения вязкой несжимаемой жидкости может исходить из различных гипотез относительно поведения моментов корреляции скорости второго и третьего порядка, например гипотез Кармана [1]

$$(1.1) \quad b_d^d(r, t) = \langle u(0, t) u(r, t) \rangle = b(t) f(\chi)$$

$$(1.2) \quad b_d^{nn}(r, t) = \langle u(0, t) v^2(r, t) \rangle = b^3 h(\chi) \\ (b(t) = b_d^d(0, t) = \langle u^2 \rangle = \langle v^2 \rangle, \quad \chi = r/l(t))$$

Здесь r — расстояние, t — время, u — проекция пульсации скорости на направление r , v — на направление, ортогональное к r . Угловые скобки означают операцию осреднения.

На основании (1.1) и (1.2) Л. И. Седовым [2, 3], без дополнительных гипотез, были найдены возможные законы изменения для функций $b(t)$, $l(t)$, $f(\chi)$, $h(\chi)$ (два случая: в первом $b \sim (t - t_0)^{-1}$ и $l \sim (t - t_0)^{1/2}$, а f и h связаны одним уравнением с постоянными коэффициентами; во втором находится полное решение задачи). Обобщение этого решения на случай неизотропной турбулентности дано в [4].

Сравнение теоретических выводов на основании (1.1) и (1.2), данное в работах [4, 5], показывает, что это полное решение хорошо соответствует опытным данным о вырождении турбулентных движений воздуха и воды за решетками (при не слишком больших числах Рейнольдса).

С другой стороны, во многих работах [6-14] опытные данные об изменении энергии $1.5b$ и линейного масштаба турбулентности аппроксимируются степенными формулами

$$(1.3) \quad b \sim (t - t_0)^{-n}, \quad l \sim (t - t_1)^m$$

не совпадающими с законами полного решения Л. И. Седова. Более того, в работе [15] на основе степенных обработок опытных данных [10, 11] сделан прямо противоречащий результатам работ [4, 5] вывод о неприменимости гипотезы Кармана (1.2).

В данной работе это противоречие объяснено тем, что выводы работы [15] выходят за пределы точности сравнения теории с опытом. Обсуждены степенные законы (1.3), указаны их недостатки с точки зрения модели однородной турбулентности, отмечена близость этих законов в интервалах измерений к законам полного решения Л. И. Седова, основанного на гипотезах Кармана.

2. Теоретические и экспериментальные исследования конца сороковых — начала пятидесятих годов, проведенные Бэтчелором, Туансендом и Стюартом и отраженные в ряде статей и монографий этих авторов, привели, в частности, к следующим результатам: 1) в некотором интервале изменения r выполнены гипотезы Кармана (1.1), (1.2) [6-8], стало быть, должен реализовываться один из случаев решения Л. И. Седова; 2) процесс вырождения турбулентности за решеткой можно разделить на три стадии — начальную, в которой реализуется первый случай этого решения с законами $b \sim (t - t_0)^{-1}$, $l \sim (t - t_0)^{0.5}$ (по существу — это область, где кривая $b^{-1}(t)$ близка к своей касательной)¹, переходную, не описанную теоретически, и конечную, в которой можно пренебречь третьими моментами, с законами $b \sim (t - t_0)^{-3/2}$, $l \sim (t - t_0)^{1/2}$ (по существу — это область, где кривая $b^{-0.4}(t)$ близка к своей касательной).

Для критики такого представления достаточно сослаться на работы [4, 5], где установлено, что второй случай решения Л. И. Седова (или его обобщение на случай однородной неизотропной турбулентности, дающее те же законы $b(t)$ и $l(t)$) при минимуме предположений дает полное и компактное описание всего процесса вырождения турбулентности за решеткой. Однако критика этого представления развивалась в другом направлении — со стороны экспериментальных работ.

Было показано, что в экспериментальных условиях, которые Бэтчелор и Таунсенд считали достаточными для реализации конечной стадии, нельзя пренебрегать третьими моментами, а законы изменения энергии в этих условиях лучше аппроксимировать сте-

¹ В монографии Бэтчелора [16] понятие начальной стадии не связывается с гипотезами (1.1), (1.2).

шенными формулами $b \sim (t - t_0)^{-n}$, где $n \leq 2$ [9-11]. С другой стороны, при описании начальной стадии стали применять те же степенные формулы с $n > 1$ [12-14]. В частности, было показано, что опытные данные Бэтчелора и Таунсенда лучше описываются степенными формулами с $1.1 < n < 2$ [9-12]. Таким образом, от первоначальных понятий конечной и начальной стадий вырождения турбулентности за решеткой остались только названия.

3. Степенные формулы, принятые во многих экспериментальных работах, разумеется, приемлемы как хорошая аппроксимация опытных данных. В то же время, с точки зрения теории однородной (не обязательно изотропной) турбулентности, эти формулы обладают недостатками, от которых свободны законы полного решения Л. И. Седова [2,3], основанные на гипотезах Кармана (1.1), (1.2) и близкие в интервалах измерений к степенным законам (1.3). Так как формулы (1.3) при $t_0 \neq t_1$ или $m \neq 1/2$ не согласуются с полным уравнением Кармана — Хауарта, описывающим динамику вырождения однородной изотропной турбулентности вязкой несжимаемой жидкости (или аналогом этого уравнения для неізотропной турбулентности), рассмотрим подробнее частный случай формул (1.3), использованный при обработке опытных данных [10,11]

$$(3.1) \quad b \sim (t - t_0)^{-n}, \quad l \sim (t - t_0)^{1/2}$$

На основе аппроксимации опытных данных формулами (3.1) и функцией $f = (1 + \chi^2)^{-1}$ и формулы $b_d^{nn} = (t - t_0)^{-n-0.5} h(\chi)$ [10,11], вытекающей из этих аппроксимаций и из уравнения Кармана — Хауарта, авторами работы [15] в дополнение к гипотезе (1.1) предложена гипотеза

$$(3.2) \quad b_d^{nn}(r, t) = b_1^{3/2}(t) h(\chi)$$

и сделан вывод о неприемлемости гипотезы Кармана (1.2) (т. е. в (3.2) нельзя принять $b \equiv b_1$).

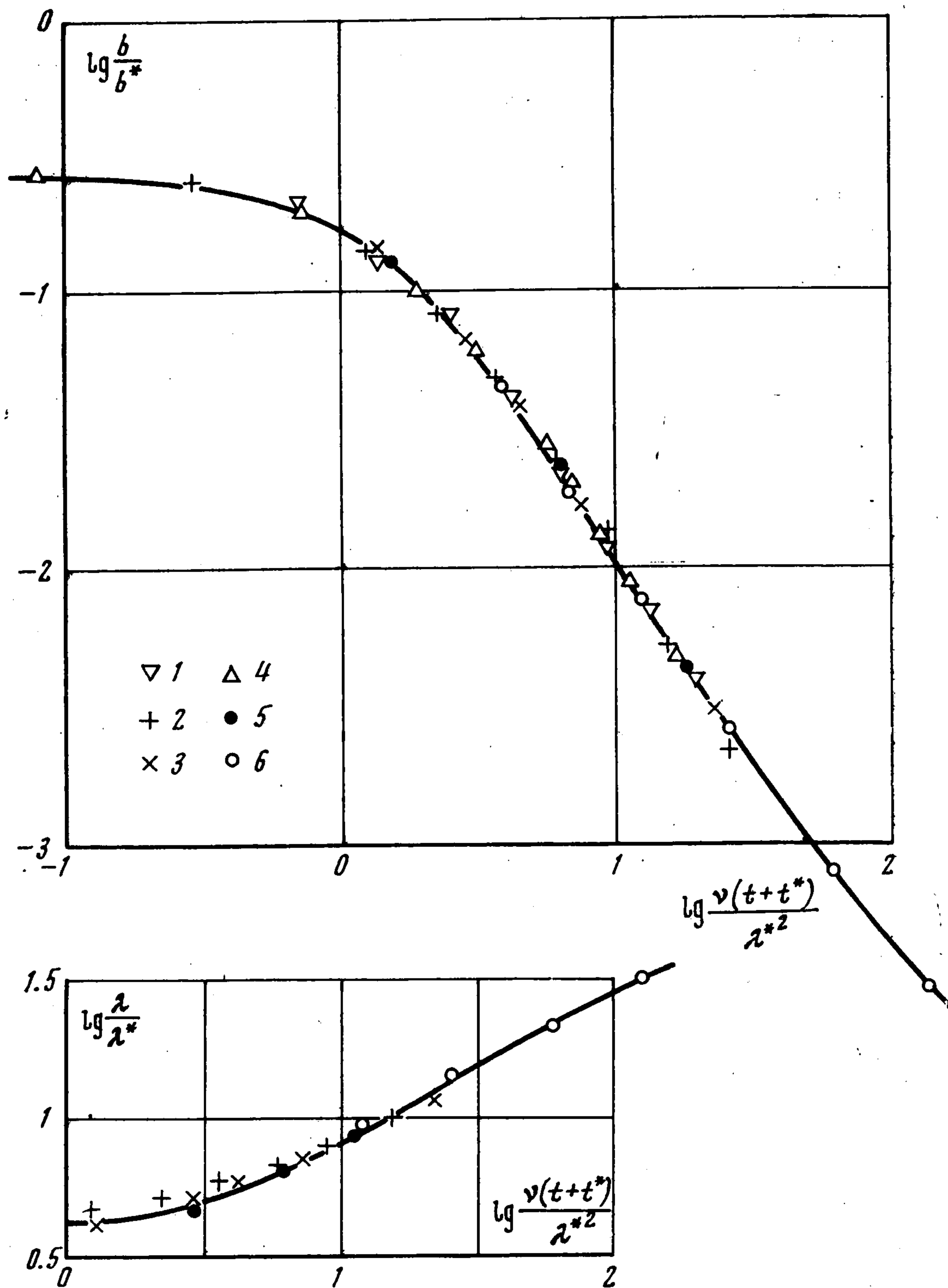
В [4,5] проанализированы и использованы многие опубликованные опыты, в том числе и [10,11]. Подробное сравнение теории с опытными данными о $b(t)$, $\lambda(t) \sim l(t)$ и $f(\chi)$ (и в одном случае о $h(\chi)$), проведенное в работах [4,5], подтверждает приемлемость гипотез Кармана (1.1) и (1.2), поэтому основной вывод работы [15] о необходимости замены гипотезы (1.2) гипотезой (3.2) не может считаться достаточно надежным. Это связано с тем, что выводы авторов работы [15] выходят за пределы точности сравнения теории с опытами.

В [4,5] проводилось сравнение решения Л. И. Седова, основанного на гипотезах Кармана, только с теми опытами, в которых измерялась величина f , и только при значениях времени, больших или равных тем, для которых экспериментально подтверждена гипотеза (1.1). Определение параметров b^* и λ^* по схеме, принятой в [4,5] (из сопоставления теоретической кривой $\lambda(b)$ с соответствующими опытными точками), осуществляется достаточно просто и наглядно, но дает не лучшую степень точности — среднее квадратичное отклонение опытных точек $b(t)$, $\lambda(t)$ [10,11] от данных теории составляет около 10%. С учетом экспериментальных погрешностей (около 10%), связанных с конечностью времени осреднения, влиянием шума и отклонениями от однородности и изотропности, эта точность соответствия теории опыту считалась допустимой.

Тем не менее, сравнение теории с опытами [10,11] было проведено вновь с целью: 1) увеличения точности соответствия теории опыту; 2) увеличения интервала времени, в котором теоретические законы $b(t)$, $\lambda(t)$ согласуются с опытом; 3) установления соответствия теории опытам, в которых не измерялась величина f . Параметр α для всех опытов [10,11] принимался универсальным $\alpha_- = 0.08$ [4,5]. Параметры b^* , λ^* , t^* были подобраны из условия минимума величины $\sum [1 - t(b_k) / t_k]^2$ (b_k , t_k — опытные точки, $t(b_k)$ — кривая $\alpha_- = 0.08$ [4,5]).

Как видно из фигуры и таблицы, в которой приведены уточненные значения параметров теории, принятые на фигуре обозначения опытных точек и средние квадратичные отклонения ϵ_b и ϵ_λ опытных точек $b(t)$ и $\lambda(t)$ от теоретических кривых, опыт-

ные данные [10,11] хорошо согласуются с решением, основанным на гипотезах Кармана. Отклонения опытных точек $b(t)$ при подходящих t^* от теоретической кривой (при одном и том же $\alpha_- = 0.08$) не превышают соответствующих отклонений от степенных зависимостей (в которых значения n различны: $n = 2, 1.73, 1.35$). В последней строке таблицы приведены максимальные значения Ut/M . Отбрасывание данных измерений



b и λ непосредственно вблизи решетки (при $Ut/M < (Ut/M)_{\max}$) основано на общепринятом представлении о возможности сравнения теории изотропной турбулентности с опытными данными по вырождению турбулентности за решеткой лишь при $Ut/M > 20-30$. В таблице приняты следующие обозначения: Ut — расстояние от решетки, M — шаг решетки, d — диаметр прутьев решетки, U — скорость потока относительно решетки, V_p — характерная скорость подвижных решеток [11], $R_M = UM/v$.

Приведем еще дополнительные замечания.

1°. В результате степенной обработки опытов [10,11], принятой и в статье [15], для моментов третьего порядка с малой точностью получается формула

$$b_1/b = (t - t_0)^{(n-1)/3}$$

Тип решетки	A	B	C	A+B*	$V_p/U = 3$	$V_p/U = 17$
R_m	940	470	840	—	2000	2000
M/d	2.8	2.8	5	—	5	5
U , см/сек	2.9	2.9	2.9	—	3.14	3.14
M , см	3.56	1.78	3.18	—	6.4	6.4
t^* , сек	-22.2	-17.9	-11.8	-19.7	-5.9	1.25
U^2/b^*	15.9	20	84.7	29.4	33.3	0.445
λ^{*2}/ν , сек	14.3	10.9	6.97	17.1	8.12	1.57
ε_b , %	4.5	8	1	3.6	1	2
ε_λ , %	—	9	6	—	2,5	3.8
Номер точки	1	2	3	4	5	6
$(Ut/M)_{\max}$	17	25	14	12**	4	***

* Решетка A на 30 см впереди B; отсчет времени от решетки A; ** Приведено значение для решетки A; *** Учтены все измерения.

Аппроксимация тех же опытных данных в статьях [4,5] и в данной работе дает постоянство отношения b_1/b . Непосредственных измерений b_1 в опытах нет. В обработках опытов [10,11] показатель $(n - 1)/3$ мал. Отношение b_1/b (в интервале изменения времени, в котором по опытным данным подтверждается гипотеза (1.1)) находится в пределах точности сравнения теории с опытом по $b(t)$, $l(t)$ и $f(\chi)$, тогда как основной вывод работы [15] базируется на различии законов для b и b_1 за счет малого показателя $(n - 1)/3$.

2°. При степенных законах случай $n = 1$ соответствует $b = b_1$. В теории Л. И. Седова $b = b_1$ и не получается степенных законов по $t + t^*$ (t^* определяется из опытов, причем $t^* \neq -t_0$).

Важно подчеркнуть, что в теории, основанной на равенстве $b = b_1$ (с подходящими t^*) при минимуме предположений, получаются теоретически правильные законы также и для корреляционных функций. Если же пользоваться степенными законами (3.1), то в рамках первоначальных допущений работы [15] (1.1) и (3.2) правильных теоретических формул для корреляционных функций вообще нет. Отметим, что теоретическая кривая $f(\chi)$, использованная в [4,5], и эмпирическая кривая [10,11] практически совпадают. Различие не превышает 0.015, что меньше погрешности измерений, связанной с конечностью времени осреднения и равной $0,03 \sqrt{1 + f^2}$.

3°. Степенные законы (3.1) для моментов третьего порядка приводят к формуле [10, 11, 15]

$$(3.3) \quad b_d^{nn}(r_0, t) = \langle u(0, t) v^2(r_0, t) \rangle = b_1^{3/2} h(\chi_0) \sim (t - t_0)^{-n-0.5}$$

при любом постоянном значении $\chi_0 = r_0(t)/l(t) \neq 0$. В опытах не наблюдалось уменьшение области применимости гипотезы (1.1) по χ при увеличении t , поэтому в (3.3) можно считать величину χ_0 постоянной. Используя строгое неравенство

$$[b_d^{nn}(r, t)]^2 \leq \langle u^2(0, t) \rangle \langle v^4(0, t) \rangle$$

из соотношения (3.3) получаем, что $\langle v^4 \rangle / \langle v^2 \rangle^2 \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$ не медленнее, чем $(t - t_0)^{n-1}$. Этот вывод противоречит теоретическим представлениям о гауссовом распределении пульсаций скорости v и всем имеющимся опытным данным о том, что $\langle v^4 \rangle / \langle v^2 \rangle^2 \approx 3$ с точностью около 10% (см. [10], [17], стр. 223).

4. Теория однородной изотропной турбулентности может исходить только из уравнения Кармана — Хауарта без привлечения уравнений для высших моментов корреляции пульсаций скорости и давления. Тем не менее может возникнуть вопрос об удовлетворении уравнений для моментов высшего порядка.

Принимая гипотезы Кармана для вторых и третьих моментов, не обязательно принимать такие же гипотезы для высших моментов (как и гипотезы об однородности и изотропности) [2,3]. Все же аналоги гипотез Кармана можно применить к следующим после уравнения Кармана — Хаурта уравнениям цепочки уравнений для высших моментов.

Рассмотрим для примера уравнение динамики двухточечных третьих моментов

$$(4.1) \quad \frac{\partial b_i^{mn}}{\partial t} - 2\nu \frac{\partial^2 b_i^{mn}}{\partial r_j \partial r_j} + \nu T_i^{mn} + S_i^{mn} = 0$$

$$b_i^{mn} = \langle u_i u_m' u_n' \rangle, \quad T_i^{mn} = \left\langle u_i \frac{\partial u_m'}{\partial r_j} \frac{\partial u_n'}{\partial r_j} \right\rangle$$

$$S_i^{mn} = \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i u_j u_m' u_n' \rangle + \frac{\partial}{\partial x_j'} \langle u_i u_j' u_m' u_n' \rangle + \frac{\partial}{\partial x_i} \langle P u_m' u_n' \rangle +$$

$$+ \left\langle u_i u_n' \frac{\partial P'}{\partial x_m'} + u_i u_m' \frac{\partial P'}{\partial x_n'} \right\rangle \quad (r_k = x_k' - x_k; \quad i, j, m, n, k = 1, 2, 3)$$

Здесь u_i, P и u_i', P' — пульсации скорости и давления в точках с декартовыми координатами x_k и x_k' соответственно в момент t .

Гипотеза Кармана (1.2) дает

$$b_i^{mn}(r_k, t) = b^{3/2}(t) f_i^{mn}(\chi_k), \quad \chi_k = r_k / l(t)$$

Аналогично допустим

$$(4.2) \quad T_i^{mn}(r_k, t) = b^{3/2} l^{-2} \varphi_i^{mn}(\chi_k), \quad S_i^{mn}(r_k, t) = b^2 l^{-1} \psi_i^{mn}(\chi_k)$$

Используя систему уравнений для $b(t)$ и $l(t)$ [2,3], вытекающую из гипотез Кармана (1.1), (1.2), найдем для первого случая решения (когда $b \sim (t - t_0)^{-1}$) уравнение с постоянными коэффициентами, связывающее тензоры f_i^{mn} , φ_i^{mn} и ψ_i^{mn} , а для второго случая (полного) решения

$$\varphi_i^{mn} = 15\alpha f_i^{mn} + \frac{\chi_k}{2} \frac{\partial f_i^{mn}}{\partial \chi_k} + 2 \frac{\partial^2 f_i^{mn}}{\partial \chi_k \partial \chi_k}$$

$$\psi_i^{mn} = -p\chi_k \frac{\partial f_i^{mn}}{\partial \chi_k}, \quad f_i^{mn} = \left(h - \chi \frac{\partial h}{\partial \chi} \right) \frac{\chi_i \chi_m \chi_n}{\chi^3} +$$

$$+ \frac{1}{2\chi} \frac{\partial (\chi^2 h)}{\partial \chi} \left(\delta_{im} \frac{\chi_n}{\chi} + \delta_{in} \frac{\chi_m}{\chi} \right) - h \delta_{mn} \frac{\chi_i}{\chi}$$

$$h = \frac{2\alpha p \chi}{4\alpha - 1} \left\{ {}_1F_1 \left[10\alpha; \frac{5}{2}; -\frac{\chi^2}{8} \right] - {}_1F_1 \left[10\alpha + 1; \frac{7}{2}; -\frac{\chi^2}{8} \right] \right\},$$

$$\chi^2 = \chi_k \chi_k$$

Здесь α, p — параметры решения Л. И. Седова [2-5], ${}_1F_1$ — вырожденная гипергеометрическая функция [18].

Таким образом, с помощью гипотез (4.2) (аналогичных гипотезам Кармана) в случае полного (для вторых и третьих моментов) решения, основанного на гипотезах Кармана, можно найти тензоры T_i^{mn} и S_i^{mn} . Отметим, что после этого четвертые моменты корреляции скорости (например, $\langle u_i u_j u_m' u_n' \rangle$) определяются с большим произволом.

К аналогичному выводу можно прийти, если вместо уравнения (4.1) для двухточечного тензора $\langle u_i u_m' u_n' \rangle$ воспользоваться уравнением (см., например, [17]) для трехточечного тензора $\langle u_i u_m' u_n'' \rangle$ с соответствующими гипотезами подобия.

Автор благодарит Л. И. Седова за полезное обсуждение результатов работы.

Поступила 5 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Karman Th., Howarth L.* On the statistical theory of isotropic turbulence. Proc. Roy. Soc. A, 1938, vol. 164, No. 917.
2. *Седов Л. И.* Вырождение изотропных турбулентных движений несжимаемой жидкости. Докл. АН СССР, 1944, т. 42, № 3.
3. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. Изд. 2. М., «Наука», 1972.
4. *Корнеев А. И.* Применение гипотез подобия для решения задачи о вырождении однородной турбулентности. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
5. *Корнеев А. И., Седов Л. И.* Теория изотропной турбулентности и ее сравнение с опытом. В сб.: Турбулентные течения. М., «Наука», 1974.
6. *Batchelor G. K., Townsend A. A.* Decay of isotropic turbulence in the initial period. Proc. Roy. Soc. A, 1948, vol. 193, No. 1035.
7. *Batchelor G. K., Townsend A. A.* Decay of turbulence in the final period. Proc. Roy. Soc. A, 1948, vol. 194, No. 1039.
8. *Stewart R. W.* Triple velocity correlations in isotropic turbulence. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1951, vol. 47, No. 1.
9. *Tan H. S., Ling S. C.* Final stage decay of grid produced turbulence. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, No. 12.
10. *Ling S. C., Huang T. T.* Decay of weak turbulence. Phys. Fluids, 1970, vol. 13, No. 12.
11. *Ling S. C., Wan C. A.* Decay of isotropic turbulence generated by a mechanically agitated grid. Phys. Fluids, 1972, vol. 15, No. 8.
12. *Comte-Bellot G., Corrsin S.* The use of contraction to improve the isotropy grid-generated turbulence. J. Fluid Mech., 1966, vol. 25, pt. 4.
13. *Comte-Bellot G., Corrsin S.* Simple Eulerian time correlation of full- and narrow-band velocity signals in grid-generated «isotropic» turbulence. J. Fluid Mech., 1971, vol. 48, pt 2.
14. *Gad-el-Hak M., Corrsin S.* Measurements of the nearly isotropic turbulence behind a uniform jet grid. J. Fluid Mech., 1974, vol. 62, pt 1.
15. *Баренблатт Г. И., Гаврилов А. А.* К теории автомодельного вырождения однородной изотропной турбулентности. ЖЭТФ, 1973, т. 65, вып. 2 (8).
16. *Бэтчелор Дж.* Теория однородной турбулентности. М., Изд-во иностр. лит., 1965.
17. *Мокич А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика, ч. 2. М., «Наука», 1967.
18. *Слейтер Л. Дж.* Вырожденные гипергеометрические функции. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1966.

Технический редактор З. В. Филиппова

Сдано в набор 25/III-1975 г. Т-07757 Подписано к печати 3/VI-1975 г. Тираж 2875 экз.
 Зак. 1941 Формат бумаги 70 X 108^{1/16} Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6 Уч.-изд. л. 16,3

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10