УДК 539.3:530.18

О ПРИМЕНЕНИИ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕПЛОСКИХ ПЕРЕХОДНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ

В. И. Ризун, Ю. К. Энгельбрехт

(Ворошиловград, Таллин)

Рассматривается вопрос о построении модельного уравнения — уравнения Бюргерса для волновых процессов в термоупругой среде при наличии цилиндрической и сферической симметрии. Приводится решение краевой задачи для начальной системы уравнений.

Уравнение Бюргерса [1–4] служит в качестве модельного уравнения для среды с диссипативными свойствами. Решение уравнения Бюргерса, описывающего движение в декартовой системе координат, хорошо исследовано [5]. Однако случаи цилиндрической и сферической симметрии представляют определенные трудности.

1. Вывод уравнения Бюргерса с переменными коэффициентами. Рассмотрим процесс деформации, характеризуемый соотношениями

$$x^1 = X^1 + u^1(X^1,\ t), \qquad x^2 = X^2, \qquad x^3 = X^3$$

где X^k и x^k $(k = 1, 2, 3)$ — соответственно лагранжевы и эйлеровы переменные.

Исходными уравнениями являются закон сохранения импульса и закон сохранения энергии для сплошной среды, записанные в дифференциальной форме в эйлеровых переменных [6,7]. С учетом соотношений между физическими величинами соответственно в лагранжевых и эйлеровых переменных запишем эти уравнения в лагранжевом представлении. Лагранжевы координаты имеются в виду во всех дальнейших рассуждениях. Математической моделью рассматриваемой задачи служит пятиконстантная теория термоупругости. Введем в рассмотрение безразмерные величины, следуя работе [7]. Уравнения математической модели нелинейной термоупругости имеют тогда вид

$$\begin{aligned}
(1.1)\qquad & \left[1 + 3(1+m_0)\,\varepsilon\frac{\partial U}{\partial\xi} + \varepsilon n m_1\frac{U}{\xi} - \varepsilon\theta\right]\frac{\partial^2 U}{\partial\xi^2} + \\
& + n\left(1 + \varepsilon m_2\frac{\partial U}{\partial\xi} + \varepsilon m_3\frac{U}{\xi}\,U - \varepsilon\theta\right)\frac{1}{\xi}\frac{\partial U}{\partial\xi} - \\
& - n\left(1 + \varepsilon m_4\frac{U}{\xi} - \varepsilon\theta\right)\frac{1}{\xi}\frac{U}{\xi} - \left(1 + \varepsilon\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\theta}{\partial\xi} = \frac{\partial^2 U}{\partial\tau^2} \\
& \frac{1}{\omega}\frac{\partial P}{\partial\xi} + \frac{n}{\omega}\left(1 + \varepsilon\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)\frac{P}{\xi} = \\
& = (1+\theta)\frac{\partial\theta}{\partial\tau} + e(1+\theta)\left(1 + \varepsilon\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\tau} + ne(1+\theta)\left(1 + \varepsilon\frac{U}{\xi}\right)\frac{1}{\xi}\frac{\partial U}{\partial\xi} \\
& \beta\frac{\partial P}{\partial\tau} + P = \frac{\partial\theta}{\partial\xi}
\end{aligned}$$

Здесь ω, β, e — безразмерные параметры диффузии, релаксации и связанности соответственно, ε — малый параметр, m_i $(i = 0, 1, \ldots, 4)$ — безразмерные модули упругости, $n = 0, 1, 2$ для декартовых, цилиндрических и сферических координат соответственно.

Начальные условия для системы (1.1) предполагаются нулевыми, а краевые условия берутся в виде ($\varphi_1(\tau)$ — заданная непрерывная функция)

$$\left.\frac{\partial U(\xi,\tau)}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_A} = q\varphi_1(\tau), \qquad \theta(\xi,\tau)\,|_{\xi=\xi_A} = 0$$

В дальнейшем применим одновременно метод возмущений и метод преобразования координат. Для этого разлагаем зависимые переменные в ряд по малому параметру и вводим полухарактеристическую трансформацию независимых переменных в виде

$$\xi_1 = (1+e)^{1/2}\tau - \xi, \quad \tau_1 = \varepsilon\xi$$

Согласно методу возмущений получим в первом приближении уравнение

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + \frac{n}{2\tau_1} V_0 + a_1 V_0 \frac{\partial V_0}{\partial \xi_1} = b_2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi_1^2} \tag{1.2}$$

Здесь

$$V_0 = \partial U_0 / \partial \xi_1, \quad a_1 = {}^3/_2 (1 + m_0 + e)(1+e)^{-1}$$
$$a_2 = {}^1/_2\, e\, (\varepsilon\omega)^{-1} (1+e)^{-3/2}$$

Уравнение (1.2) решается при начальном условии

$$V_0(\xi_1, \tau_1)|_{\tau_1 = t_A} = -q\varphi_1(\xi_1), \quad t_A = \varepsilon\xi_A, \quad q = \text{const}$$

Решение уравнения (1.2) в таком виде представляет определенные трудности, поэтому, следуя [1], введем дополнительные преобразования. Рассмотрим раздельно случаи с различными значениями n.

Плоская волна, $n = 0$. В этом случае из (1.2) вытекает классическое уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial V_0}{\partial \tau_1} + a_1 V_0 \frac{\partial V_0}{\partial \xi_1} = a_2 \frac{\partial^2 V_0}{\partial \xi_1^2}$$

с известным решением [5].

Цилиндрическая волна, $n = 1$. Введем новые переменные

$$v_0 = V_0 (\tau_1)^{1/2}, \quad \tau_2 = 2\tau_1^{1/2}$$

Тогда получим из (1.2) уравнение

$$\frac{\partial v_0}{\partial \tau_2} + a_1 v_0 \frac{\partial v_0}{\partial \xi_1} = a_2^\circ(\tau_2) \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi_1^2} \tag{1.3}$$

Здесь

$$a_2^\circ(\tau_2) = {}^1/_2 a_2 \tau_2 \tag{1.4}$$

Уравнение (1.3) решается при начальном условии

$$v_0(\xi_1, \tau_2)|_{\tau_2 = t_B} = -t_A^{1/2} q\varphi_1(\xi_1), \quad t_B = 2t_A^{1/2}$$

Сферическая волна, $n = 2$. Введем новые переменные

$$v_0 = V_0 \tau_1, \quad \tau_2 = \ln \tau_1$$

Тогда получим уравнение (1.3), где

$$a_2^\circ(\tau_2) = {}^1/_2\, a_2 \exp \tau_2 \tag{1.5}$$

Начальное условие имеет вид

$$v_0(\xi_1, \tau_2)|_{\tau_2 = t_B} = -t_A q\varphi_1(\xi_1), \quad t_B = \ln t_A$$

2. Решение уравнения Бюргерса с переменными коэффициентами. Рассмотрение одномерных волн в нелинейной термоупругой среде приведено к уравнению Бюргерса (2.1) с начальным условием (2.2)

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + a_1 v_0 \frac{\partial v_0}{\partial y} = a_2(t) \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} \tag{2.1}$$

$$v_0(y, t)_{t=t_0} = \psi(y) \tag{2.2}$$

Здесь $a_1 = \text{const}$, $a_2(t)$ — положительная функция, имеющая первую производную.

Следуя [5], будем искать решение уравнения (2.1) в виде ($\varphi(y, t)$ — новая искомая функция)

$$v_0(y, t) = -\frac{2a_2(t)}{a_1}\frac{\partial}{\partial y}\ln\varphi(y, t) \tag{2.3}$$

Для определения функции $\varphi(y, t)$ преобразуем уравнение (2.1) согласно (2.4). Для этого найдем

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{2a_2'(t)}{a_1}\ln\varphi - \frac{2a_2(t)}{a_1}\frac{\varphi_t'}{\varphi}\right] \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{2a_2''(t)}{a_1}\frac{\varphi_{yy}''}{\varphi} + \frac{2a_2(t)}{a_1}\left(\frac{\varphi_y'}{\varphi}\right)^2\right]$$

где штрих означает производную по аргументу. Как следует из [5], уравнение (2.1) можно представить в виде

$$\frac{\partial v_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}a_1 v_0^2 - a_2(t)\frac{\partial v_0}{\partial y}\right] = 0$$

Согласно (2.4) представим это уравнение в форме

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{2a_2'(t)}{a_1}\ln\varphi - \frac{2a_2(t)}{a_1}\frac{\varphi_t'}{\varphi}\frac{2a_2^2(t)}{a_1}\frac{\varphi_{yy}''}{\varphi}\right] = 0$$

или

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = a_2(t)\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} - \frac{a_2'(t)}{a_2(t)}\varphi\ln\varphi \tag{2.5}$$

Начальное условие (2.2) для уравнения (2.5) с учетом (2.4) имеет вид

$$\varphi(y, t)|_{t=t_0} = f_1(y)$$

$$f_1(y) = \exp\left\{-\frac{a_1}{2a_2(t_0)}\int_0^y \psi(\eta)\,d\eta\right\}, \qquad t_0 = t_B$$

Функция $f_1(y)$ удовлетворяет условиям Фурье [8].

Уравнение (2.5) — нелинейное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. При $a_2(t) = a_2 = \mathrm{const}$ из (2.5) вытекает уравнение диффузии, которое при начальном условии имеет решение в замкнутом виде [5].

В [1] предлагалось решить уравнение (2.1) как уравнение с $a_2 = \mathrm{const}$, определив для каждого момента времени значение a_2 при помощи соотношений (1.4) или (1.5). Далее представим решение уравнения (2.1) в иной форме с учетом переменности коэффициента $a_2(t)$.

Решение уравнения (2.5) имеет вид

$$\varphi(y, t) = \sum_k \exp\left\{\left[-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t + \frac{ik\pi y}{l_2} + \ln\varphi_0\right]\frac{1}{a_2(t)}\right\}, \qquad \varphi_0 = \mathrm{const} \tag{2.6}$$

Действительно, пусть

$$\Omega(y, t) = -\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 t + \frac{ik\pi y}{l_1} + \ln\varphi_0$$

Найдем из (2.6)

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \sum_k\left[-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\frac{1}{a_2(t)} - \frac{a_2'(t)}{a_2^2(t)}\Omega\right]\exp\frac{\Omega}{a_2(t)} \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \sum_k\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\frac{1}{a_2^2(t)}\exp\frac{\Omega}{a_2(t)}$$

Подставляя эти соотношения и (2.6) в уравнение (2.1), получим тождество.

Решение уравнения Бюргерса (1.3) в случае цилиндрических или сферических координат имеет вид (2.3), (2.6), где $a_2(t)$ определяется формулами типа (1.4) и (1.5) соответственно.

Искомое решение уравнения (2.1) должно удовлетворять начальному условию (2.2). Из (2.2) и (2.6) получим при $t = t_0$

$$\varphi(y, t_0) = \sum_k \varphi_0^{1/a_2(t_0)} A_k \exp\frac{ik\pi y}{l_1} \tag{2.8}$$

$$A_k = \exp\left[-\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \frac{t_0}{a_2(t_0)}\right], \qquad l_1 = la_2(t_0)$$

Раскладываем функцию $f_1(y)$ в ряд Фурье в комплексной форме

$$f_1(y) = \sum_k \Phi_k \exp\frac{ik\pi y}{l_1}, \qquad \Phi_k = \frac{1}{2l_1}\int_0^{2l_1} f_1(\eta)\exp\left(-\frac{ik\pi\eta}{l_1}\right)d\eta \tag{2.9}$$

Из (2.8) и (2.9) получим

$$\varphi_0 = (\Phi_k / A_k)^{a_2(t_0)} \tag{2.10}$$

Подставляя (2.10) в (2.6), найдем решение уравнения (2.1) при начальном условии (2.2). Теперь можно записать решение уравнения (2.1) в случае цилиндрических и сферических координат.

Рассмотрим некоторые следствия из предлагаемого решения уравнения Бюргерса с переменным коэффициентом. Припоминаем асимптотическое решение для уравнения диффузии с постоянным коэффициентом (см. [5]). Это решение содержит влияние начального условия в виде главного момента начального возмущения. В данном случае решение складывается из отдельных членов ряда Фурье, и в каждом члене содержится постоянная, включающая влияние начального импульса. При этом количество членов (число k) зависит от характера начального условия. Полученное решение при $k \to \infty$ является точным. Если начальное условие точно совпадает с некоторым членом ряда Фурье, то решение содержит лишь этот член. В общем случае первый член ряда дает только грубое приближение. Величина l при разложении в ряд берется равной длине импульса. При $a_2 = \text{const}$ предлагаемое решение также дает верный результат, в этом легко убедиться, подставив соотношения (2.7) в соответствующее уравнение диффузии и учитывая $a_2'(t) = 0$. Однако и здесь точность решения зависит от числа членов в разложении.

Поступила 24 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lighthill M. J.* Viscosity effects in sound waves of finite amplitude. In: Surveys in Mechanics. (the G. I. Taylor Anniversary Volume.) Cambridge Univ. Press, 1956, p. 250.
2. *Jeffrey A., Kakutani T.* Weak nonlinear dispersive waves: a discussion centered around the Korteweg — de Vries equation. SIAM Rev., 1972, vol. 14, No. 4, p. 582.
3. *Sedov A., Nariboli G. A.* Visco-elastic waves by the use of wave-front theory. Internat. J. Nonlin. Mech., 1971, vol. 6, No. 5, p. 615.
4. *Карнаухов В. Г.* Распространение продольных волн конечной амплитуды в упругом стержне при взаимодействии полей деформации и температуры. Доп. УРСР, 1973, № 4.
5. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
6. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1—2. М., «Наука», 1970.
7. *Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К.* Нелинейные и линейные переходные волновые процессы деформации термоупругих и упругих тел. Таллин, Изд. АН ЭССР, 1972.
8. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3. М., Физматгиз, 1962.