

## ОБ ОДНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

В. В. Калинин

(Ростов-на-Дону)

Рассматриваются радиальные колебания бесконечного упругого кругового единичного радиуса цилиндра под действием насаженного на него ширины  $2a$  жесткого банджа, колеблющегося с частотой  $\omega$ . Обосновывается разрешимость этой задачи и единственность ее решения на всех рассматриваемых в данной работе частотах. Предлагается способ построения приближенных формул, описывающих напряженное состояние под штампом и поведение поверхности цилиндра вне штампа с заданной точностью. Даются результаты численного анализа волновых процессов под штампом и на свободной поверхности цилиндра для случая плоского штампа.

1. С использованием принципа предельного поглощения [1,2] задача сводится к решению интегрального уравнения

$$(1.1) \quad \int_{-a}^a k(x-t) q(t) dt = 2\pi f(x), \quad |x| \leq a$$

$$(1.2) \quad k(t) = \int_{\sigma} K(u) e^{iut} du$$

$$(1.3) \quad K(u) = -\kappa^2 \sigma_1 [(u^2 - \frac{1}{2} \kappa^2)^2 I(\sigma_1) - u^2 \sigma_1 \sigma_2 I(\sigma_2) + 2\kappa^2 \sigma_1]^{-1}$$

$$\sigma_1 = (u^2 - \mu \kappa^2)^{1/2}, \quad \sigma_2 = (u^2 - \kappa^2)^{1/2}, \quad \kappa^2 = \rho \omega^2 G^{-1}$$

$$\mu = (\frac{1}{2} - \nu)(1 - \nu)^{-1}, \quad I(u) = 4I_0(u) I_1^{-1}(u)$$

Здесь  $I_0(u)$ ,  $I_1(u)$  — функции Бесселя мнимого аргумента,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $G$  — модуль сдвига,  $\rho$  — плотность материала,  $q(x)$  и  $f(x)$  — функции, характеризующие соответственно контактные напряжения и смещение точек поверхности цилиндра под штампом.

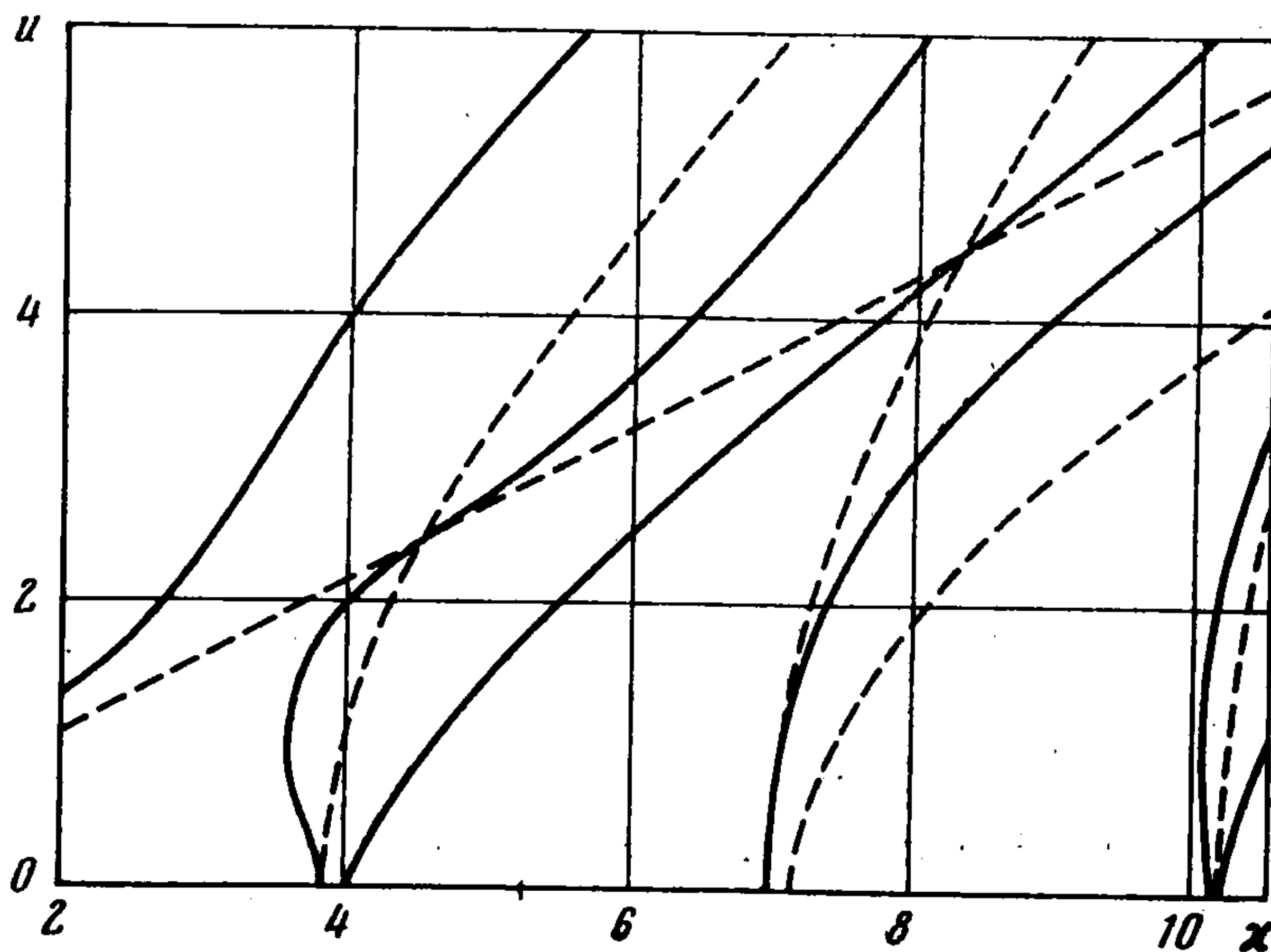
Функция  $K(u)$  (1.3) — аналитическая в комплексной области, четная, вещественная на действительной оси и имеет на последней конечное число нулей и полюсов. При  $u \rightarrow \infty$

$$(1.4) \quad K(u) = c_1 u^{-1} + c_2 u^{-2} + O(u^{-3})$$

Разложение (1.4) характерно для ядер интегральных уравнений, которые возникают при исследовании задач с цилиндрическими областями контакта [3]. В рассматриваемом случае  $c_1 = 1 - \nu$ ,  $c_2 = \frac{1}{2}(1 - \nu)(3 - 4\nu)$ .

Контур  $\sigma$  в (1.2) лежит на вещественной оси и отклоняется от нее, лишь обходя отрицательные нули и полюсы  $K(u)$  (1.3) сверху, а положительные снизу [1, 2].

2. На фигуре приведены нейтральные кривые, показывающие распределение вещественных нулей (пунктирные линии) и полюсов (сплошные линии) ядра  $K(u)$  (1.3) в зависимости от величины параметра  $\kappa$  ( $\nu = 0.3$ ). Видно, что с увеличением частоты (в данном случае параметра  $\kappa$ ) увеличивается количество нулей  $m_1$  и полюсов  $m$  (в общем случае  $m \geq m_1$ ). Заметим [1], что  $m_1$  и  $m$  — количество пар волн с неубывающей амплитудой соответственно под штампом и на свободной поверхности цилиндра.



Нетрудно обнаружить, что для каждого фиксированного  $x$  (за исключением случаев выпуклости нейтральных кривых влево, которые здесь не рассматриваются) наблюдается строгое чередование нулей и полюсов (это имеет место и при значениях  $x$ , соответствующих точкам пересечения нейтральных кривых, так как в этих точках функция  $K(u)$ , очевидно, имеет лишь однократный нуль).

Из условия строгого чередования нулей и полюсов следует [1, 2] разрешимость интегрального уравнения (1.1) и единственность его решения при всех рассматриваемых частотах.

3. Для построения приближенного решения интегрального уравнения (1.1) заменим ядро  $K(u)$  (1.3) функцией

$$(3.1) \quad K^*(u) = c_1 (u^2 + B^2)^{-1/2} \prod_{k=1}^n (u^2 - z_k^2) (u^2 - \gamma_k^2)^{-1}$$

Здесь  $B \gg 1$  — заданный заранее параметр аппроксимации,  $\gamma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ) и  $z_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m_1$ ) — вещественные полюса и нули функции  $K(u)$  (1.3). Остальные  $\gamma_k = iA$  ( $k = m+1, m+2, \dots, n$ ),  $A > 0$  — дополнительный параметр аппроксимации, необходимость введения которого диктуется использованием в качестве аппроксимирующей функции полинома Бернштейна [4];  $z_k$  ( $\text{Im } z_k > 0$ ,  $k = m_1+1, m_1+2, \dots, n$ ) — комплексные числа, которые вместе с параметром  $A$  удовлетворяют условию наименьшего отклонения [5]  $K^*(u)$  (3.1) от  $K(u)$  (1.3) на действительной оси. Оценка погрешности приближенного решения интегрального уравнения дается в [5], где используется подобная (3.1) форма аппроксимирующей функции.

4. Рассмотрим случай  $f(x) = \exp i\eta x$ . Решение уравнения (1.1) имеет вид

$$(4.1) \quad q(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \left\langle \left[ \frac{e^{-i\alpha\eta}}{K_+(\eta)(u+\eta)} - \sum_{k=1}^n \frac{a_k^+}{z(u-z_k)} \right] \frac{e^{-iu(a+x)}}{K_+(u)} - \right. \\ \left. - \left[ \frac{e^{i\alpha\eta}}{K_-(\eta)(u+\eta)} + \sum_{k=1}^n \frac{a_k^-}{2(u+z_k)} \right] \frac{e^{iu(a-x)}}{K_-(u)} \right\rangle du + O(e^{-2Ba}).$$

$$K_\pm(u) = \sqrt{c_1} (B \mp iu)^{-1/2} \prod_{k=1}^n (z_k \pm u) (\gamma_k \pm u)^{-1}$$

$$a_k^\pm = r_k \sum_{s=1}^n [B_{ks}^- \alpha^-(-z_s) \pm B_{ks}^+ \alpha^+(-z_s)]$$

$$r_k = e^{2aiz_k} K_+(z_k) [K_+'(-z_k)]^{-1}$$

$$\alpha^\pm(z) = e^{i\alpha\eta} K_-^{-1}(\eta) (z-\eta)^{-1} \pm e^{-i\alpha\eta} K_+^{-1}(\eta) (z+\eta)^{-1}$$

Здесь  $B_{ks}^\pm$  — элементы матрицы, обратной к матрице вида  $\|\delta_{ik} \pm (z_i + z_k)^{-1} r_k\|_1^n$ ,  $\delta_{ik}$  — символ Кронекера.

Поведение поверхности цилиндра вне штампа описывается функциями

$$(4.2) \quad \varphi^\pm(x) = e^{i\eta x} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty-i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} K_+(u) e^{iu(a\mp x)} \left[ e^{\pm i\alpha\eta} K_\mp^{-1}(\eta) (u+\eta)^{-1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^\mp (u+z_k)^{-1} \right] du + O(e^{-2Ba}), \quad \pm x > a$$

Приводя правые части (4.1) и (4.2) к виду, удобному для применения формул операционного исчисления, и используя последние, получаем

$$(4.3) \quad q(x) = e^{i\eta x} K^{-1}(\eta) [T^+(\eta) + T^-(-\eta) - 1] + A^+ e^{-B(a+x)} [\pi(a+x)]^{-1/2} +$$

$$\begin{aligned}
 & + A^- e^{-B(a-x)} [\pi(a-x)]^{-1/2} + \sum_{k=1}^n [N_k^+ e^{iz_k(a+x)} + N_k^- e^{iz_k(a-x)}] + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n K_+^{-1}(z_k) [a_k^+ (1 - T^+(-z_k)) e^{-iz_k(a+x)} - \\
 & - a_k^- (1 - T^-(-z_k)) e^{-iz_k(a-x)}] + O(e^{-2Ba}), \quad |x| \leq a \\
 A^\pm & = \frac{e^{\mp ia\eta}}{K(\eta) \sqrt{B \pm i\eta}} + \sum_{k=1}^n \frac{S^\pm(z_k)}{K_+(-z_k) \sqrt{B + iz_k}} \mp \\
 & \mp \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{a_k^\pm}{K_+(z_k) \sqrt{B - iz_k}} \\
 (4.4) \quad \varphi^\pm(x) & = e^{i\eta x} [1 - T_0^\pm(\pm\eta)] + \sum_{k=1}^m M_k^\pm e^{i\gamma_k(-a \pm x)} + X^\pm(x), \quad \pm x > a \\
 X^\pm(x) & = \frac{i(-1)^l}{l!} \frac{\partial^l}{\partial A^l} \left[ \frac{e^{A(a \mp x)}}{\sqrt{B - A}} P^\pm(iA) \prod_{k=1}^n (A + iz_k) \right] \left[ \prod_{k=1}^m (A + i\gamma_k) \right] + \\
 & + O(e^{-2Ba}) \\
 N_k^\pm & = T^\pm(z_k) S^\pm(z_k) [K_+(-z_k)]^{-1}, \quad P^\pm(x) = T_0^\pm(x) S^\mp(-x) \\
 l & = n - m - 1 \\
 M_k^\pm & = T_0^\pm(\gamma_k) S^\mp(-\gamma_k) [R_+(-\gamma_k)]^{-1}, \quad R_\pm(x) = K_\pm^{-1}(x) \\
 S^\pm(x) & = -e^{\mp ia\eta} R_\pm(\eta) (x \mp \eta)^{-1} \pm \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n a_k^\pm (z_k + x)^{-1} \\
 T^\pm(\eta) & = \operatorname{erf} \sqrt{(B + i\eta)(a \pm x)}, \quad T_0^\pm(\eta) = \operatorname{erf} \sqrt{(B + i\eta)(-a \pm x)}
 \end{aligned}$$

В правой части (4.3) обнаруживается вырожденная составляющая решения, а также экспоненциально убывающие по мере удаления от краев штампа члены, несущие характерную для контактных задач особенность на краях штампа [3].

Умножая (4.3) на временной множитель  $\exp(-i\omega t)$ , обнаружим под штампом  $m_1$  пар волн с неубывающей амплитудой. Остальные волновые члены в (4.3) экспоненциально убывают с удалением от краев штампа.

Умножая (4.4) на  $\exp(-i\omega t)$ , заметим, что на свободной поверхности цилиндра от штампа в обе стороны движутся по  $m$  волн с неубывающей амплитудой. Остальные члены, входящие в правую часть (4.4), экспоненциально убывающие. Отраженных волн здесь, как и надо было ожидать, нет. Если в (4.4) и (4.3) комплексные коэффициенты  $M_k^\pm$  и  $N_k^\pm$  представить в тригонометрической форме, то можно получить значения амплитуды и сдвига фазы для соответствующей волны.

5. Из сказанного можно заключить, что наиболее четко волновой процесс проявляется на достаточном [удалении от краев штампа. Исследуем функции  $q(x)$ ,  $\varphi^+(x)$  и  $\varphi^-(x)$  в предположении  $|a - |x|| > B^{-1}$  в случае плоского штампа ( $\eta = 0$ ). Имеем

$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad q(x) & = K^{-1}(0) + \sum_{k=1}^n N_k [e^{iz_k(a+x)} + e^{iz_k(a-x)}] + O(e^{-B(a-|x|)}) \\
 \varphi^\pm(x) & = \varphi(\pm x - a), \quad \pm x > a \\
 \varphi(t) & = \sum_{k=1}^m S_k e^{i\gamma_k t} + X(t) + O(e^{-Bt}), \quad t > 0
 \end{aligned}$$

$$N_k = R_+(0) \left[ \sum_{p=1}^n r_p (z_p + z_k)^{-1} \sum_{s=1}^n B_{ps}^+ z_s^{-1} - z_k^{-1} \right] [K_+'(-z_k)]^{-1}$$

$$S_k = R_+(0) \left[ \gamma_k^{-1} - \sum_{s=1}^n r_s (\gamma_k - z_s)^{-1} \sum_{p=1}^n B_{sp}^+ z_p^{-1} \right] [R_+'(-\gamma_k)]^{-1}$$

$$X(x) = \frac{(-1)^{n-m-1}}{(n-m-1)!} \frac{\partial^{n-m-1}}{\partial A^{n-m-1}} \left[ \frac{e^{-Ax}}{\sqrt{B-A}} \prod_{k=1}^n (A + iz_k) \times \right.$$

$$\left. \times \prod_{k=1}^m (A + i\gamma_k)^{-1} \left[ A^{-1} - \sum_{k=1}^n r_k (A + iz_k)^{-1} \sum_{s=1}^n B_{ks}^+ z_s^{-1} \right] R_+(0) \right]$$

Из вида правой части первого соотношения (5.1) заключаем, что в этом случае под штампом, на достаточном удалении от его краев, волновой процесс определяется суммой  $m_1$  стоячих волн. Остальные члены первого соотношения (5.1), кроме вырожденного, резко убывают, так как  $\text{Im } z_k > 0$ ,  $k = m_1 + 1, m_1 + 2, \dots, n$ . Также обнаруживаются по  $m$  волн, движущихся в обе стороны от штампа на свободной поверхности цилиндра. Функция  $X(x)$  в четвертом соотношении (5.1) экспоненциально убывающая.

Как пример, рассмотрим колебание штампа в случаях  $\kappa = 1.9$  и  $\kappa = 4.45$ .

При  $a = 7$ ,  $B = 10$ ,  $n = m + 4$  имеем:

1) Для  $\kappa = 1.9$ ,  $m = m_1 = 1$  с погрешностью менее 7%  $A = 3.441$ ,  $K^{-1}(0) = 4.057$ .

2) Для  $\kappa = 4.45$ ,  $m = 3$ ,  $m_1 = 2$  с погрешностью менее 2%  $A = 7.774$ ,  $K^{-1}(0) = -1.783$ .

Остальные величины, необходимые для подсчета  $q(x)$  для  $|x| < 6$  и  $\varphi(x)$  для  $x > 1$ , можно взять из таблицы. Функцией  $X(x)$  в третьем соотношении (5.1), как показывает счет, на участке  $x > 1$  можно пренебречь.

$\kappa$	$\text{Re}z_k$	$\text{Im}z_k$	$\text{Re}N_k$	$\text{Im}N_k$	$\gamma_k$	$\text{Re}S_k$	$\text{Im}S_k$
1.90	1.016	—	-0.669	-0.181	1.232	-0.137	-0.162
	—	2.261	-0.220	-0.043			
	0.623	4.188	-0.090	0.073			
	0.623	4.188	0.057	0.101			
	—	7.875	1.947	0.370			
4.45	2.263	—	-0.984	0.402	0.752	0.912	0.127
	2.379	—	-0.209	0.090			
	—	2.940	1.433	-2.575			
	-1.293	7.683	-0.040	0.101			
	1.293	7.683	0.036	0.097			
—	7.803	—	—	4.496	0.102	0.146	
—	11.000	—	—				

В первом случае функция  $q(x)$  для  $|x| < 6$  вполне удовлетворительно описывается формулой

$$q(x) = 4.057 + 1.386 \exp(4.335i) \cos 1.016x$$

с максимальной погрешностью при  $|x| = 6$  менее 7%. Функция  $\varphi(x)$  вполне удовлетворительно описывается формулой

$$\varphi(x) = 0.212 \exp(4.017i + 1.232ix)$$

с максимальной погрешностью при  $x = 1$  менее 5%. По мере удаления от краев штампа точность обеих формул повышается.

Во втором случае с помощью таблицы и первого и четвертого соотношений (5.1) можно показать, что волновой процесс под штампом на участке  $|x| < 6$  определяется

суммой двух стоячих волн, а волновой процесс на свободной поверхности цилиндра при  $x > 1$  определяется суммой трех волн, движущихся по обе стороны от штампа. Используя представление в тригонометрической форме комплексных чисел  $N_k$  и  $S_k$ , можно получить для каждой волны как амплитуду, так и сдвиг фазы.

Автор благодарит И. И. Воровича, Г. Я. Попова и В. А. Бабешко за внимание к работе и ценные советы.

Поступила 4 XII 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Бабешко В. А. К теории динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 3.
2. Бабешко В. А. О единственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 6.
3. Бабешко В. А., Калинин В. В. О взаимодействии жесткого бандажа с упругим цилиндром. Изв. АН СССР, МТТ, 1973, № 3.
4. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 1. М., «Наука», 1966.
5. Бабешко В. А., Калинин В. В. Об одном приближенном методе решения динамических контактных задач. ПММ, 1973, т. 38, вып. 3.

### КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛОС И ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИНОК, УСИЛЕННЫХ СТЕРЖНЯМИ

Б. М. Нуллер

(Ленинград)

Получено в замкнутой форме решение смешанной задачи для упругой полосы, усиленной полубесконечным гибким стержнем. Задача о деформации прямоугольной пластинки, одна грань которой усилена стержнем, методом кусочно-однородных решений сведена к нормальной системе Пуанкаре — Коха. Рассмотрены частные случаи этой задачи — полоса, усиленная периодической системой стержней, одним конечным или двумя полубесконечными стержнями.

Смешанные задачи для полуплоскости, спаянной с единичным мелановским стержнем постоянного сечения, рассматривались в работах [1-3], где имеются ссылки и на более ранние публикации. Полуплоскости, усиленной периодической системой стержней, посвящены исследования [4,5]. Первая основная задача для прямоугольника, одна сторона которого усилена неизгибаемым стержнем (влияние касательных контактных напряжений на деформацию стержня также не учитывается), рассмотрена в [6], мелановским стержнем — в [7].

1. Пусть к упругой пластинке  $-\infty < x < \infty$ ,  $-1 \leq y \leq 1$  толщины  $h$  на участках  $0 \leq x < -\infty$ ,  $y = \pm 1$  припаяны не сопротивляющиеся изгибу упругие мелановские стержни постоянного сечения  $S$ . К торцам стержней  $x = 0$ ,  $y = \pm 1$  приложены продольные силы  $T$ , на свободные поверхности стержней действуют касательные усилия  $q(x)$ . Требуется определить напряжения в пластинке, затухающие при  $x \rightarrow -\infty$ .

В этой задаче граничные условия для пластинки имеют вид

$$(1.1) \quad \eta(x) \equiv h^{-1} S E_0 \partial^2 u / \partial x^2 + \tau_{xy} = -h^{-1} q(x) \quad (0 \leq x < \infty, y = -1)$$

$$(1.2) \quad \tau_{xy} = 0 \quad (-\infty < x < 0, y = -1), \quad S E_0 \partial u / \partial x = T \quad (x = 0, y = -1)$$

$$(1.3) \quad \tau_{xy} = v = 0 \quad (-\infty < x < \infty, y = 0) \quad \sigma_y = 0 \quad (-\infty < x < \infty, y = -1)$$