ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
2. *Каландия А. И.* О напряженном состоянии в пластинках, усиленных ребрами жесткости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
3. *Воробьев В. Л., Попов Г. Я.* Контактная задача для упругой полуплоскости и сцепленного с ней полубесконечного упругого стержня. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
4. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
5. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
6. *Theocaris P. S., Dafermos K.* The elastic strip under mixed boundary conditions. J. Appl. Mech., 1964. vol. 31, ser. E, № 4. (Рус. перев: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1964, № 4).
7. *Микаэлян В. В.* О двух задачах растяжения упругого прямоугольника с упругими накладками. Докл. АН АрмССР, 1973, т. 56, № 4.
8. *Нуллер Б. М.* О сжатии упругого слоя балочными плитами. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
9. *Нобл Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
10. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
11. *Нуллер Б. М.* О соотношении обобщенной ортогональности П. А. Шиффа. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
12. *Каган В. Ф.* Основания теории определителей. Одесса, Госиздат Украины, 1922.
13. *Глаговский В. Б., Нуллер Б. М.* Программа расчета балок на упругой полосе методом кусочно-однородных решений. Л., «Энергия», 1973.
14. *Нуллер Б. М.* Контактные задачи для упругого полубесконечного цилиндра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.

УДК 539.374

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ НАЧАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

А. З. Журавлев, Л. С. Ураждина, В. И. Ураждин

(Ростов-на-Дону)

С помощью двумерного преобразования Лапласа — Карсона получено решение задачи Гурса для уравнения, описывающего плоскую деформацию идеально пластического тела. В качестве примера рассмотрены основные зависимости в поле, образованном круговыми дугами.

Одним из методов решения краевых задач плоского течения идеально пластического тела является линеаризация квазилинейного уравнения в частных производных гиперболического типа с помощью подстановки С. Г. Михлина [1], приводящей его к телеграфному уравнению. Решение линеаризованного уравнения может быть найдено с применением интегральной формулы Римана [2, 3], разложением в ряд по метацилиндрическим функциям [4], а также с помощью интегральных преобразований.

1. Все функции, фигурирующие в данной работе, предполагаются преобразуемыми по Лапласу [5]. Заметим, что это требование практически не вносит ограничений.

Обозначим криволинейные характеристические координаты в физической плоскости через α, β, в плоскости годографа скоростей через α', β'. Как известно, каждая из функций $X, Y, U, V, R, S, \rho, \delta$ плоской задачи теории идеальной пластичности удовлетворяет телеграфному уравнению

$$d^2f/d\zeta d\varkappa + f = 0 \tag{1.1}$$

Здесь X, Y — координаты узловых точек поля линий скольжения в следящей системе координат; U, V — координаты узловых точек годографа скоростей в следящей системе координат; R, S — радиусы кривизны соответственно α- и β-линий; ρ, δ — радиусы кривизны α'- и β'-линий.

Назовем, как обычно, положительным направление отсчета характеристических координат, обратное движению часовой стрелки.

Пусть уравнение (1.1) определено в физической плоскости в прямоугольнике D_0 $(-\infty < \alpha \leqslant 0,\ 0 \leqslant \beta < \infty)$.

Обозначим

$$\gamma = -\alpha = |\alpha|, \quad f(\alpha, \beta) = f(-\gamma, \beta) = \varphi(\gamma, \beta) \tag{1.2}$$

Уравнение (1.1), определенное в области D $(0 \leqslant \gamma < \infty,\ 0 \leqslant \beta < \infty)$, перепишется в виде

$$\frac{\partial^2 \varphi(\gamma, \beta)}{\partial\gamma\,\partial\beta} - \varphi(\gamma, \beta) = 0 \tag{1.3}$$

Для применения операционного метода зададим значения (стрелка означает переход в пространство изображений)

$$\begin{gathered} f(|\alpha|, 0) = \varphi(\gamma, 0) = a(\gamma) \to a^*(p) \\ f(0, \beta) = \varphi(0, \beta) = b(\beta) \to b^*(q), \qquad a(0) = b(0) = c \to c \end{gathered} \tag{1.4}$$

Используя формулы для изображения производных [5] и граничные условия (1.4), получим операторное изображение уравнения (1.3)

$$pq\varphi^*(p, q) - pqa^*(p) - pqb^*(q) + pqc - \varphi^*(p, q) = 0 \tag{1.5}$$

Отсюда

$$\varphi^*(p, q) = \frac{pq}{pq - 1}[a^*(p) + b^*(q) - c] \tag{1.6}$$

В пространстве изображений произведению двух функций соответствует свертка оригиналов этих функций [5], поэтому, с учетом (1.2), решение уравнения в области D_0 запишем в виде ($I_\nu^j(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента)

$$f(\alpha, \beta) = \int_0^{|\alpha|}\int_0^{\beta} [I_0(2\sqrt{\xi\eta}) - 1]\,[a(|\alpha| - \xi) + b(\beta - \eta) - c]\,d\xi\,d\eta \tag{1.7}$$

В плоскости годографа скоростей областью определения уравнения (1.1) будет D_1 $(0 \leqslant \alpha' < \infty; -\infty < \beta' \leqslant 0)$.

В этом случае подстановка

$$\gamma = -\beta' = |\beta'|, \quad f(\alpha', -\gamma) = \psi(\alpha', \gamma) \tag{1.8}$$

приводит к уравнению, тождественному (1.3).

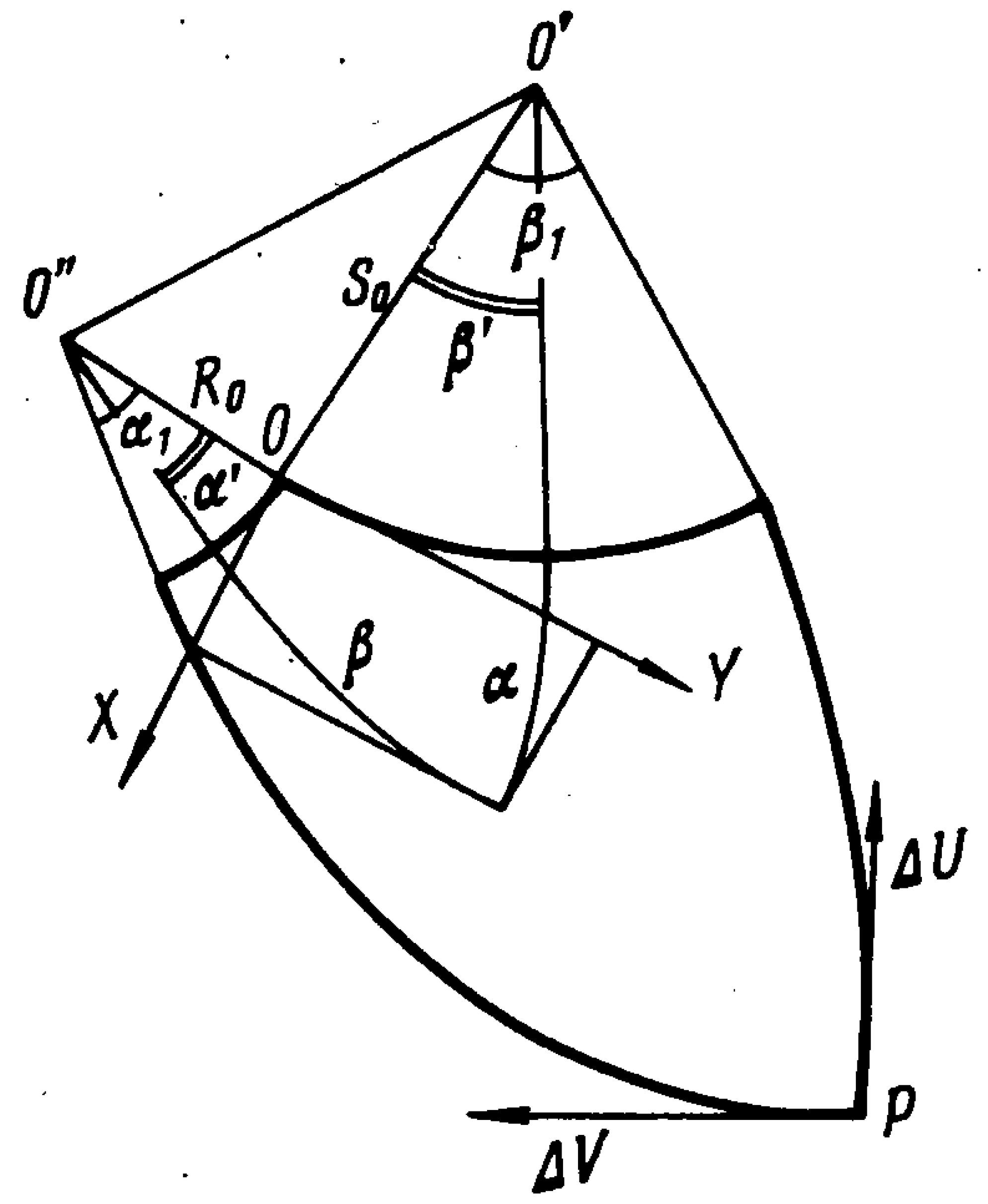
Его решение в области D_1 имеет вид (1.7), где в правой части стоит α' и $|\beta'|$ вместо $|\alpha|$ и β соответственно.

Заметим, что для нахождения решения в пространстве оригиналов можно к выражению (1.6) непосредственно применить формулу обращения преобразования Лапласа — Карсона [6].

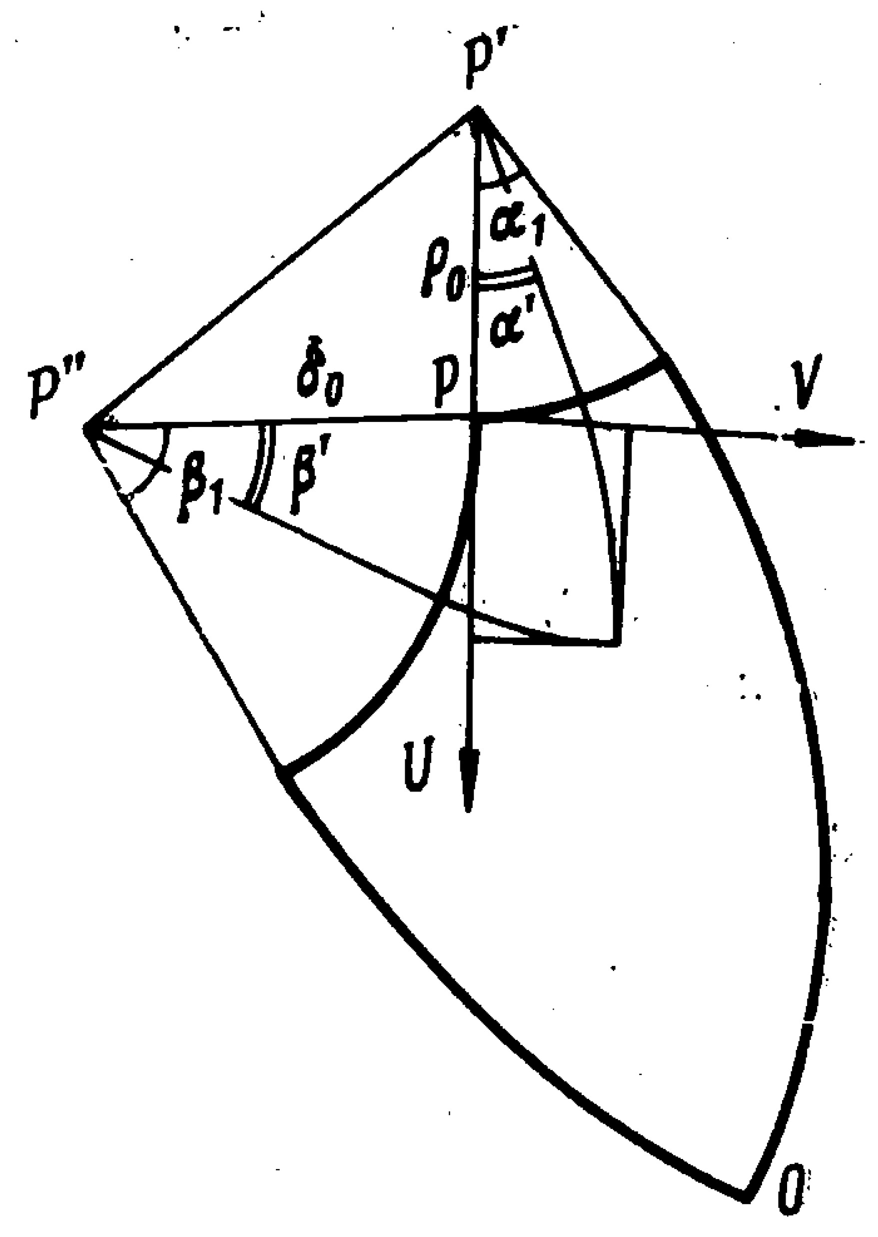
2. В качестве примера рассмотрим поле линий скольжения, образованное начальными дугами радиусов (фиг. 1)

$$R(\alpha, 0) = R_0 = \text{const}, \qquad S(0, \beta) = S_0 = \text{const}$$

Пусть разрыв касательной составляющей скорости, распространяющийся вдоль линий скольжения $\alpha = \alpha_1$ и $\beta = \beta_1$, ограничивающих пластическую область, есть соответственно ΔV и ΔU.



Фиг. 1



Фиг. 2

Тогда поле скоростей в плоскости годографа скоростей (фиг. 2) образовано начальными дугами радиусов

$$\rho(\alpha', 0) = \Delta U = \rho_0 = \text{const}, \qquad \delta(0, \beta') = \Delta V = \delta_0 = \text{const}$$

Граничные условия для функции V в следящей системе координат, помещенной в точку P годографа скоростей, имеют вид

$$V(\alpha', 0) = a(\alpha') = \rho_0 \sin\alpha' \to \frac{\rho_0 p}{p^2+1} = a^*(p) \tag{2.1}$$

$$V(0, |\beta'|) = b(\gamma) = \delta_0(1-\cos\gamma) \to \frac{\delta_0}{q^2+1} = b^*(q)$$

Обращаясь к формуле (1.6), получим решение в пространстве изображений; переходя в пространство оригиналов, найдем ($U_n(w, z)$ — функция Ломмеля двух переменных)

$$V(\alpha', \beta') = \rho_0 U_1(2\alpha', 2i\sqrt{\alpha'|\beta'|}) + \delta_0 U_2(2|\beta'|, 2i\sqrt{\alpha'|\beta'|}) \tag{2.2}$$

Учитывая очевидные соотношения между переменными физической плоскости и годографа скоростей

$$\alpha' = \alpha - \alpha_1, \qquad \beta' = \beta - \beta_1$$

можно из (2.2) получить аналитическое выражение для приращения вектора скорости вдоль β-линий в физической плоскости.

Аналогично для функции U граничные условия

$$U(\alpha', 0) = a(\alpha') = \rho_0(1-\cos\alpha') \to \frac{\rho_0}{p^2+1} = a^*(p)$$

$$U(0, \gamma) = b(\gamma) = \delta_0 \sin\gamma \to \frac{\delta_0 q}{q^2+1} = b^*(q)$$

дают выражение для $U(\alpha', \beta')$, которое совпадает с (2.2) при взаимной замене индексов *1* и *2*.

Приведем начальные условия и решение для остальных параметров годографа скоростей и поля линий скольжения, изображенных на фиг. 1 и 2.

Радиусы кривизны α'- и β'-линий в плоскости годографа скоростей

$$\rho(0, \gamma) = \rho_0 + \delta_0\gamma, \qquad \delta(\alpha', 0) = \delta_0 + \rho_0\alpha' \tag{2.3}$$

$$\rho(\alpha', \beta') = \rho_0 I_0(2\sqrt{\alpha'|\beta'|}) + \delta_0\sqrt{\frac{|\beta'|}{\alpha'}} I_1(2\sqrt{\alpha'|\beta'|})$$

$$\delta(\alpha', \beta') = \delta_0 I_0(2\sqrt{\alpha'|\beta'|}) + \rho_0\sqrt{\frac{\alpha'}{|\beta'|}} I_1(2\sqrt{\alpha'|\beta'|})$$

Радиусы кривизны α- и β-линий в физической плоскости

$$R(0, \beta) = R_0 + S_0 \beta, \qquad S(\gamma, 0) = S_0 + R_0 \gamma \tag{2.4}$$

$$R(\alpha, \beta) = R_0 I_0 (2\sqrt{|\alpha|\beta}) + S_0 \sqrt{\frac{\beta}{|\alpha|}} I_1 (2\sqrt{|\alpha|\beta})$$

$$S(\alpha, \beta) = S_0 I_0 (2\sqrt{|\alpha|\beta}) + R_0 \sqrt{\frac{|\alpha|}{\beta}} I_1 (2\sqrt{|\alpha|\beta})$$

Формулы (2.3) и (2.4) представляют собой обобщение результата, полученного Хиллом для поля, образованного дугами равных радиусов.

Наконец, координаты узловых точек в поле линий скольжения, образованном круговыми дугами

$$X(\gamma, 0) = R_0 \sin\gamma, \qquad X(0, \beta) = S_0 (1 - \cos\beta) \tag{2.5}$$

$$X(\alpha, \beta) = R_0 U_1 (2|\alpha|, \quad 2i\sqrt{|\alpha|\beta}) + S_0 U_2 (2\beta, 2i\sqrt{|\alpha|\beta})$$

$$Y(\gamma, 0) = R_0 (1 - \cos\gamma), \qquad Y(0, \beta) = S_0 \sin\beta$$

$$Y(\alpha, \beta) = R_0 U_2 (2|\alpha|, \quad 2i\sqrt{|\alpha|\beta}) + S_0 U_1 (2\beta, 2i\sqrt{|\alpha|\beta})$$

Следует отметить, что в силу нечетности функции U_1 относительно первого аргумента формулы (2.5) тождественны результату, полученному в работе [2].

Поступила 16 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности. М., «Наука», 1969.
2. *Макушок Е. М., Сегал В. М.* О некоторых зависимостях в поле линий скольжения, образованном круговыми дугами. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 4.
3. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М., Гостехиздат, 1956.
4. *Агамирзян Л. С.* Решение задач статики сыпучей и пластической сред при помощи рядов метацилиндрических функций. Инж. ж., 1961, т. 1, № 4; 1962, т. 2, № 2.
5. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Операционное исчисление. М., «Высшая школа», 1966.
6. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Справочник по операционному исчислению. М., «Высшая школа», 1965.

УДК 532.517.4

ГИПОТЕЗЫ КАРМАНА И СТЕПЕННЫЕ ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ЛИНЕЙНОГО МАСШТАБА ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А. И. Корнеев

(Москва)

Рассматривается связь между гипотезами Кармана о «самосохранении» (самоподобии) корреляционных функций и степенными законами изменения энергии и линейного масштаба турбулентности за решеткой. Законы, основанные на гипотезах Кармана, в интервалах измерений близки к степенным (согласуются с опытом не хуже степенных) и обладают некоторыми преимуществами с точки зрения теории однородной турбулентности вязкой несжимаемой жидкости.

Показано, что решения, основанные на гипотезах Кармана, совместимы с уравнениями для высших моментов, даже если принять для этих моментов дополнительные гипотезы, аналогичные гипотезам Кармана.