УДК 538.4

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА В НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ СРЕДЕ

Г. Г. Сутырин, Н. Г. Тактаров

(Москва)

Рассматривается устойчивость тангенциального разрыва в несжимаемой, невязкой, неэлектропроводной и нетеплопроводной намагничивающейся жидкости. Учитывается зависимость магнитной проницаемости от температуры и магнитного поля.

Решение задачи об устойчивости тангенциального разрыва в обычной гидродинамике и магнитной гидродинамике приведено в работах [1-4]. Устойчивость поверхности раздела неподвижных ферромагнитных жидкостей исследована в работе [5]. Задача об устойчивости тангенциального разрыва в ферромагнитной жидкости решена в работе [6]. В работах [5, 6] предполагалось, что магнитная проницаемость не зависит от температуры и магнитного поля.

Система уравнений феррогидродинамики может быть написана в виде [7, 8]

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla\left(p + \frac{1}{4\pi}\int\limits_0^H \mu H\,dH\right) + \frac{\mu}{8\pi}\nabla H^2, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\left[s + \frac{1}{4\pi\rho}\int\limits_0^H \left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_H H\,dH\right] = 0$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{div}\mu\mathbf{H} = 0, \qquad \mu = \mu\,(T,\ H)$$

Здесь μ — магнитная проницаемость, $\mathbf{H}$ — магнитное поле, T — температура, s — энтропия единицы массы среды, остальные обозначения обычные.

В работе [9] учитывался внутренний момент импульса, проницаемость μ предполагалась не зависящей от магнитного поля, поэтому система уравнений, приведенных в этой работе, отличается от уравнений (1).

Система координат выбирается так, что плоскость $z = 0$ является невозмущенной поверхностью тангенциального разрыва, разделяющего два слоя жидкости, которые движутся параллельно плоскости разрыва. Магнитное поле имеет произвольное направление. Все величины в области $z < 0$ далее обозначаются индексом 1, а в области $z > 0$ — индексом 2.

Согласно (1), магнитное поле имеет потенциал $\mathbf{H} = \nabla\varphi$. Последнее уравнение (1) можно написать в виде

$$\operatorname{div}(\mu\nabla\varphi) = 0 \tag{2}$$

Граничные условия на поверхности тангенциального разрыва в системе координат, в которой разрыв покоится

$$\{\varphi\} = 0, \quad \{\mu\mathbf{n}\nabla\varphi\} = 0, \quad \{\Pi_{ik}\, n_i n_k\} = \alpha\,/\,R, \quad v_n = 0 \tag{3}$$

$$(\{a\} = a_1 - a_2)$$

Здесь $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности разрыва, $1\,/\,R$ — кривизна поверхности, α — поверхностное натяжение, Π_{ik} — тензор плотности потока импульса, имеющий вид

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p\delta_{ik} - \frac{\mu H_i H_k}{4\pi} + \frac{\delta_{ik}}{4\pi}\int\limits_0^H \mu H\,dH$$

Непрерывность потока энергии и равенство касательных напряжений на разрыве выполняются тождественно. Это следует из первых трех граничных условий (3) и условия непрерывности тангенциальной составляющей электрического поля.

Устойчивость тангенциального разрыва будем исследовать в линейном приближении. Линеаризуем систему уравнений (1), (2) и граничные условия (3):

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}_0\nabla\right)\mathbf{v}'=-\nabla(p'+mT'),\qquad \operatorname{div}\mathbf{v}'=0 \tag{4}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{v}_0\nabla\right)\left[qT'+\frac{1}{4\pi}\mu_T\mathbf{H}_0\nabla\varphi'\right]=0$$

$$\mu_0\Delta\varphi'+a(\mathbf{H}_0\nabla)^2\varphi'+\mu_T\mathbf{H}_0\nabla T'=0,\quad \{H_{0z}\zeta+\varphi'\}=0$$

$$\left\{-\mu_0\mathbf{H}_0\nabla\zeta+\mu_0\frac{\partial\varphi'}{\partial z}+\mu_0 bH_{0z}\mathbf{H}_0\nabla\varphi'\right\}=0$$

$$v_z'=\frac{d\zeta}{dt}=\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\mathbf{v}_0\nabla\zeta$$

$$\left\{p'+mT'+\frac{1}{4\pi}\mu_0\mathbf{H}_0\nabla\varphi'-a\frac{H_{0z}^2}{4\pi}\mathbf{H}_0\nabla\varphi'-\right.$$

$$\left.-\frac{H_{0z}^2}{4\pi}\mu_TT'-\frac{\mu_0H_{0z}}{2\pi}\frac{\partial\varphi'}{\partial z}\right\}=-\alpha\Delta\zeta$$

$$a=\frac{1}{H_0}\left(\frac{\partial\mu}{\partial H}\right)_T,\qquad b=\frac{a}{\mu_0}-\frac{\mu_T^2}{4\pi\mu_0 q},\qquad m=\int_0^{H_0}\mu_T H\,dH$$

$$q=s_T+\frac{1}{4\pi}\int_0^{H_0}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial T^2}\right)H\,dH,\quad \mu_T=\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_H,\quad s_T=\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_H$$

($\zeta=\zeta(x,y,t)$ — малое смещение точек разрыва на оси z).

Индексом нуль обозначены постоянные значения величин, соответствующих невозмущенному движению. Штрихами обозначены малые возмущения соответствующих величин. Далее индекс нуль у равновесных значений величин будет опускаться. Граничные условия для давления, скорости и потенциала магнитного поля в линейном приближении берутся при $z=0$.

Малые возмущения величин будем искать в виде плоской волны

$$\zeta\sim\exp(i\mathbf{kr}-i\omega t),\quad \mathbf{v}'\sim\exp(i\mathbf{kr}+i\varkappa z-i\omega t) \tag{5}$$

$$p'+mT'\sim\exp(i\mathbf{kr}+i\varkappa z-i\omega t)$$

$$\varphi'\sim T'\sim\exp(i\mathbf{kr}+i\lambda z-i\omega t)$$

Здесь $\mathbf{k}$ — вещественный вектор, параллельный плоскости $z=0$, ω — комплексная частота. Параметры λ и $\varkappa$ тоже комплексные, их мнимые части являются коэффициентами затухания соответствующих величин по оси z.

Подставляя выражения T' и φ' из (5) в третье уравнение системы (4), получим

$$(\omega-\mathbf{vk})\left[qT'+\frac{i\mu_T}{4\pi}(\mathbf{Hk}+\lambda H_z)\varphi'\right]=0 \tag{6}$$

Если частота ω имеет положительную мнимую часть ($\operatorname{Im}\omega>0$), то амплитуда возмущения будет нарастать со временем по закону $\sim\exp(\operatorname{Im}\omega)t$, это приводит к неустойчивости течения. Частота $\omega=\mathbf{vk}$, соответствующая возмущению, движущемуся вместе с жидкостью, вещественная и не представляет интереса с точки зрения неустойчивости, поэтому формулу (6) можно написать в виде

$$T'=-\frac{i\mu_T}{4\pi q}(\mathbf{Hk}+\lambda H_z)\varphi' \tag{7}$$

Подставляя в четвертое уравнение системы (4) выражения (5) и (7), получим квадратное уравнение относительно λ, после решения которого будем иметь

$$\lambda=-\frac{bH_z\mathbf{Hk}}{1+bH_z^2}\pm i\frac{\sqrt{k^2+b[(\mathbf{Hk})^2+k^2H_z^2]}}{1+bH_z^2} \tag{8}$$

Физический смысл имеют только решения, затухающие на бесконечности по оси z, поэтому в области $z < 0$ берем знак минус, а в области $z > 0$ — плюс.

Взяв операцию div от первого уравнения (4) и учитывая, что $\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0$, получим

$$\Delta (p' + mT') = 0$$

Из этого уравнения следует, что $\varkappa = \pm ik$. Аналогично выбору знаков в выражении для λ будем считать $\varkappa_1 = -ik$, $\varkappa_2 = +ik$.

Из первого и седьмого уравнений системы (4) следует

$$p' + mT' = -\frac{i\rho\zeta}{\varkappa}(\omega - \mathbf{vk})^2 \tag{9}$$

Далее, из граничных условий для φ' из системы (4) находим при $z = 0$

$$\varphi'_{1(2)} \frac{(\mathbf{Hk})(\mu_2 - \mu_1) + A_{2(1)}(H_{2z} - H_{1z})}{A_2 - A_1} \tag{10}$$

$$A_{1(2)} - \mu_{1(2)}\left[\left(1 + b_{1(2)}\frac{B_z^2}{\mu_{1(2)}^2}\right)\lambda_{1(2)} + b_{1(2)}\frac{B_z}{\mu_{1(2)}}\mathbf{Hk}\right], \qquad B_z = \mu H_z$$

Подставляя выражения (7), (9) и (10) в последнее уравнение системы (4), находим дисперсионное соотношение

$$\rho_1(\omega - \mathbf{v}_1\mathbf{k})^2 + \rho_2(\omega - \mathbf{v}_2\mathbf{k})^2 - \alpha k^3 + F = 0 \tag{11}$$

$$F = \frac{k(\mu_2 - \mu_1)^2}{4\pi(\mu_1 D_1 + \mu_2 D_2)}\left[\frac{B_z^2}{\mu_1\mu_2}D_1 D_2 - (\mathbf{Hk})^2\right]$$

$$D_{1(2)} = \sqrt{k^2 + b_{1(2)}\left[(\mathbf{Hk})^2 + \frac{B_z^2}{\mu_{1(2)}^2}k^2\right]}$$

Условие устойчивости тангенциального разрыва (вещественность корней квадратного уравнения (11)) имеет вид

$$\alpha k^3 - \frac{\rho_1\rho_2(\mathbf{uk})^2}{\rho_1 + \rho_2} - F \geqslant 0 \tag{12}$$

Здесь $\mathbf{u} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ — относительная скорость жидкостей. Если $\mu = \mathrm{const}$, условие (12) принимает вид

$$\frac{(\mu_2 - \mu_1)^2}{4\pi(\mu_1 + \mu_2)}\left[(\mathbf{Hk})^2 - \frac{k^2 B_z^2}{\mu_1\mu_2}\right] - \frac{\rho_1\rho_2(\mathbf{uk})^2}{\rho_1 + \rho_2} + \alpha k^3 \geqslant 0 \tag{13}$$

Если жидкость находится в поле тяжести $\mathbf{g}$ ($\mathbf{g}$ будем считать направленным против оси z), то можно показать, что к левой части выражений (12) и (13) должен быть добавлен член $(\rho_1 - \rho_2)\,gk$.

Если условие (12) не выполняется, уравнение (11) имеет два комплексно-сопряженных корня, один из которых имеет положительную мнимую часть, что приводит к неустойчивости.

Из условий (12) и (13) следует, что тангенциальная составляющая магнитного поля стабилизирует разрыв, поскольку выражение $(\mathbf{Hk})^2$ входит в эти неравенства с положительным знаком. Поперечная составляющая H_z дестабилизирует разрыв.

Любое малое возмущение поверхности разрыва можно представить как суперпозицию плоских волн, поэтому необходимо найти условие устойчивости, не зависящее от величины и направления вектора $\mathbf{k}$.

В общем случае нахождение этого условия сталкивается с математическими трудностями, однако иногда его можно получить.

Рассмотрим сначала случай $\alpha = 0$, $\mu = \mathrm{const}$, $\mathbf{g} = 0$. Неравенство (13) можно написать в виде

$$\left[\frac{(\mu_2 - \mu_1)^2}{4\pi(\mu_1 + \mu_2)}H_i H_j - \frac{(\mu_2 - \mu_1)^2 B_z^2}{4\pi\mu_1\mu_2(\mu_1 + \mu_2)}\delta_{ij} - \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}u_i u_j\right]k_i k_j \geqslant 0$$

Исследование этой квадратичной формы дает следующие два условия устойчивости:

$$\frac{(\mu_1-\mu_2)^2}{4\pi(\mu_1+\mu_2)}\mathbf{h}^2-\frac{B_z^2(\mu_1-\mu_2)^2}{2\pi\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)}-\frac{\rho_1\rho_2u^2}{\rho_1+\rho_2}\geqslant 0$$

$$\frac{(\mu_1-\mu_2)^4}{16\pi^2\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)^2}\left(\frac{B_z^4}{\mu_1\mu_2}-\mathbf{h}^2B_z^2\right)+$$

$$+\frac{(\mu_1-\mu_2)^2\rho_1\rho_2}{4\pi(\mu_1+\mu_2)(\rho_1+\rho_2)}\left(\frac{B_z^2u^2}{\mu_1\mu_2}-[\mathbf{uh}]^2\right)\geqslant 0 \quad (\mathbf{h}=(H_{0x},H_{0y},0))$$

В случае, когда тангенциальная составляющая магнитного поля отсутствует, условие абсолютной устойчивости принимает вид

$$[\rho_1\rho_2u^2/(\rho_1+\rho_2)+M]^2\leqslant 4\alpha g(\rho_1-\rho_2) \tag{14}$$

$$M=\frac{B_z^2(\mu_2-\mu_1)^2(1+b_1H_{1z}^2)^{1/2}(1+b_2H_{2z}^2)^{1/2}}{4\pi\mu_1\mu_2[\mu_1(1+b_1H_{1z}^2)^{1/2}+\mu_2(1+b_2H_{2z}^2)^{1/2}]}$$

При отсутствии магнитного поля неравенство (14) переходит в обычное гидродинамическое условие устойчивости, приведенное в работе [1].

Если $u=b_1=b_2=0$, из условия (14) можно найти величину критического поля

$$B_{kz}^4=64\pi^2\mu_1^2\mu_2^2(\mu_1+\mu_2)^2(\mu_2-\mu_1)^{-4}(\rho_1-\rho_2)\alpha g$$

Величина B_{kz} совпадает с найденной в работе [5].

Все приведенные результаты можно применить к диэлектрическим жидкостям, для этого необходимо заменить μ на диэлектрическую проницаемость ε, а поле **H** — на электрическое поле **E**.

Авторы выражают благодарность В. В. Гогосову за внимание к работе и полезные дискуссии.

Поступила 17 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
2. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1957.
3. *Сыроватский С. И.* Об устойчивости тангенциальных разрывов в магнитогидродинамической среде. ЖЭТФ, 1953, т. 24, вып. 6.
4. *Сыроватский С. И.* Магнитная гидродинамика. Успехи физ. наук, 1957, т. 62, вып. 3.
5. *Зайцев В. М., Шлиомис М. И.* Характер неустойчивости поверхности раздела двух жидкостей в постоянном поле. Докл. АН СССР, 1969, т. 158, № 6.
6. *Тактаров Н. Г.* Устойчивость тангенциального разрыва в феррогидродинамике. Тр. Ин-та механ. МГУ, 1974, № 31.
7. *Lalas D. P., Carmi S.* Thermoconvective stability of ferrofluids. Phys. Fluids, 1971, vol. 14, No. 2.
8. *Тарапов И. Е.* К гидродинамике поляризующихся и намагничивающихся сред. Магнитная гидродинамика, 1972, № 1.
9. *Шапошников И. Г., Шлиомис М. И.* Уравнения магнитной гидродинамики парамагнитных сред. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 1.