суммой двух стоячих волн, а волновой процесс на свободной поверхности цилиндра при $x > 1$ определяется суммой трех волн, движущихся по обе стороны от штампа. Используя представление в тригонометрической форме комплексных чисел N_k и S_k, можно получить для каждой волны как амплитуду, так и сдвиг фазы.

Автор благодарит И. И. Воровича, Г. Я. Попова и В. А. Бабешко за внимание к работе и ценные советы.

Поступила 4 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабешко В. А.* К теории динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 3.
2. *Бабешко В. А.* О единственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 6.
3. *Бабешко В. А., Калинчук В. В.* О взаимодействии жесткого бандажа с упругим цилиндром. Изв. АН СССР, МТТ, 1973, № 3.
4. *Березин И. С., Жидков Н. П.* Методы вычислений, т. 1. М., «Наука», 1966.
5. *Бабешко В. А., Калинчук В. В.* Об одном приближенном методе решения динамических контактных задач. ПММ, 1973, т. 38, вып. 3.

КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛОС И ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК, УСИЛЕННЫХ СТЕРЖНЯМИ

Б. М. Нуллер

(Ленинград)

Получено в замкнутой форме решение смешанной задачи для упругой полосы, усиленной полубесконечным гибким стержнем. Задача о деформации прямоугольной пластинки, одна грань которой усилена стержнем, методом кусочно-однородных решений сведена к нормальной системе Пуанкаре — Коха. Рассмотрены частные случаи этой задачи — полоса, усиленная периодической системой стержней, одним конечным или двумя полубесконечными стержнями.

Смешанные задачи для полуплоскости, спаянной с единичным мелановским стержнем постоянного сечения, рассматривались в работах [1–3], где имеются ссылки и на более ранние публикации. Полуплоскости, усиленной периодической системой стержней, посвящены исследования [4,5]. Первая основная задача для прямоугольника, одна сторона которого усилена неизгибаемым стержнем (влияние касательных контактных напряжений на деформацию стержня также не учитывается), рассмотрена в [6], мелановским стержнем — в [7].

1. Пусть к упругой пластинке $-\infty < x < \infty$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ толщины h на участках $0 \leqslant x < -\infty$, $y = \pm 1$ припаяны не сопротивляющиеся изгибу упругие мелановские стержни постоянного сечения S. К торцам стержней $x = 0$, $y = \pm 1$ приложены продольные силы T, на свободные поверхности стержней действуют касательные усилия $q(x)$. Требуется определить напряжения в пластинке, затухающие при $x \to -\infty$.

В этой задаче граничные условия для пластинки имеют вид

$$\eta(x) \equiv h^{-1} S E_0 \partial^2 u / \partial x^2 + \tau_{xy} = -h^{-1} q(x) \quad (0 \leqslant x < \infty,\ y = -1) \tag{1.1}$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad (-\infty < x < 0,\ y = -1), \qquad SE_0 \partial u / \partial x = T \quad (x = 0,\ y = -1) \tag{1.2}$$

$$\tau_{xy} = v = 0 \quad (-\infty < x < \infty,\ y = 0) \qquad \sigma_y = 0 \quad (-\infty < x < \infty,\ y = -1) \tag{1.3}$$

где E_0 — модуль упругости стержня. Решение выражается формулами [8]

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_L A(p)\,\chi(p)\,e^{px}\,dp, \qquad v(x, y) = \frac{1}{2\pi i}\int_L A(p)\,\zeta(p)\,e^{px}\,dp \tag{1.4}$$

$$\chi(p) = p\,[\varepsilon(p) - \rho(p)], \qquad \zeta(p) = \varepsilon'(p) + \rho'(p)$$

Здесь контур L лежит в полосе $0 < \operatorname{Re} p < \delta$, штрих означает производную по y, в силу (1.3) (ν и E — упругие постоянные пластинки)

$$\rho(p) = 4E^{-1}\cos p\cos py, \qquad \varepsilon(p) = 2E^{-1}(1+\nu)\,p\,(y\cos p\sin py - \sin p\cos py)$$

Из условий (1.1) и (1.2) следует

$$\tau^+(p) = -A(p)\,p^2 N_1(p), \qquad \eta^+(p) + \eta^-(p) = -A(p)\,p^2 N_2(p) \tag{1.5}$$

$$\tau^+(p) = \int_0^\infty \tau_{xy}(x, -1)\,e^{-px}\,dx, \qquad \eta^\pm(p) = \pm\int_0^{\pm\infty}\eta(x)\,e^{-px}\,dx$$

$$N_1(p) = \sin 2p + 2p, \qquad N_2(p) = 2ap\cos^2 p + N_1(p), \qquad a = 2E_0 SE^{-1}h^{-1}$$

Нули функций $N_1(p)$ и $N_2(p)$ при $\operatorname{Re} p \geqslant 0$, $\operatorname{Im} p \geqslant 0$ обозначим соответственно через a_k и b_k. Будем считать, что $a_{-k} = -a_k$, $b_{-k} = -b_k$. Очевидно, среди a_k и b_k нет вещественных и мнимых нулей, кроме $a_0 = 0$ и $b_0 = 0$, при больших k

$$a_k = k\pi + iO(\ln k), \qquad b_k = k\pi + iO(1) \tag{1.6}$$

Исключив в (1.5) функцию $A(p)$, получим уравнение Винера — Хопфа [9]

$$\tau^+(p) = K(p)\,[\eta^+(p) + \eta^-(p)], \qquad K(p) = N_1(p)\,N_2^{-1}(p)$$

Решение его ищется, как в [8], по формулам Ф. Д. Гахова [10] и имеет вид ($p = \alpha + i\beta$)

$$\tau^+(p) = \tau_0^+(p)\left[-\frac{1}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\eta^+(t)\,dt}{\eta_0^-(t)\,(t-p)} + B\right], \qquad -\pi < \arg(1 \pm p) < \pi \tag{1.7}$$

$$\tau_0^+(p) = a^{-1/2}(1+p)^{-1/2}\exp\left[\frac{p}{\pi}\int_0^\infty \frac{\ln\,[a\,(1+t^2)^{1/2}K(it)\,dt]}{t^2+p^2}\right]$$

$$\eta_0^-(p) = \frac{1}{\tau_0^+(-p)}$$

$$\tau^+(i\beta) = \frac{\tau_0^+(i\beta)}{2\pi i}\int_{-i\infty}^{i\infty}\left[\frac{\eta^+(i\beta)}{\eta_0^-(i\beta)} - \frac{\eta^+(t)}{\eta_0^-(t)}\right]\frac{dt}{t-i\beta} + \frac{K(i\beta)}{2}\,\eta^+(i\beta) + B\tau_0^+(i\beta)$$

$$\tau_0^+(i\beta) = (1+i\beta)^{-1/2}(1+\beta^2)^{1/4}[K(i\beta)]^{1/2}\exp\left\{\frac{i\beta}{\pi}\int_0^\infty \ln\left[\frac{(1+t^2)^{1/2}K(it)}{(1+\beta^2)^{1/2}K(i\beta)}\right]\frac{dt}{t^2-\beta^2}\right\}$$

Величина B находится из условия равновесия стержня

$$\eta^+(0) + Th^{-1} = \tau^+(i\beta)\,|_{\beta=0}$$

Она полностью определяет интенсивность неограниченно растущих при $x \to +0$ касательных напряжений

$$\tau_{xy}(x, -1) = B\,(\pi ax)^{-1/2} + O(x^{1/2})$$

В частности, если $q(x) = 0$, то

$$B = Th^{-1}(1 + {}^1/_2 a)^{1/2} \tag{1.8}$$

2. Выделим теперь из полосы прямоугольную пластину — $l_1 \leqslant x \leqslant l_2$, $-1 \leqslant y \leqslant 1$ (l_1, $l_2 > 0$). На ее продольных гранях оставим прежние условия (1.1) — (1.3), сохранив T и полагая для простоты $q(x) = 0$. На торцах пластинки зададим симметричные по y нормальные напряжения (перемещения) и касательные перемещения (напря-

жения), к правым концам стержней приложим одинаковые продольные усилия T_2:

$$\tau_{xy}(-l_1, y) = f_1(y), \quad u(-l_1, y) = g_1(y) \tag{2.1}$$

$$\sigma_x(l_2, y) = f_2(y), \quad v(l_2, y) = g_2(y), \quad SE_0 \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=-1,\, x=l_2} = T_2$$

Решение будем искать в форме рядов

$$u(x, y) = u^*(x, y) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} u^k(x, y), \quad v(x, y) = v^*(x, y) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} v^k(x, y) \tag{2.2}$$

Здесь $u^*(x, y)$, $v^*(x, y)$ — неоднородные перемещения (1.4), в которых функция $A(p)$ выражается формулами (1.5), (1.7) и (1.8), $u^k(x, y)$, $v^k(x, y)$ — система кусочно-однородных решений задачи (1.1) — (1.3) при $q(x) = 0$, $T = 0$

$$u^\circ(x, y) = A_0\left\{\frac{x}{E} - \frac{E_0 S(1 + {}^1/_2 a)^{1/2}}{2\pi i E h}\int_L \frac{\tau_0^+(p)\,\chi(p)\,e^{px}\,dp}{p^2 N_1(p)}\right\} + B_0 \tag{2.3}$$

$$v^\circ(x, y) = -A_0\left\{\frac{\nu y}{E} + \frac{E_0 S(1 + {}^1/_2 a)^{1/2}}{2\pi i E h}\int_L \frac{\tau_0^+(p)\,\zeta(p)\,e^{px}\,dp}{p^2 N_1(p)}\right\}$$

$$u^k(x, y) = \Phi^k\{\chi(p)\}, \quad v^k(x, y) = \Phi^k\{\zeta(p)\}$$

$$\Phi^k\{f(p)\} = A_k \operatorname{Re} H_k[f(p)] + B_k \operatorname{Im} H_k[f(p)]$$

$$H_k[f(p)] = f(b_k)\,e^{b_k x} + b_k N_1(b_k)\,[\tau_0^+(b_k)]^{-1} I(b_k), \quad k > 0$$

$$H_k[f(p)] = f(a_k)\,e^{a_k x} - a_k N_2(a_k)\,[\eta_0^-(a_k)]^{-1} I(a_k), \quad k < 0$$

$$I(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\tau_0^+(p)\,f(p)\,e^{px}\,dp}{p(p-c)\,N_1(p)}$$

Элементы этой системы строятся обычным путем [8]. Чтобы проверить, удовлетворяют ли они условиям (1.1) — (1.3), достаточно заменить в них по теореме Коши контурные интегралы рядами вычетов в нулях функций $N_1(p)$ и $N_2(p)$.

Определим коэффициенты A_k и B_k. Используя соотношение ортогональности П. А. Шиффа [11] ($p_{k1} = a_k$, $p_{k2} = b_k$)

$$\int_{-1}^{0} [\varepsilon'(p_{ks})\,\rho'(p_{ns}) + \varepsilon'(p_{ns})\,\rho'(p_{ks})]\,dy = 0 \qquad (p_{ks}^2 \neq p_{ns}^2)$$

разложим заданные функции в ряды по однородным решениям

$$g_1(y) = \sum_{k=1}^{\infty} [c_k\chi(a_k) + \bar{c}_k\chi(\bar{a}_k)] + c_0, \quad g_2(y) = \sum_{k=1}^{\infty} [d_k\zeta(b_k) + \bar{d}_k\zeta(\bar{b}_k)] + d_0 y \tag{2.4}$$

$$c_k = a_k^{-1}N^{-1}(a_k)\int_{-1}^{0}\left\{\left[f_1(y) - \frac{E}{1+\nu}\,g_1'(y)\right]\varepsilon'(a_k) + f_1(y)\,\rho'(a_k)\right\}dy$$

$$d_k = N^{-1}(b_k)\int_{-1}^{0}\left\{f_2(y)\,[\rho(b_k) - \varepsilon(b_k)] - \frac{E}{1+\nu}\,g_2'(y)\,\varepsilon(b_k)\right\}dy -$$

$$-\frac{4SE_0\cos^2 b_k}{\nu E h N(b_k)}$$

$$d_0 = \nu^{-1}(Eh + SE_0)^{-1}\left[\int_{-1}^{0} f_2(y)\,dy + SE_0 T_2\right]$$

$$N(p) = \frac{2E}{1+\nu}\int_{-1}^{0}\varepsilon'(p)\,\rho'(p)\,dy$$

Коэффициенты c_0 и B_0 на деформацию пластинки не влияют.

Функции $u^k(-l_1, y)$, $u^*(-l_1, y)$ и $v^k(l_2, y)$, $v^*(l_2, y)$ разложим в ряды по вычетам в нулях функций $N_1(p)$ и $N_2(p)$ соответственно, т. е. в ряды типа

$$v^k(l_2, y) = \frac{1}{2}(A_k - iB_k)\left\{e^{b_k l_2}\zeta(b_k) + \sum_{n=-1}^{-\infty}\left[T_1(b_k, b_n)e^{b_n l_2}\zeta(b_n) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + T_1(b_k, \bar{b}_n)e^{\bar{b}_n l_2}\zeta(\bar{b}_n) + \frac{1}{2}(A_k + iB_k)\right]\right\}\left\{e^{\bar{b}_k l_2}\zeta(\bar{b}_k) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=-1}^{-\infty}[T_1(\bar{b}_k, b_n)e^{b_n l_2}\zeta(b_n) + T_1(\bar{b}_k, \bar{b}_n)e^{\bar{b}_n l_2}\zeta(\bar{b}_n)]\right\}$$
$$T_1(s, p) = sN_1(s)\eta_0^-(p)[p(p-s)\tau_0^+(s)N_2^*(p)]^{-1}, \qquad k > 0$$

где звездочка означает производную по p. Эти разложения подставим в (2.2), а затем в левые части условий (2.1) для u и v, в двойных рядах изменим порядки суммирования по k и n. В правые части тех же условий (2.1) вместо $g_1(y)$ и $g_2(y)$ подставим ряды (2.4). Приравнивая множители при y, найдем

$$A_0 = -(\nu T + Ehd_0)(\nu Eh + E_0 S)^{-1} \tag{2.5}$$

Используя соотношения четности $\chi(-p) = -\chi(p)$, $\zeta(-p) = \zeta(p)$, приравнивая множители при функциях $\chi(a_k)$, $\chi(\bar{a}_k)$, $\zeta(b_k)$, $\zeta(\bar{b}_k)$ и вводя неизвестные

$$X_k - iY_k = (A_k - iB_k)\exp(l_2 b_k) \quad \text{при } k > 0 \tag{2.6}$$
$$X_k - iY_k = (A_k - iB_k)\exp(-l_1 a_k) \quad \text{при } k < 0$$

получим бесконечную систему алгебраических уравнений с двусторонним определителем

$$\varkappa X_k + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \{X_n \operatorname{Re}[\varphi_n(t_k) + \varphi_n(\bar{t}_k)] + Y_n \operatorname{Im}[\varphi_n(t_k) + \varphi_n(\bar{t}_k)]\} = -\operatorname{Re}\psi_k \tag{2.7}$$

$$\varkappa Y_k + \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \{Y_n \operatorname{Re}[\varphi_n(t_k) - \varphi_n(\bar{t}_k)] - X_n \operatorname{Im}[\varphi_n(t_k) - \varphi_n(\bar{t}_k)]\} = \operatorname{Im}\psi_k$$

$$n \neq 0, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad \varkappa = \operatorname{sign} k, \quad t_k = \begin{cases} b_k, & k > 0 \\ a_k, & k < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_n(a_k) = T_2(b_n, -a_k)\exp(l_1 a_k - l_2 b_n) \quad (n > 0)$$
$$\varphi_n(b_k) = T_1(b_n, -b_k)\exp(-l_2 b_k - l_2 b_n) \quad (n > 0)$$
$$\varphi_n(a_k) = T_4(a_n, -a_k)\exp(l_1 a_k + l_1 a_n) \quad (n < 0)$$
$$\varphi_n(b_k) = T_3(a_n, -b_k)\exp(l_1 a_n - l_2 b_k) \quad (n < 0)$$
$$T_2(s, p) = -\frac{sN_1(s)\tau_0^+(p)}{p(p-s)\tau_0^+(s)N_1^*(p)}$$
$$T_3(s, p) = -\frac{sN_2(s)\eta_0^-(p)}{p(p-s)\eta_0^-(s)N_2^*(p)}$$
$$T_4(s, p) = \frac{sN_2(s)\tau_0^+(p)}{p(p-s)\eta_0^-(s)N_1^*(p)}, \qquad \psi_k = -\frac{\eta_0^-(-b_k)(1 + {}^1/_2 a)^{1/2}}{b_k^2 e^{b_k l_2} N_2^*(b_k)} \times$$
$$\times\left(\frac{A_0 a}{2} + \frac{T}{h}\right) - d_k \quad (k > 0), \qquad \psi_k = \frac{\tau_0^+(-a_k)e^{a_k l_1}(1 + {}^1/_2 a)^{1/2}}{a_k^2 N_1^*(a_k)} \times$$
$$\times\left(\frac{A_0 a}{2} + \frac{T}{h}\right) - c_{-k} \quad (k < 0)$$

В силу асимптотических оценок (1.6) внедиагональные элементы системы (2.7) экспоненциально убывают по номерам строк и столбцов. Следовательно, абсолютно сходится составленный из них двойной ряд, и система нормальна по Пуанкаре — Коху. Опираясь на теорию нормальных систем [12], можно показать, что нормальное решение X_k, Y_k существует, единственно, определяется правилом Крамера и оценивается при больших номерах k асимптотическими формулами ($\gamma < 2$)

$$(2.8)\quad X_k = -\operatorname{Re}\psi_k + O\left[k^\gamma \exp(-k\pi l_2)\right],\quad Y_k = \operatorname{Im}\psi_k + O\left[k^\gamma \exp(-k\pi l_2)\right]\quad (k > 0)$$

$$X_k = \operatorname{Re}\psi_k + O\left[k^\gamma \exp(k\pi l_1)\right],\quad Y_k = -\operatorname{Im}\psi_k + O\left[k^\gamma \exp(k\pi l_1)\right]\quad (k < 0)$$

Для вычисления первых неизвестных X_k, Y_k в системе (2.7) целесообразно оставлять m неизвестных X_k, Y_k с отрицательными и $E\,(ml_1l_2^{-1})$ с положительными номерами k ($E\,(x)$ означает здесь целую часть x). Тогда скорость сходимости решения X_k^m, Y_k^m усеченной системы к точному решению оценивается формулой

$$(2.9)\quad \max_k \{|X_k - X_k^m|, |Y_k - Y_k^m|\} = O\{|\psi_m| m^{2\gamma} e^{-m\pi l_1}\}$$

Элементарные оценки, основанные на выражениях (2.2), (2.3), (2.6) и (2.9), показывают, что наибольшая относительная погрешность δ в решении (2.2) возникает на торце прямоугольника $x = -l_1$ и определяется формулой $\delta \sim \exp(-m\pi l_1)$. Таким образом, при $\delta = 0{,}01$ и при $l_1 > {}^1/_2$, например, достаточно решить систему (2.7), усеченную до $m = 3$, а для остальных неизвестных X_k, Y_k пользоваться асимптотикой (2.8).

Если функции $f_s(y)$ и $g_s(y)$ дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют в углах пластинки условиям согласованности с величиной продольных усилий T_2 и с граничными условиями (1.1) — (1.3), то ряды (2.2) при $x \to -l_1$, l_2 равномерно сходятся к рядам (2.4).

Изложенный метод шире и эффективнее метода, примененного в работе [8] к более простой задаче для прямоугольника. Здесь значительно улучшается структура системы (2.7); возможность разлагать произвольные торцевые функции в ряды (2.4) позволяет решать путем расчленения задачи для прямоугольника с несколькими типами граничных условий, т. е. с несколькими стержнями на боковой поверхности, и с неоднородными условиями на торцах. Эффективность метода подтвердили также расчеты на ЭВМ [13].

Характер особенностей, возникающих в точках раздела типов граничных условий, во всех задачах, о которых идет речь, очевидно, полностью определяется особенностями в отдельных элементах системы кусочно-однородных решений (2.3). Следуя соответствующим рассуждениям из работы [14], нетрудно установить, что при $x \to +0$

$$\tau_{xy}^{\circ}(x, 1) = -\frac{A_0E_0S\sqrt{1+{}^1/_2a}}{Eh\sqrt{\pi ax}} + O(\sqrt{x})$$

$$\tau_{xy}^{k}(x, 1) = -(A_k \operatorname{Re} M_k + B_k \operatorname{Im} M_k)(\pi ax)^{-1/2} + O(\sqrt{x})$$

$$M_k = \frac{b_kN_1(b_k)}{\tau_0^{+}(b_k)}\quad (k > 0),\qquad M_k = \frac{a_kN_2(a_k)}{\eta_0^{-}(a_k)}\quad (k < 0)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи торцевых условий (2.1). При $f_s(y) = g_s(y) = 0$ и $T_2 = 0$ решение (2.2), (2.5), (2.7) определяет деформацию полосы $-1 \leqslant y \leqslant 1$, усиленной периодической системой стержней. К концам каждого стержня прикладываются действующие в одну сторону продольные усилия $\pm T$, направления их чередуются от стержня к стержню. При тех же условиях можно полагать $l_1 = \infty$ или $l_2 = \infty$. В первом случае $A_k = 0$ при $k < 0$. В системе (2.7) из четырех блоков остается один с номерами элементов $k > 0$, $n > 0$. Решение определяет напряжения в полосе, на которую через два симметричных относительно оси x стержня длиной $2l_2$ передается усилие $4T$. Второй случай — это задача о полосе, симметрично усиленной двумя полубесконечными стержнями. Расстояние между концами стержней, припаянных к одной грани, равно $2l_1$, приложенные к ним силы T направлены в противоположные стороны. В решении (2.2) при $k > 0$ $A_k = 0$. В матрице системы (2.7) за счет экспоненциальных множителей обращаются в нули элементы трех блоков, и остается только блок с номерами элементов $k < 0$, $n < 0$.

Поступила 27 VIII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
2. *Каландия А. И.* О напряженном состоянии в пластинках, усиленных ребрами жесткости. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
3. *Воробьев В. Л., Попов Г. Я.* Контактная задача для упругой полуплоскости и сцепленного с ней полубесконечного упругого стержня. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
4. *Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М.* Периодическая контактная задача для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
5. *Морарь Г. А., Попов Г. Я.* К контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
6. *Theocaris P. S., Dafermos K.* The elastic strip under mixed boundary conditions. J. Appl. Mech., 1964. vol. 31, ser. E, № 4. (Рус. перев: Прикл. механ. Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е, 1964, № 4).
7. *Микаэлян В. В.* О двух задачах растяжения упругого прямоугольника с упругими накладками. Докл. АН АрмССР, 1973, т. 56, № 4.
8. *Нуллер Б. М.* О сжатии упругого слоя балочными плитами. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
9. *Нобл Б.* Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
10. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
11. *Нуллер Б. М.* О соотношении обобщенной ортогональности П. А. Шиффа. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
12. *Каган В. Ф.* Основания теории определителей. Одесса, Госиздат Украины, 1922.
13. *Глаговский В. Б., Нуллер Б. М.* Программа расчета балок на упругой полосе методом кусочно-однородных решений. Л., «Энергия», 1973.
14. *Нуллер Б. М.* Контактные задачи для упругого полубесконечного цилиндра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.

УДК 539.374

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО МЕТОДА К РЕШЕНИЮ НАЧАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ПЛОСКОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

А. З. Журавлев, Л. С. Ураждина, В. И. Ураждин

(Ростов-на-Дону)

С помощью двумерного преобразования Лапласа — Карсона получено решение задачи Гурса для уравнения, описывающего плоскую деформацию идеально пластического тела. В качестве примера рассмотрены основные зависимости в поле, образованном круговыми дугами.

Одним из методов решения краевых задач плоского течения идеально пластического тела является линеаризация квазилинейного уравнения в частных производных гиперболического типа с помощью подстановки С. Г. Михлина [1], приводящей его к телеграфному уравнению. Решение линеаризованного уравнения может быть найдено с применением интегральной формулы Римана [2, 3], разложением в ряд по метацилиндрическим функциям [4], а также с помощью интегральных преобразований.

1. Все функции, фигурирующие в данной работе, предполагаются преобразуемыми по Лапласу [5]. Заметим, что это требование практически не вносит ограничений.

Обозначим криволинейные характеристические координаты в физической плоскости через α, β, в плоскости годографа скоростей через α', β'. Как известно, каждая из функций $X, Y, U, V, R, S, \rho, \delta$ плоской задачи теории идеальной пластичности удовлетворяет телеграфному уравнению

$$d^2f/d\zeta d\varkappa + f = 0 \tag{1.1}$$