

## ТЕОРИЯ УПРУГОГО ЛИНЕЙНО-АРМИРОВАННОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА

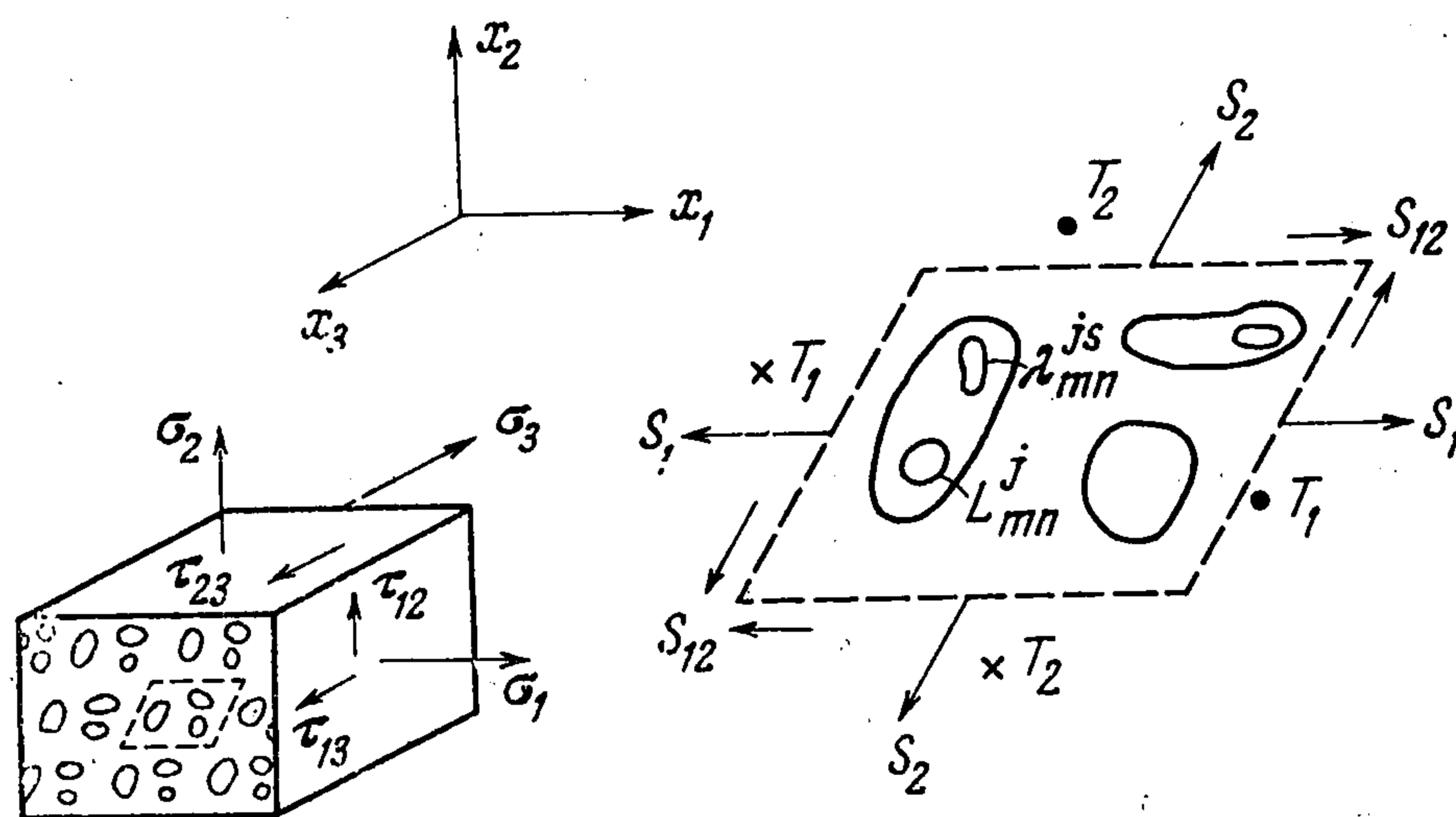
М. Г. Грингауз, Л. А. Фильштинский

(Новосибирск)

Изучаются упругие волокнистые композиционные материалы с произвольной микроструктурой ячейки. Развивается процедура определения напряженного состояния и макроскопических свойств таких материалов. Дается строгое обоснование полученных алгоритмов. Приводятся результаты расчетов.

Композиционные материалы с простейшей микроструктурой ячейки изучались в [1], а также методом работы [2] в [3]. Общие методы исследования упругих неоднородных структур содержатся в [4,5].

**1. Расчетная схема композиционного материала. Постановка задачи.** Рассмотрим трехмерную изотропную среду, армированную двоякопериодической (в смысле геометрии и упругих характеристик) системой групп



Фиг. 1

прямолинейных волокон с цилиндрическими полостями (фиг. 1). Геометрические и упругие свойства такой среды полностью описываются микроструктурой периодически повторяющейся (фундаментальной) ячейки. Будем предполагать, что волокна посажены в среду с некоторым поперечным натягом, одинаковым в конгруэнтных точках и постоянным вдоль длины волокна. Сопряжение среды и волокон такое, что при переходе через границу контакта вектор усилий изменяется непрерывно, а вектор смещения претерпевает скачок, обусловленный поперечным натягом.

Считаем, что в массиве реализовано следующее напряженное состояние:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_1(x_1, x_2), \quad \sigma_2 = \sigma_2(x_1, x_2), \quad e_3 = \text{const} \\ \tau_{12} &= \tau_{12}(x_1, x_2), \quad \tau_{13} = \tau_{13}(x_1, x_2), \quad \tau_{23} = \tau_{23}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$  — компоненты тензора напряжения,  $e_1, e_2, e_3, \gamma_{12}/2, \gamma_{13}/2, \gamma_{23}/2$  — компоненты тензора деформации.

Система (1.1) распадается на два линейно-независимых напряженных состояния: «обобщенную плоскую деформацию» и «продольный сдвиг»

$$(1.2) \quad \sigma_1 = \sigma_1(x_1, x_2), \quad \sigma_2 = \sigma_2(x_1, x_2), \quad e_3 = \text{const} \\ \tau_{12} = \tau_{12}(x_1, x_2), \quad \tau_{13} = \tau_{23} = 0$$

$$(1.3) \quad \tau_{13} = \tau_{13}(x_1, x_2), \quad \tau_{23} = \tau_{23}(x_1, x_2), \quad \sigma_1 = \sigma_2 = e_3 = \tau_{12} = 0$$

Для описания напряженного состояния (1.2) используем регулярные функции Колосова — Мусхелишвили  $\varphi(z)$  и  $\psi(z)$  комплексной переменной  $z = x_1 + ix_2$ , определяющие напряжения и смещения по формулам [6]

$$(1.4) \quad \sigma_1 + \sigma_2 = 2[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] \\ \sigma_2 - \sigma_1 + 2i\tau_{12} = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \quad \kappa = 3 - 4\nu \\ 2G(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} - 2Ge_3\nu z$$

В дополнение к (1.4) имеем из (1.2) и закона Гука

$$(1.5) \quad \sigma_3 = 2G(1 + \nu)e_3 + \nu(\sigma_1 + \sigma_2), \quad w = e_3x_3$$

Напряжения и смещения, соответствующие (1.3), выразим через регулярную функцию  $F(z)$  [6]

$$(1.6) \quad \tau_{13} - i\tau_{23} = G[2F'(\bar{z}) - ciz] \\ u = -cx_2x_3, \quad v = cx_1x_3, \quad w = F(z) + \overline{F(\bar{z})}$$

В (1.4) — (1.6)  $u, v, w$  — компоненты вектора смещения,  $G$  и  $\nu$  — модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала среды,  $c$  — некоторая вещественная постоянная.

Таким образом, задача о теоретическом описании композиционного материала сводится к двумерным задачам теории упругости. Соответственно этому будем рассматривать плоскую среду  $x_3 = \text{const}$ , усиленную двоякопериодической системой групп инородных многосвязных включений.

Пусть  $\omega_1$  и  $\omega_2$  ( $\text{Im } \omega_1 = 0, \text{Im } \omega_2 / \omega_1 > 0$ ) — основные периоды структуры. Каждый параллелограмм периодов  $\Pi_{m,n}$  ( $m, n = 0, \pm 1, \dots$ ) содержит группу включений с упругими характеристиками  $G_j$  и  $\nu_j$ , заполняющих конечные многосвязные области  $D_{m,n}^j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ). Контуры отверстий обозначим через  $\lambda_{m,n}^{j,s}$  ( $s = 1, 2, \dots, r_j$ ), конечные односвязные континуумы, ограниченные контурами  $\lambda_{m,n}^{j,s}$ , — через  $d_{m,n}^{j,s}$ , границу раздела включения и среды — через  $L_{m,n}^j$ , неограниченную область, занятую средой, — через  $D$  (фиг. 1).

Ниже используем следующие обозначения:

$$l_{m,n} = \bigcup_j L_{m,n}^j, \quad \Lambda_{m,n}^j = \bigcup_s \lambda_{m,n}^{j,s}, \quad \lambda_{m,n} = \bigcup_j \Lambda_{m,n}^j, \quad l_{0,0}^{*j} = l_{0,0} \setminus L_{0,0}^j$$

Будем предполагать, что каждый из контуров  $L_{m,n}^j, \lambda_{m,n}^{j,s}$  имеет кривизну, удовлетворяющую условию Гёльдера.

Положим, что в среде имеют место средние по основным периодам напряжения  $S_1, S_2, S_{12}, T_1, T_2$  (на фиг. 1 усилия  $S_1, S_2, S_{12}$  лежат в плоскости

чертежа, а усилия  $T_1, T_2$  перпендикулярны ей, точка при  $T_1, T_2$  соответствует направлению от плоскости креста, крестик — по направлению к этой плоскости), что обеспечивает двоякопериодичность тензора напряжений и квазипериодичность функций

$$(1.7) \quad g(z) = \varphi(z) + z \overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \quad \chi(z) = G [2\text{Im}F(z) - c |z|^2 / 2]$$

Отсюда следуют тождества

$$(1.8) \quad \begin{aligned} g(z + \omega_1) - g(z) &= -l_1 [i(S_{12} + S_2 \cos \theta) - S_2 \sin \theta] \\ g(z + \omega_2) - g(z) &= l_2 [i(S_{12} \cos \theta + S_1) - S_{12} \sin \theta] \\ \chi(z + \omega_1) - \chi(z) &= l_1 T_2, \quad \chi(z + \omega_2) - \chi(z) = l_2 T_1 \\ l_1 &= |\omega_1|, \quad l_2 = |\omega_2|, \quad \theta = \arg \omega_2 \end{aligned}$$

Проинтегрировав первое из соотношений (1.6) по границе основного параллелограмма периодов, получим

$$(1.9) \quad c = 0$$

Из (1.4) — (1.6), (1.8) и (1.9) и периодичности тензора напряжения следует квазипериодичность функций  $\varphi(z), F(z)$ , комбинации  $\bar{z} \varphi'(z) + \psi(z)$  и смещений  $u, v, w$ .

Суммируя сказанное, приходим к задаче об определении функций  $\varphi(z), \psi(z), F(z)$  и  $\varphi_j(z), \psi_j(z), F_j(z)$ , регулярных соответственно в областях  $D$  и  $D_{0,0}^j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) из системы краевых условий

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \varphi(t) + t \overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} &= \varphi_j(t) + t \overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\psi_j(t)} \\ \frac{1}{2G} [\kappa \varphi(t) - t \overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}] - \nu e_3 t &= \\ = \frac{1}{2G_j} [\kappa_j \varphi_j(t) - t \overline{\varphi_j'(t)} - \overline{\psi_j(t)}] - \nu_j e_3 t + h_j(t), \quad t \in L_{0,0}^j \end{aligned}$$

$$(1.11) \quad \begin{aligned} \varphi_j(t) + t \overline{\varphi_j'(t)} + \overline{\psi_j(t)} &= C_{j,s} \quad t \in \lambda_{0,0}^{j,s} \\ F(t) + \overline{F(t)} &= F_j(t) + \overline{F_j(t)} \\ G [F(t) - \overline{F(t)}] &= G_j [F_j(t) - \overline{F_j(t)}] \quad t \in L_{0,0}^j \\ F_j(t) - \overline{F_j(t)} &= i C_{j,s}^* \quad t \in \lambda_{0,0}^{j,s} \\ s &= 1, 2, \dots, r_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

Здесь  $h_j(t)$  — известные скачки смещения,  $C_{j,s}, C_{j,s}^*$  — подлежащие определению постоянные.

К (1.10), (1.11) необходимо присовокупить условия существования в среде заданных средних напряжений (1.8).

**2. Обобщенная плоская деформация композиционного материала.** При построении общих представлений решения краевой задачи (1.10) воспользуемся результатами работ [5,7]. Запишем

$$(2.1) \quad \varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{0,0}} p(t) \zeta(t-z) dt + Az$$

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{0,0}} [\varepsilon(t) \overline{p(t)} + \mu(t) \overline{q(t)} - \bar{t} p'(t)] \zeta(t-z) dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{0,0}} p(t) \rho_1(t-z) dt + Bz, \quad z \in D \\ \varphi_j(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{0,0}^j} \frac{q(t)}{t-z} dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_{0,0}^j} \frac{\omega(t)}{t-z} dt \\ \psi_j(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{0,0}^j} \frac{\alpha_j \overline{p(t)} + \beta_j \overline{q(t)} - \bar{t} q'(t)}{t-z} dt + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_{0,0}^j} \frac{\overline{\omega(t)} - \bar{t} \omega'(t)}{t-z} dt + \sum_{s=1}^{r_j} \frac{b_{j,s}}{z - z_{j,s}}, \quad z \in D_{0,0}^j \\ j &= 1, 2, \dots, k \\ \rho_1(z) &= \sum_{m,n} \left\{ \frac{\bar{P}}{(z-P)^2} - 2z \frac{\bar{P}}{P^3} - \frac{\bar{P}}{P^2} \right\}, \quad P = m\omega_1 + n\omega_2 \\ p(t) &= \{p_j(t), t \in L_{0,0}^j\} \quad q(t) = \{q_j(t), t \in L_{0,0}^j\} \\ \omega(t) &= \{\omega_{j,s}(t), t \in \lambda_{0,0}^{j,s}\} \end{aligned}$$

Здесь  $\zeta(z)$  —  $\zeta$ -функция Вейерштрасса [8],  $\rho_1(z)$  — специальная мероморфная функция [9],  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $\omega(t)$  — подлежащие определению функции,  $z_{j,s} \in d_{0,0}^{j,s}$ ,  $b_{j,s}$  — функционалы, задаваемые соотношениями [7]

$$b_{j,s} = i \int_{\lambda_{0,0}^{j,s}} [\omega(t) \bar{dt} - \overline{\omega(t)} dt]$$

Для кусочно-постоянных  $\varepsilon(t) = \{\varepsilon_j, t \in L_{0,0}^j\}$ ,  $\mu(t) = \{\mu_j, t \in L_{0,0}^j\}$  и постоянных  $\alpha_j$  и  $\beta_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) положим [5]

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \frac{1 + \kappa}{\lambda_j - 1}, \quad \beta_j = \frac{1 + \kappa_j \lambda_j}{1 - \lambda_j} \\ \varepsilon_j &= \frac{\kappa + \lambda_j}{\lambda_j - 1}, \quad \mu_j = \frac{(1 + \kappa_j) \lambda_j}{1 - \lambda_j}, \quad \lambda_j = \frac{G}{G_j} \end{aligned}$$

Используя свойства функции  $\rho_1(z)$  [2]

$$\begin{aligned} \rho_1(z + \omega_v) - \rho_1(z) &= \bar{\omega}_v \rho(z) + \gamma_v \\ \gamma_v &= 2\rho_1\left(\frac{\omega_v}{2}\right) - \bar{\omega}_v \rho\left(\frac{\omega_v}{2}\right), \quad v = 1, 2 \end{aligned}$$

( $\rho(z)$  —  $\rho$ -функция Вейерштрасса [8]) и квазипериодичность  $\zeta$ -функции Вейерштрасса, нетрудно показать, что представления (2.1) обеспечивают двоякопериодическое распределение напряжений в  $D$ .

Постоянные  $A$  и  $B$ , фигурирующие в (2.1), определяем из условий (1.8). Вычисляя левые части в первых двух тождествах (1.8) при помощи функции  $g(z)$  из (1.7) и (2.1), получаем систему двух уравнений относительно  $\operatorname{Re} A$  и  $B$ . Разрешая систему в предположении, что условие ее совместности

$$(2.2) \quad \operatorname{Im} a = 0$$

выполняется [5], имеем

$$\begin{aligned}
 (2.3) \quad \operatorname{Re} A &= \operatorname{Re} A_L + 1/4 (\langle \sigma_1 \rangle + \langle \sigma_2 \rangle) \\
 B &= B_L + 1/2 (\langle \sigma_2 \rangle - \langle \sigma_1 \rangle + 2i \langle \tau_{12} \rangle) \\
 \operatorname{Re} A_L &= \operatorname{Re} \left( \frac{\pi}{2S} a + \frac{\pi}{S} b - \frac{b\delta_1}{\omega_1} \right) \\
 B_L &= \frac{\delta_1 - \gamma_1}{\omega_1} b - \frac{2\pi}{S} \operatorname{Re} b - \left( \frac{\pi}{S} - \frac{\delta_1}{\omega_1} \right) \operatorname{Re} a \\
 a &= \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{0,0}} [\varepsilon(t) \overline{p(t)} + \mu(t) \overline{q(t)}] dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{0,0}} p(t) \overline{dt} \\
 b &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{l_{0,0}} p(t) dt, \quad \delta_1 = 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad S = \omega_1 \operatorname{Im} \omega_2
 \end{aligned}$$

Здесь  $\langle \sigma_1 \rangle$ ,  $\langle \sigma_2 \rangle$ ,  $\langle \tau_{12} \rangle$  — средние напряжения на площадках, перпендикулярных координатным осям. Формулы преобразования компонентов тензора напряжения при повороте системы координат даны в [6].

Поскольку  $\operatorname{Im} A$  не влияет на напряженное состояние [6], полагаем  $\operatorname{Im} A = 0$ .

Сведем теперь краевую задачу (1.10) к эквивалентной ей системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно функций  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $\omega(t)$ . Переходя в (2.1) с помощью формул Сохоцкого — Племяля [10] к предельным значениям, подставляя их в (1.10) и полагая [7]

$$(2.4) \quad C_{j,s} = - \int_{\lambda_{0,0}^{j,s}} \omega(t) ds$$

получаем искомую систему

$$\begin{aligned}
 (2.5) \quad p(t_0) - M_j \{p(t), q(t), \omega(t), t_0\} &= P_j(t_0), \quad t_0 \in L_{0,0}^j \\
 q(t_0) - N_j \{p(t), q(t), \omega(t), t_0\} &= Q_j(t_0), \quad t_0 \in L_{0,0}^j \\
 \omega(t_0) - R_{j,s} \{p(t), q(t), \omega(t), t_0\} &= 0, \quad t_0 \in \lambda_{0,0}^{j,s} \\
 s = 1, 2, \dots, r_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \\
 M_j \{p(t), q(t), \omega(t), t_0\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{0,0}^j} \left\{ p(t) d \ln \frac{\sigma(t-t_0)}{\sigma(t-t_0)} + \right. \\
 &+ \left. \frac{\mu_j}{\varepsilon_j} q(t) d \ln \frac{t-t_0}{\sigma(t-t_0)} \right\} - \frac{1}{2\pi i \varepsilon_j} \int_{l_{0,0}} \overline{p(t)} \times \\
 &\times d \left\{ (t-t_0) \overline{\zeta(t-t_0)} - \overline{\zeta_1(t-t_0)} \right\} - \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{0,0}^{*j}} \left\{ p(t) \times \right. \\
 &\times \left. \left[ \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_j} \overline{\zeta(t-t_0)} \overline{dt} - \zeta(t-t_0) dt \right] + \frac{\mu(t)}{\mu_j} q(t) \overline{\zeta(t-t_0)} \overline{dt} \right\} + \\
 &+ \frac{\mu_j}{\varepsilon_j} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_{0,0}^j} \frac{\omega(t)}{t-t_0} dt + t_0 \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_j} \right) \operatorname{Re} A_L + \frac{\bar{t}_0}{\varepsilon_j} \bar{B}_L \\
 N_j \{p(t), q(t), \omega(t), t_0\} &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{0,0}^j} \left\{ \frac{\alpha_j}{\beta_j} p(t) d \ln \frac{\sigma(t-t_0)}{t-t_0} + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q(t) d \ln \frac{t-t_0}{t-t_0} - \frac{\overline{q(t)}}{\beta_j} d \frac{t-t_0}{t-t_0} \Big\} - \frac{1}{2\pi i} \times \\
& \times \int_{l_{0,0}^{*j}} \frac{\alpha_j}{\beta_j} p(t) \zeta(t-t_0) dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_{0,0}^j} \left\{ \omega(t) \left[ \frac{dt}{t-t_0} - \frac{\overline{dt}}{\beta_j(t-t_0)} \right] - \right. \\
& \left. - \frac{\overline{\omega(t)}}{\beta_j} d \frac{t-t_0}{t-t_0} \right\} + \frac{1}{\beta_j} \sum_{s=1}^{r_j} \frac{b_{j,s}}{t_0 - z_{j,s}} - \frac{\alpha_j}{\beta_j} t_0 \operatorname{Re} A_L \\
R_{j,s} \{p(t), q(t), \omega(t), t_0\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Lambda_{0,0}^j} \left\{ \omega(t) d \ln \frac{t-t_0}{t-t_0} - \right. \\
& \left. - \overline{\omega(t)} d \frac{t-t_0}{t-t_0} \right\} + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{0,0}^j} \left\{ q(t) \left( \frac{dt}{t-t_0} - \frac{\beta_j \overline{dt}}{t-t_0} \right) - \right. \\
& \left. - \alpha_j p(t) \frac{\overline{dt}}{t-t_0} - \overline{q(t)} d \frac{t-t_0}{t-t_0} \right\} + \sum_{s=1}^{r_j} \frac{b_{j,s}}{t_0 - z_{j,s}} - C_{j,s} \\
\zeta_1(z) &= - \int_0^z \rho_1(z) dz, \quad \frac{d}{dz} \ln \sigma(z) = \zeta(z) \\
P_j(t_0) &= t_0 \left( 1 + \frac{1}{\varepsilon_j} \right) \frac{\langle \sigma_1 \rangle + \langle \sigma_2 \rangle}{4} + \frac{t_0}{\varepsilon_j} \frac{\langle \sigma_2 \rangle - \langle \sigma_1 \rangle - 2i \langle \tau_{12} \rangle}{2} - \\
& - \frac{2G}{\kappa + \lambda_j} [(\nu - \nu_j) e_3 t_0 + h_j(t_0)] \\
Q_j(t_0) &= - t_0 \frac{\alpha_j}{\beta_j} \frac{\langle \sigma_1 \rangle + \langle \sigma_2 \rangle}{4} - \frac{2G}{1 + \kappa \lambda_j} [(\nu - \nu_j) e_3 t_0 + h_j(t_0)].
\end{aligned}$$

Предполагаем, что функции  $h_j(t)$  дифференцируемы и их первые производные удовлетворяют условию Гёльдера. Этого достаточно, чтобы решения  $p(t)$ ,  $q(t)$ ,  $\omega(t)$  обладали тем же свойством [10].

Заметим, что всякое решение системы (2.5) удовлетворяет условию совместности (2.2) [5]. Тем самым обеспечивается действие в среде заданных средних напряжений.

Используя [7,5], можно доказать, что система (2.5) разрешима при любой правой части, причем единственным образом. Следовательно, система (2.5) совместно с представлениями (2.1) определяет решение исходной краевой задачи.

**3. Продольный сдвиг композиционного материала.** Будем разыскивать решение краевой задачи (1.11) в классе регулярных квазипериодических функций. Тем самым будет обеспечено двоякопериодическое распределение напряжений в  $D$ .

Положим

$$\begin{aligned}
(3.1) \quad F(z) &= I(z), \quad z \in D; \quad F_j(z) = I(z), \quad z \in D_{0,0}^j, \quad j=1, 2, \dots, k \\
I(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{0,0}} im(t) \zeta(t-z) dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_{0,0}} in(t) \zeta(t-z) dt + Ez
\end{aligned}$$

Здесь  $m(t)$ ,  $n(t)$  — подлежащие определению вещественные функции

$$m(t) = \{m_j(t), t \in L_{0,0}^j\}, \quad n(t) = \{n_{j,s}(t), t \in \lambda_{0,0}^{j,s}\}$$

Постоянную  $E$  в (3.1) найдем из условий (1.8). Вычисляя левую часть в последнем тождестве (1.8) при помощи функции  $\chi(z)$  из (1.7), (1.9) и (3.1), получаем

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} E &= \frac{\langle \tau_{13} \rangle}{2G} + \frac{1}{2\pi \sin \theta} \operatorname{Im} \left[ f \left( \frac{\delta_2}{l_2} - \frac{\delta_1}{l_1} \cos \theta \right) \right] \\ \operatorname{Im} E &= -\frac{\langle \tau_{23} \rangle}{2G} + \frac{\operatorname{Im}(f\delta_1)}{2\pi l_1} \\ f &= \int_{l_{0,0}} m(t) dt + \int_{\lambda_{0,0}} n(t) dt, \quad \delta_1 = 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad \delta_2 = 2\zeta\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \end{aligned}$$

Здесь  $\langle \tau_{13} \rangle$  и  $\langle \tau_{23} \rangle$  — средние сдвигающие напряжения на площадках, перпендикулярных осям координат  $x_1$  и  $x_2$ . Связь между  $T_1$ ,  $T_2$  и  $\langle \tau_{13} \rangle$ ,  $\langle \tau_{23} \rangle$  очевидна.

Краевые условия (1.11) выполним за счет неизвестных пока функций  $m(t)$ ,  $n(t)$ .

Подставив вычисленные с помощью формул Сохоцкого — Племяля [10] предельные значения функций (3.1) в (1.11) и положив, как это принято [7]

$$(3.3) \quad C_{j,s}^* = - \int_{\lambda_{0,0}^{j,s}} n(t) ds$$

приходим к системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно  $m(t)$  и  $n(t)$

$$(3.4) \quad \begin{aligned} m(t_0) - G_*^j V \{m(t), n(t), t_0\} &= \\ &= \frac{G_*^j}{G} (\langle \tau_{13} \rangle \operatorname{Im} t_0 - \langle \tau_{23} \rangle \operatorname{Re} t_0), \quad t_0 \in L_{0,0}^j \\ n(t_0) - V \{m(t), n(t), t_0\} + C_{j,s}^* &= \\ &= \frac{1}{G} (\langle \tau_{13} \rangle \operatorname{Im} t_0 - \langle \tau_{23} \rangle \operatorname{Re} t_0), \quad t_0 \in \lambda_{0,0}^{j,s} \\ V \{m(t), n(t), t_0\} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{0,0}} m(t) d \ln \frac{\sigma(t-t_0)}{\sigma(t-t_0)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\lambda_{0,0}^{j,s}} n(t) \times \\ &\times d \ln \frac{\sigma(t-t_0)}{\sigma(t-t_0)} + \frac{\operatorname{Im}(f\delta_1) \operatorname{Re} t_0}{\pi l_1} + \frac{\operatorname{Im} t_0}{\pi \sin \theta} \operatorname{Im} \left[ f \left( \frac{\delta_2}{l_2} - \frac{\delta_1}{l_1} \cos \theta \right) \right] \\ G_*^j &= (G - G_j) / (G + G_j), \quad s = 1, 2, \dots, r_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \end{aligned}$$

Решения  $m(t)$  и  $n(t)$  системы (3.4) удовлетворяют условию Гёльдера вместе со своими первыми производными [10].

Докажем разрешимость полученной системы. Рассмотрим для этого соответствующую (3.4) однородную систему, решение которой обозначим через  $m_0(t) = \{m_j^\circ(t), t \in L_{0,0}^j\}$  и  $n_0(t) = \{n_{j,s}^\circ(t), t \in \lambda_{0,0}^{j,s}\}$ . Всем функционалам и функциям, отвечающим этому решению, будем приписывать индекс нуль.

Очевидно, что однородная система соответствует краевой задаче (1.11) при равных нулю средних напряжениях  $\langle \tau_{13} \rangle$  и  $\langle \tau_{23} \rangle$ .

Используя интегральную формулу Дирихле [8], можно показать, что решение этой однородной краевой задачи

$$(3.5) \quad \begin{aligned} F^\circ(z) &= \text{const}, \quad F_j^\circ(z) = \text{const}, \quad j = 1, 2, \dots, k \\ \text{Re}F^\circ(z) &= \text{Re}F_j^\circ(z), \quad \text{GIm}F^\circ(z) = G_j \text{Im}F_j^\circ(z) \end{aligned}$$

Переходя в (3.1) к предельным значениям и учитывая при этом (3.5), выводим, что  $n_{j,s}^\circ(t)$  являются граничными значениями некоторых регулярных в  $d_{0,0}^{j,s}$  функций. Отсюда в силу теоремы единственности решения задачи Дирихле [8] следует:

$$(3.6) \quad n_{j,s}^\circ(t) = \text{const}, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad s = 1, 2, \dots, r_j$$

Согласно формуле Сохоцкого — Племяля, имеем для (3.1)

$$F_j(t) - F(t) = im_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, k$$

Подставляя функции (3.5) в последнее соотношение, получаем

$$(3.7) \quad m_j^\circ(t) = \text{const}, \quad j = 1, 2, \dots, k$$

Вычисляя (3.1) при помощи (3.7), (3.6) и учитывая (3.5), находим

$$(3.8) \quad F^\circ(z) = 0, \quad F_j^\circ(z) = 0, \quad C_{j,s}^{\ast\circ} = 0, \quad m_0(t) = 0, \quad t \in l_{0,0}$$

Возвращаясь к функции  $n_0(t)$  и используя равенства (3.3), (3.6) и (3.8), имеем

$$(3.9) \quad n_0(t) = 0, \quad t \in \lambda_{0,0}$$

Следовательно, система (3.4) разрешима при любой правой части и причем единственным образом. Этим доказана корректность представлений (3.1).

Система (3.4) и представления (3.1) полностью определяют решение краевой задачи (1.11).

#### 4. Макроскопическая модель композиционного материала.

*Определение.* Под макроскопической моделью композиционного материала будем понимать однородную анизотропную среду, обладающую тем свойством, что при одинаковых средних напряжениях, действующих в материале и в среде, их средние деформации совпадают. При этом полагаем  $h_j(t) = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ).

Средние деформации определяются следующим образом:

$$(4.1) \quad \begin{aligned} \langle e_1 \rangle &= \frac{u(z + \omega_1) - u(z)}{l_1}, \quad \langle e_3 \rangle = e_3 \\ \langle e_2 \rangle &= \frac{v(z + \omega_2) - v(z)}{l_2 \sin \theta} - \frac{v(z + \omega_1) - v(z)}{l_1} \text{ctg } \theta \\ \langle \gamma_{12} \rangle &= \frac{u(z + \omega_2) - u(z)}{l_2 \sin \theta} + \frac{v(z + \omega_1) - v(z)}{l_1} - \\ &\quad - \frac{u(z + \omega_1) - u(z)}{l_1} \text{ctg } \theta \\ \langle \gamma_{13} \rangle &= \frac{w(z + \omega_1) - w(z)}{l_1} \\ \langle \gamma_{23} \rangle &= \frac{w(z + \omega_2) - w(z)}{l_2 \sin \theta} - \frac{w(z + \omega_1) - w(z)}{l_1} \text{ctg } \theta \end{aligned}$$

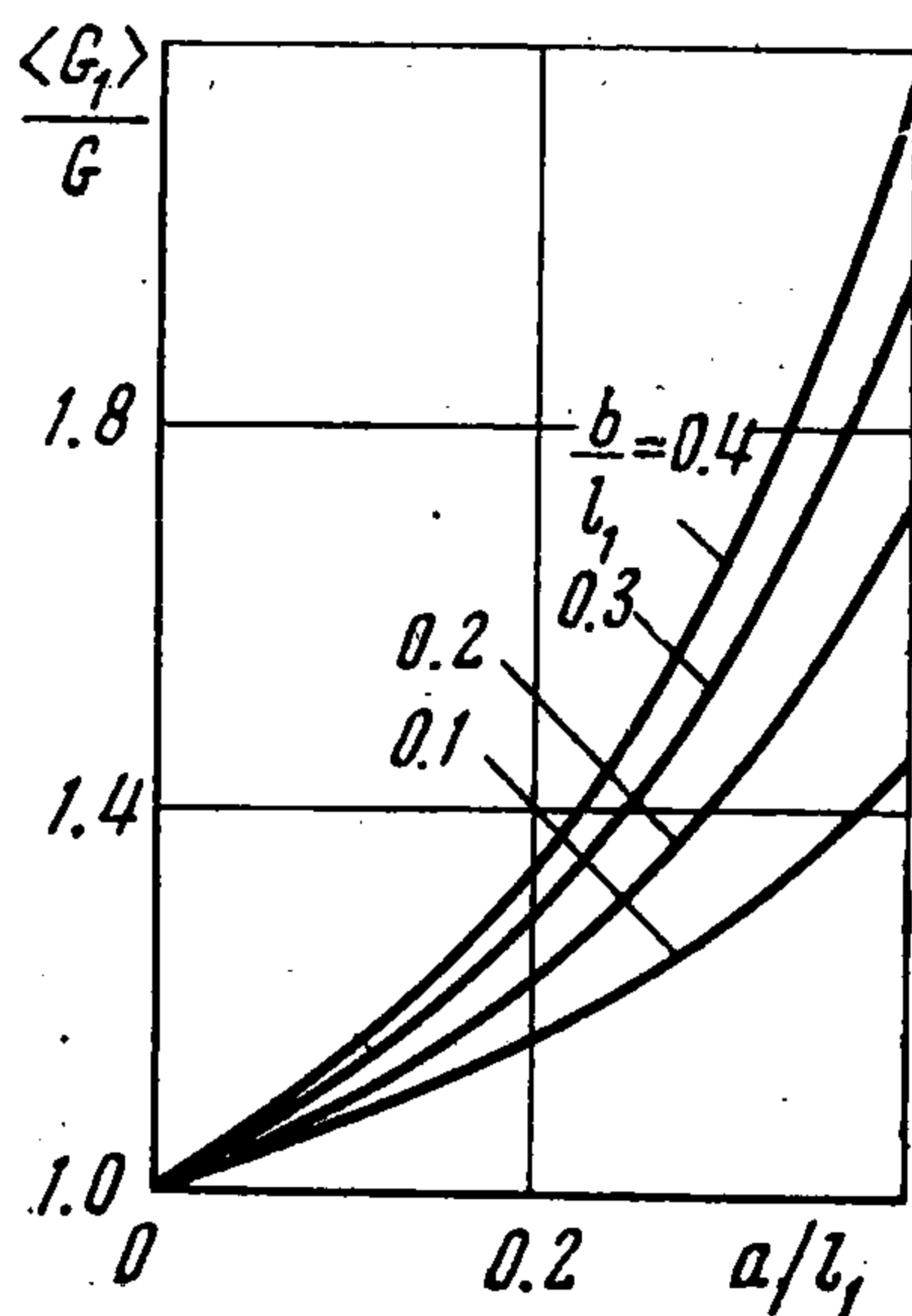
Вводя среднее напряжение

$$(4.2) \quad \langle \sigma_3 \rangle = \frac{1}{S} \iint_{\Pi_{0,0}} \sigma_3 dx_1 dx_2, \quad S = \omega_1 \operatorname{Im} \omega_2$$

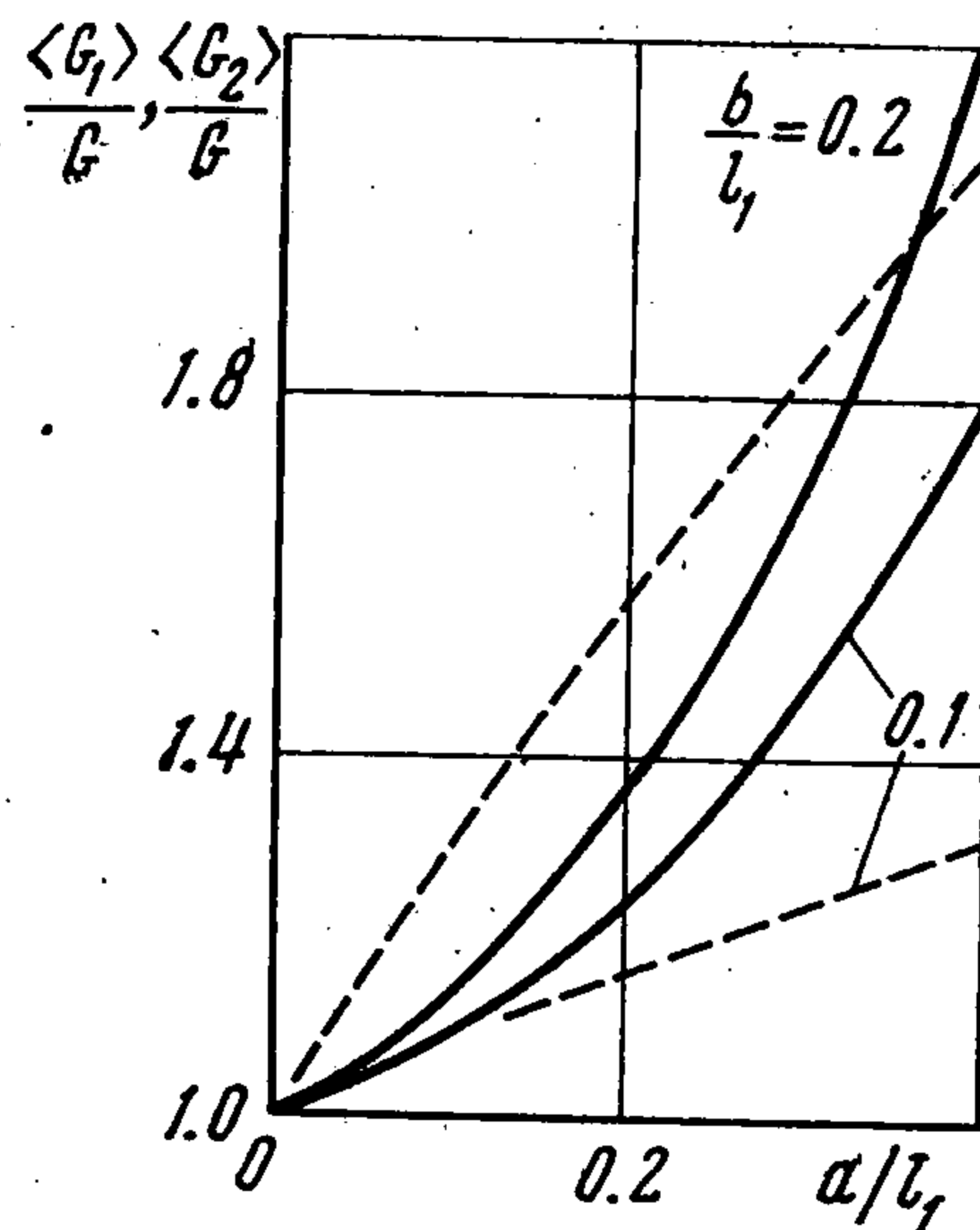
и вычисляя правые части (4.1), (4.2) при помощи формул (1.4) — (1.6), (2.1), (2.3) — (2.5), (3.1) — (3.4), запишем (4.1) в виде

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \langle e_k \rangle &= c_{k1} \langle \sigma_1 \rangle + c_{k2} \langle \sigma_2 \rangle + c_{k3} \langle \sigma_3 \rangle + c_{k6} \langle \tau_{12} \rangle, \quad k=1, 2, 3 \\ \langle \gamma_{23} \rangle &= c_{44} \langle \tau_{23} \rangle + c_{45} \langle \tau_{13} \rangle \\ \langle \gamma_{13} \rangle &= c_{54} \langle \tau_{23} \rangle + c_{55} \langle \tau_{13} \rangle \\ \langle \gamma_{12} \rangle &= c_{61} \langle \sigma_1 \rangle + c_{62} \langle \sigma_2 \rangle + c_{63} \langle \sigma_3 \rangle + c_{66} \langle \tau_{12} \rangle \end{aligned}$$

где  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, 6$ ) — макроскопические упругие параметры композиционного материала, зависящие лишь от упругих характеристик компонентов композиции и ее геометрии.



Фиг. 2



Фиг. 3

Например, для  $i, j = 4, 5$  выражения  $c_{ij}$  имеют вид

$$\begin{aligned} c_{44} &= \frac{1}{G} - \frac{2 \operatorname{Im} f_2}{S}, & c_{55} &= \frac{1}{G} - \frac{2 \operatorname{Re} f_1}{S} \\ c_{45} &= -\frac{2 \operatorname{Im} f_1}{S}, & c_{54} &= -\frac{2 \operatorname{Re} f_2}{S} \end{aligned}$$

$$f = f_1 \langle \tau_{13} \rangle + f_2 \langle \tau_{23} \rangle, \quad S = \omega_1 \operatorname{Im} \omega_2$$

Здесь функционалы  $f_1, f_2$  определяются соотношением (3.2) при  $\langle \tau_{13} \rangle = 1, \langle \tau_{23} \rangle = 0$  и  $\langle \tau_{23} \rangle = 1, \langle \tau_{13} \rangle = 0$  соответственно.

Важно подчеркнуть, что  $c_{ij}$  зависят от решений соответствующих двоякопериодических задач функциональным образом, для вычисления  $c_{ij}$  достаточно иметь лишь несколько функционалов. Это обстоятельство открывает пути для различных приближенных подходов к описанию макросвойств композиционных материалов.

Матрица коэффициентов  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3, 6$ ) симметрична и энергетически допустима [5]. Аналогично [5] можно показать, что последнее утверждение распространяется на  $c_{ij}$  ( $i, j = 4, 5$ ). Следовательно, (4.3) допустимо трактовать как закон Гука для искомой модельной среды.

Рассмотрим в качестве примера продольный сдвиг композиционного материала типа боралюминия (отношение модуля сдвига материала волокна к модулю сдвига материала среды равно 6,46) [11] со сплошными волокнами эллиптического сечения, расположенными в вершинах прямоугольной решетки ( $\omega_1 = l_1$ ,  $\omega_2 = il_2$ ).

На фиг. 2, 3 приведены кривые изменения макроскопических параметров  $(Gc_{55})^{-1} = \langle G_1 \rangle / G$  и  $(Gc_{44})^{-1} = \langle G_2 \rangle / G$  ( $G$  — модуль сдвига материала среды) в функции от относительных размеров области  $a / l_1$ ,  $b / l_1$ . В рассматриваемом случае коэффициенты  $c_{45} = c_{54} = 0$ . Фиг. 2 соответствует квадратной решетке  $l_2 / l_1 = 1$ , фиг. 3 — прямоугольной решетке  $l_2 / l_1 = 0.5$  (сплошные линии соответствуют  $\langle G_1 \rangle$ , пунктирные —  $\langle G_2 \rangle$ ). Предполагается, что полуоси эллипса  $a$  и  $b$  направлены вдоль координатных осей  $x_1$  и  $x_2$  соответственно.

В частном случае  $a = b$ ,  $l_1 = l_2$  приведенные на фиг. 2 результаты совпадают с соответствующими результатами [3].

Заметим, что при выводе (4.3) осреднение напряжений и смещений проводилось в пределах параллелограмма периодов, размеры которого для большинства композиционных материалов не превышают 1 мм. Поэтому замена в расчетной практике композиционного материала однородной анизотропной средой, управляемой законом (4.3), по видимому, приведет к удовлетворительным результатам.

Поступила 9 VII 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А. Упругое равновесие изотропной плоскости с двоякопериодической системой включений. Прикл. механ., 1966, т. 2, вып. 9.
2. Фильштинский Л. А. Напряжения и смещения в упругой плоскости, ослабленной двоякопериодической системой одинаковых круглых отверстий. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
3. Ван Фо Фы Г. А. Теория армированных материалов с покрытиями. Киев, «Наукова думка», 1971.
4. Болотин В. В. Теории стохастически армированных материалов. В сб.: Прочность и пластичность. М., «Наука», 1971.
5. Фильштинский Л. А. К теории упругих неоднородных сред с регулярной структурой. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
6. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.
7. Шерман Д. И. К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах. Докл. АН СССР, 1940, т. 28, № 1.
8. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М., «Наука», 1968.
9. Натанзон В. Я. О напряжениях в растягиваемой пластинке, ослабленной одинаковыми отверстиями, расположенными в шахматном порядке. Матем. сб., 1935, т. 42, № 5.
10. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
11. Современные композиционные материалы (под ред. Л. Браутмана и Р. Крока). М., «Мир», 1970.