

СПЕКТРЫ ЧАСТОТ И ФОРМЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. Н. Москаленко

(Москва)

Предлагается аналог метода конечных элементов для решения задач о собственных колебаниях двоякопериодических систем. Приближенное решение строится для каждого отдельного элемента. Влияние соседних элементов учитывается за счет введения силовых факторов и условий стыковки. Рассматриваются числовые примеры.

1. Пусть двоякопериодическая система отнесена к, вообще говоря, косоугольной системе координат Ox_1x_2 так, что свойства системы повторяются при смещении на a_1 вдоль Ox_1 и на a_2 вдоль Ox_2 . Рассмотрим колебания отдельного элемента, ограниченного в местной системе координат линиями $x_1' = 0, x_1' = a_1, x_2' = 0, x_2' = a_2$. Вектор смещения для формы колебаний представим в виде разложения в ряд по системе координатных функций

$$(1.1) \quad u^{(kl)} = \sum_{n=1}^N C_n^{(kl)} v_n^{(n)}$$

Здесь kl — номер рассматриваемого элемента при двойной нумерации.

Будем считать, что уравнения движения и условия стыковки элементов приводят к уравнению относительно вектора коэффициентов C

$$(1.2) \quad PC^{(kl)} + QC^{(k+1, l)} + RC^{(k, l+1)} = 0$$

Компоненты матриц P, Q, R не зависят от номера элемента вследствие периодичности свойств системы.

Можно показать, что общее решение уравнения (1, 2) аналогично случаю периодических структур [1,2] представимо в виде суммы решений типа

$$(1.3) \quad C^{(k, l)} = \lambda_1^k \lambda_2^l C$$

Пусть P, Q, R — неособенные матрицы. Рассмотрим при некотором фиксированном значении комплексного λ_2 уравнение

$$(1.4) \quad (P + \lambda_1 Q + \lambda_2 R) v = 0$$

Отсюда получим N собственных чисел $\lambda_{1n}(\lambda_2)$ и N собственных векторов $v_n(\lambda_2)$.

Пусть l пробегает значения от 1 до L . Произвольно выберем L различных значений $\lambda_2 : \lambda_{21}, \dots, \lambda_{2L}$. Представим $C^{(kl)}$ в виде суммы

$$(1.5) \quad C^{(kl)} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^L \lambda_{2m}^l f_{nm}^{(k)} v_n(\lambda_{2m})$$

Числа f_{nm} при этом находятся однозначно. Подставляя (1.5) в уравнение (1.2), получаем с учетом (1.4)

$$(1.6) \quad C^{(k+1, l)} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^L \lambda_{1n} (\lambda_{2m}) \lambda_{2m}^l f_{nm}^{(k)} v_n (\lambda_{2m})$$

Отсюда вытекает, что в общем случае при произвольных k и l можно найти такие числа f_{nm} , что будет справедливо разложение

$$C^{(k, l)} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^L \lambda_{1nm}^k \lambda_{2m}^l f_{nm} v (\lambda_{2m})$$

которое представимо в виде суммы решений типа (1.3).

Докажем однозначность нахождения $f_{nm}^{(k)}$. Для этого представляем уравнение (1.5) в виде

$$C^{(kl)} = \sum_{m=1}^L \lambda_{2m}^l \sum_{n=1}^N f_{nm}^{(k)} v_{nm}$$

Умножим левую и правую части на вектор Φ . Вследствие того что λ_{2m} различны, получаем, что определитель $\det \|\lambda_{2m}^l\| \neq 0$. Следовательно, однозначно можно найти

$$(1.7) \quad \sum_{n=1}^N f_{nm}^{(k)} v_{nm} \cdot \Phi = \sum_{l=1}^L \xi_{lm} C^{(kl)} \cdot \Phi$$

$$\xi_{lm} = \xi_{lm} (\lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2L})$$

До сих пор вектор Φ был произвольным. Будем теперь считать, что вектор Φ определен так, что при фиксированном m выполняются условия $v_{nm} \cdot \Phi = \delta_{pn}$. В силу полноты и минимальности системы векторов v_{nm} при фиксированном m эти уравнения однозначно определяют вектор Φ . При этих условиях уравнение (1.7) дает

$$f_{nm}^{(k)} = \sum_{l=1}^L \xi_{lm} C^{(kl)} \cdot \Phi_{nm}$$

что и доказывает требуемую однозначность.

Значения λ_1, λ_2 , равные по модулю единице, соответствуют решению задачи о собственных колебаниях неограниченной двоякопериодической системы. В случае ограниченной системы для построения уравнения частот необходимо использовать условия для пограничных элементов.

2. Применим для нахождения решения системы (1.2) метод Рэля — Ритца. Будем искать компоненты смещения $u_j^{(kl)}$ в виде разложения

$$(2.1) \quad u_j^{(kl)} = \sum_{m=1}^M C_{jm}^{(kl)} f_{jm} (x_1', x_2')$$

Действующие на гранях $x_2' = 0, x_2' = a_2$ обобщенные усилия или напряжения представим в виде усеченных рядов

$$(2.2) \quad \sigma_{2,j}^{(kl)} = \sum_{n=1}^N B_{2jn}^{(kl)} \Phi_{jn} (x_1'), \quad \sigma_{2,j}^{(k, l+1)} = \sum_{n=1}^N B_{2jn}^{(k, l+1)} \Phi_{jn} (x_1')$$

Аналогично разложим обобщенные усилия или напряжения, действующие на гранях $x_1' = 0$, $x_1' = a_1$

$$(2.3) \quad \sigma_{1,j}^{(kl)} = \sum_{p=1}^P B_{1jp}^{(kl)} \psi_{jp}(x_2'), \quad \sigma_{1,j}^{(k+1,l)} = \sum_{p=1}^P B_{1jp}^{(k+1,l)} \psi_{jp}(x_2')$$

Согласно методу Рэлея — Ритца, необходимо потребовать, чтобы для рассматриваемого элемента принимал стационарное значение следующий функционал:

$$(2.4) \quad J = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})_1 - \omega^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})_2 + (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u})_3$$

Скалярное произведение $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})_1$ порождается потенциальной энергией деформации, выражение $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})_2$ соответствует кинетической энергии, произведение $(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u})_3$ выражает потенциальную энергию внешних сил.

Подставляя (2.1) — (2.3) в (2.4) и приравнивая нулю производную $\partial J / \partial C_{iq}^{(kl)}$, получаем

$$(2.5) \quad \sum_j \sum_m C_{jm}^{(kl)} [(f_{jm}, f_{iq})_1 - \omega^2 (f_{jm}, f_{iq})_2] + \\ + \sum_j \sum_n [B_{2jn}^{(kl)} (\varphi_{jn}, f_{ig})_{320} + B_{2jn}^{(k,l+1)} (\varphi_{jn}, f_{ig})_{321}] + \\ + \sum_j \sum_p [B_{1jp}^{(kl)} (\psi_{jp}, f_{iq})_{310} + B_{1jp}^{(k+1,l)} (\psi_{jp}, f_{iq})_{311}] = 0$$

Здесь в трехзначных индексах скалярных произведений первое число означает номер скалярного произведения, два последующие — номера участков края.

Дополнительные соотношения получим из условий равенства смещений вдоль границ элементов

$$(2.6) \quad \sum_j \sum_m [C_{jm}^{(k,l+1)} (\varphi_{in}, f_{jm})_{320} - C_{jm}^{(kl)} (\varphi_{in}, f_{jm})_{321}] = 0 \\ \sum_j \sum_m [C_{jm}^{(k+1,l)} (\psi_{ip}, f_{jm})_{310} - C_{jm}^{(kl)} (\psi_{ip}, f_{jm})_{311}] = 0$$

Формулы (2.5), (2.6) дают систему $J(M + N + P)$ линейных алгебраических уравнений. Решение этой системы может быть найдено как сумма решений вида

$$(2.7) \quad C_{jmn}^{(kl)} = \lambda_1^k \lambda_2^l C_{jmn}, \quad B_{\alpha jq}^{(kl)} = \lambda_1^k \lambda_2^l B_{\alpha jq}$$

3. В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим колебания бесконечной пластины, опертой на прямоугольную решетку из диафрагм, абсолютно жестких в своей плоскости и абсолютно податливых из плоскости (шарнирные линии). Полагая $P = N$, $M = N^2$, выберем в качестве f_m , φ_n , ψ_p функции

$$f_m = \varphi_n \psi_p, \quad \varphi_n = \sin \frac{\pi n x_1}{a_1}, \quad \psi_p = \sin \frac{\pi p x_2}{a_2}$$

Система уравнений (2.5) принимает вид

$$(3.1) \quad \frac{1}{4} \rho h a_1 a_2 (\omega_{np}^2 - \omega^2) C_{np}^{(kl)} + \frac{\pi a_1 p}{2 a_2} [B_{2n}^{(kl)} - (-1)^p B_{2n}^{(k,l+1)}] + \\ + \frac{\pi a_2 n}{2 a_1} [B_{1p}^{(kl)} - (-1)^p B_{1n}^{(k+1,l)}] = 0 \\ \omega_{np}^2 = \pi^4 D / \rho h [(n/a_1)^2 + (p/a_2)^2]^2$$

Условия стыковки дают

$$\sum_{n=1}^N n [(-1)^n C_{np}^{(kl)} - C_{np}^{(k+1,l)}] = 0, \quad \sum_{n=1}^N p [(-1)^p C_{np}^{(kl)} - C_{np}^{(k,l+1)}] = 0$$

Из (3.1) с учетом (2.7) получаем выражения для C_{np}

$$C_{np} = -2\pi [\rho h a_1 a_2 (\omega_{np}^2 - \omega^2)]^{-1} (b_{2p} B_{2n} + b_{1n} B_{1p})$$

Первое из уравнений (3.2) дает

$$B_{1p} = -\frac{1}{\alpha_{1p}} \sum_{n=1}^M (-1)^n \beta_{np} B_{2n}$$

Последнее уравнение приводит к системе из N уравнений с N неизвестными

$$(3.2) \quad \alpha_{2n} B_{2n} - \sum_{p=1}^N \frac{(-1)^p \beta_{np}}{\alpha_{1p}} \sum_{q=1}^N (-1)^q \beta_{qp} B_{2q} = 0$$

Здесь

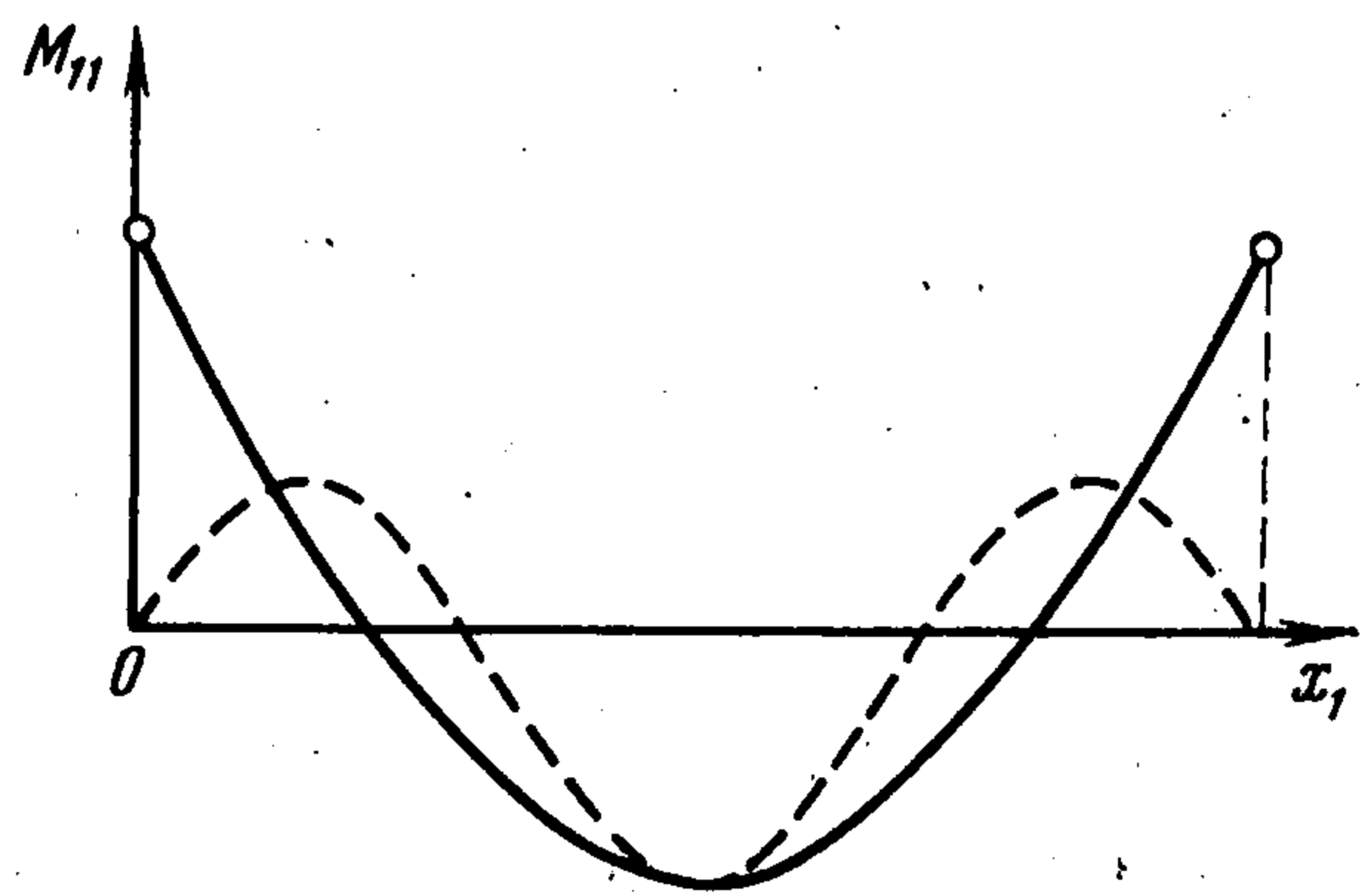
$$\alpha_{1q} = \sum_{p=1}^N \frac{(-1)^p b_{1p}^2}{\omega_{pq}^2 - \omega^2}, \quad \alpha_{2p} = \sum_{q=1}^N \frac{(-1)^q b_{2q}^2}{\omega_{pq}^2 - \omega^2}$$

$$\beta_{pq} = b_{1p} b_{2q} (\omega_{pq}^2 - \omega^2)^{-1}, \quad b_{\alpha p} = \rho a_1 a_2 a_\alpha^{-2} [1 - (-1)^p \lambda_\alpha]$$

Из условия равенства нулю определителя системы (3.2) получаем ограничения на частоту. Другие ограничения получим из условий $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$. Спектр частот полосовой. Полагая для квадратной ячейки $a_1 = a_2 = a$, $\omega_*^2 = \omega^2 \pi^{-4} a^4 \rho h / D$, находим границы первой полосы частот: $2 \leq \omega_* \leq \omega_{1*}$. Оценка ω_{1*} зависит от числа N . При $N = 5$ получаем $\omega_{1*} = 4.17$. Точное значение ω_{1*} равно нижней частоте 3.646 собственных колебаний защемленной по контуру ячейки.

Построение изгибающих моментов можно проиллюстрировать на примере цилиндрических колебаний. Для одной ячейки на фиг. 1 дан график изгибающего момента M_{11} .

Сплошная линия соответствует точному решению, пунктирная — приближенному при $N = 3$. Звездочками даны значения краевых моментов, найденные по формулам (2.3). Сопоставление приводит к выводу, что вдали от линий возмущения напряженное состояние может быть приближенно найдено путем дифференцирования решения. На линиях возмущения напряженное состояние может быть найдено по формулам (2.3).



Фиг. 1

4. Изучим поведение множителей λ_1, λ_2 для простейших краевых условий в случае конечной дwoякопериодической системы.

Уравнением для λ_1 будет

$$\lambda_1^2 - 2\lambda_1\gamma_1 + 1 = 0, \quad \gamma_1 = \cos k_1 a_1 - \beta_1 k_1^{-1} \sin k_1 a_1$$

Это уравнение имеет два корня (λ_{11} и $\lambda_{12} = \lambda_{11}^{-1}$). При $|\gamma| < 1$ оба корня комплексные и равны по модулю единице. Вводя две постоянные A_{11} и A_{12} , получаем

$$\begin{aligned} C_{11}^{(k)} &= (\lambda_{11} - \cos k_1 a_1) \lambda_{11}^k + (\lambda_{12} - \cos k_1 a_1) \lambda_{11}^k A_{12} \\ C_{12}^{(k)} &= -C_{13}^{(k)} = (\lambda_{11}^k A_{11} + \lambda_{12}^k A_{12}) \sin k_1 a_1 \\ C_{14}^{(k)} &= -(\lambda_{11}^{k+1} A_{11} + \lambda_{12}^{k+1} A_{12}) \sin k_1 a_1 \end{aligned}$$

Пусть два противоположных края оперты. Находим, что это эквивалентно условиям $C_{12}^{(1)} = 0, C_{14}^{(K)} = 0$. Отсюда

$$(\lambda_{11}^K - \lambda_{12}^K) \sin^2 k_1 a_1 = 0, \quad (\lambda_{11} A_{11} + \lambda_{12} A_{12}) \sin k_1 a_1 = 0$$

Замечая, что $\lambda_{11} = \pm 1$ при $\sin k_1 a_1 = 0$, получаем, что λ_{11} должно удовлетворять уравнению

$$(4.1) \quad \lambda_{11}^{2K} = 1$$

Найдем частоты и формы собственных колебаний части рассмотренной выше конструкции. Будем считать, что прямоугольная пластина занимает KL ячеек, так что k изменяется от единицы до K , а l — от единицы до L . Кроме того, предположим, что каждые два противоположных края пластины либо оперты, либо заземлены. Применим для решения асимптотический метод В. В. Болотина [3]. Внутри каждой ячейки воспользуемся следующим выражением для прогиба:

$$\begin{aligned} w^{(kl)} &= [C_{11}^{(k)} \sin k_1 x_1' + C_{12}^{(k)} \cos k_1 x_1' + C_{13}^{(k)} e^{-\beta_1 x_1'} + C_{14}^{(k)} e^{\beta_1 (x_1' - a_1)}] \times \\ &\times [C_{21}^{(l)} \sin k_2 x_2' + C_{22}^{(l)} \cos k_2 x_2' + C_{23}^{(l)} e^{-\beta_2 x_2'} + C_{24}^{(l)} e^{\beta_2 (x_2' - a_2)}] \\ \beta_1^2 &= k_1^2 + 2k_2^2, \quad \beta_2^2 = 2k_1^2 + k_2^2, \quad \rho h \omega^2 = D (k_1^2 + k_2^2)^2 \end{aligned}$$

Условия равенства нулю прогиба на контуре ячейки и условия стыковки решений на границе ячейки дают

$$\begin{aligned} C_{13}^{(k)} &= -C_{12}^{(k)}, \quad C_{14}^{(k)} = -C_{11}^{(k)} \sin k_1 a_1 - C_{12}^{(k)} \sin k_1 a_1 \\ C_{12}^{(k+1)} &= -C_{14}^{(k)}, \quad C_{11}^{(k+1)} = \cos k_1 a_1 C_{11}^{(k)} - \sin k_1 a_1 C_{12}^{(k)} - \frac{\beta_1}{k_1} C_{14}^{(k)}. \end{aligned}$$

Все корни этого уравнения соответствуют формам собственных колебаний, за исключением случая, когда $\sin k_1 a_1 \neq 0, \lambda_1 = \pm 1$. Соответствующие формы колебаний тождественно равны нулю.

Пусть два противоположных края заземлены. Это эквивалентно условиям

$$k_1 C_{11}^{(1)} + \beta_1 C_{12}^{(1)} = 0, \quad \gamma_1 C_{11}^{(K)} - (\sin k_1 a_1 + \beta_1 k_1^{-1} \cos k_1 a_1) C_{12}^{(K)} = 0$$

Отсюда

$$(\lambda_{11} - \lambda_{12})(\lambda_{11} A_{11} - \lambda_{12} A_{12}) = 0, \quad (\lambda_{11} - \lambda_{12})^2 (\lambda_{11}^K - \lambda_{12}^K) = 0$$

Таким образом должно удовлетворяться уравнение (4.1).

Частотам и формам собственных колебаний будут соответствовать все корни (4.1), за исключением случая, когда $\sin k_1 a_1 = 0$. В этом случае $C_{1j}^{(K)} = 0$ ($j = 1, 2, 3, 4$).

Из уравнения (4.1) вытекает, что λ_1 по модулю равно единице, т. е. можно положить $\lambda_1 = \exp(i\varphi_1)$. Из (4.1) получаем

$$K\varphi_1 = m\pi \quad (m = 0, 1, \dots, K)$$

Воспользовавшись уравнением для λ_1 , находим

$$\cos \varphi_1 = \gamma_1 = \cos k_1 a_1 - \beta_1 k_1^{-1} \sin k_1 a_1$$

Аналогично для переменной x_2 получаем уравнение

$$\cos \varphi_2 = \cos k_2 a_2 - \beta_2 k_2^{-1} \sin k_2 a_2$$

Результаты вычисления нижней группы безразмерных частот $\omega_* = \omega a^2 \pi^{-2} (\rho h / D)^{1/2}$ для случая квадратной ячейки ($a_1 = a_2 = a$) даны в таблице (она имеет вид симметричной матрицы). В случае всех опертых краев следует вычеркнуть в таблице последний столбец и последнюю строчку. В случае защемления по контуру — первый столбец и первую строчку. Если два края оперты, а два другие защемлены, то следует вычеркнуть первый столбец и последнюю строчку.

$K = L = 8$

2.00	—	—	—	—	—	—	—	—
2.03	2.06	—	—	—	—	—	—	—
2.11	2.14	2.20	—	—	—	—	—	—
2.24	2.27	2.32	2.43	—	—	—	—	—
2.39	2.41	2.45	2.58	2.66	—	—	—	—
2.57	2.59	2.63	2.75	2.88	3.02	—	—	—
2.75	2.77	2.79	2.90	3.03	3.17	3.34	—	—
2.88	2.90	2.93	3.02	3.14	3.28	3.39	3.48	—
2.93	2.95	2.97	3.07	3.19	3.31	3.42	3.52	3.56

5. Изучим асимптотические свойства частот для прямоугольной пластины при большом, но конечном числе пролетов в обоих направлениях. Воспользуемся результатами п. 4. Прежде всего отметим, что на плоскости волновых чисел k_1, k_2 точки, соответствующие частотам и формам собственных колебаний, группируются в областях, определяемых неравенствами $|\gamma_1| \leq 1, |\gamma_2| \leq 1$. Представляет интерес найти плотность числа частот на плоскости k_1, k_2 . Пусть некоторые k_1, k_2 удовлетворяют уравнениям

$$\gamma_1(k_1, k_2) = \cos \frac{\pi p_1}{K}, \quad \gamma_2(k_1, k_2) = \cos \frac{\pi p_2}{L}$$

Найдем $\Delta_\alpha k_1$ и $\Delta_\alpha k_2$, которые соответствуют приращению p_α на единицу. Тогда искомая плотность приблизительно будет равна $n(k_1, k_2) \approx (\Delta_1 k_1 \Delta_2 k_2 - \Delta_1 k_2 \Delta_2 k_1)^{-1}$ или

$$n(k_1, k_2) \approx |F| KL [(1 - \gamma_1^2)(1 - \gamma_2^2)]^{-1/2}, \quad F = f_1 f_2 - 4 (\beta_1 \beta_2)^{-1} s_1 s_2$$

$$f_\alpha = (a_\alpha - 2\beta_\alpha^{-1} q_\alpha^2) s_\alpha + \beta_\alpha k_\alpha^{-1} a_\alpha c_\alpha$$

$$q_1 = k_2/k_1, \quad q_2 = k_1/k_2, \quad s_\alpha = \sin k_\alpha a_\alpha, \quad c_\alpha = \cos k_\alpha a_\alpha \quad (\alpha = 1, 2)$$

Плотность распределения частот на оси ω может быть найдена интегрированием

$$n(\omega) = \frac{1}{2} \omega^{-1/2} \left(\rho \frac{h}{D} \right)^{1/4} \int_{\Gamma} n(k_1, k_2) d\Gamma$$

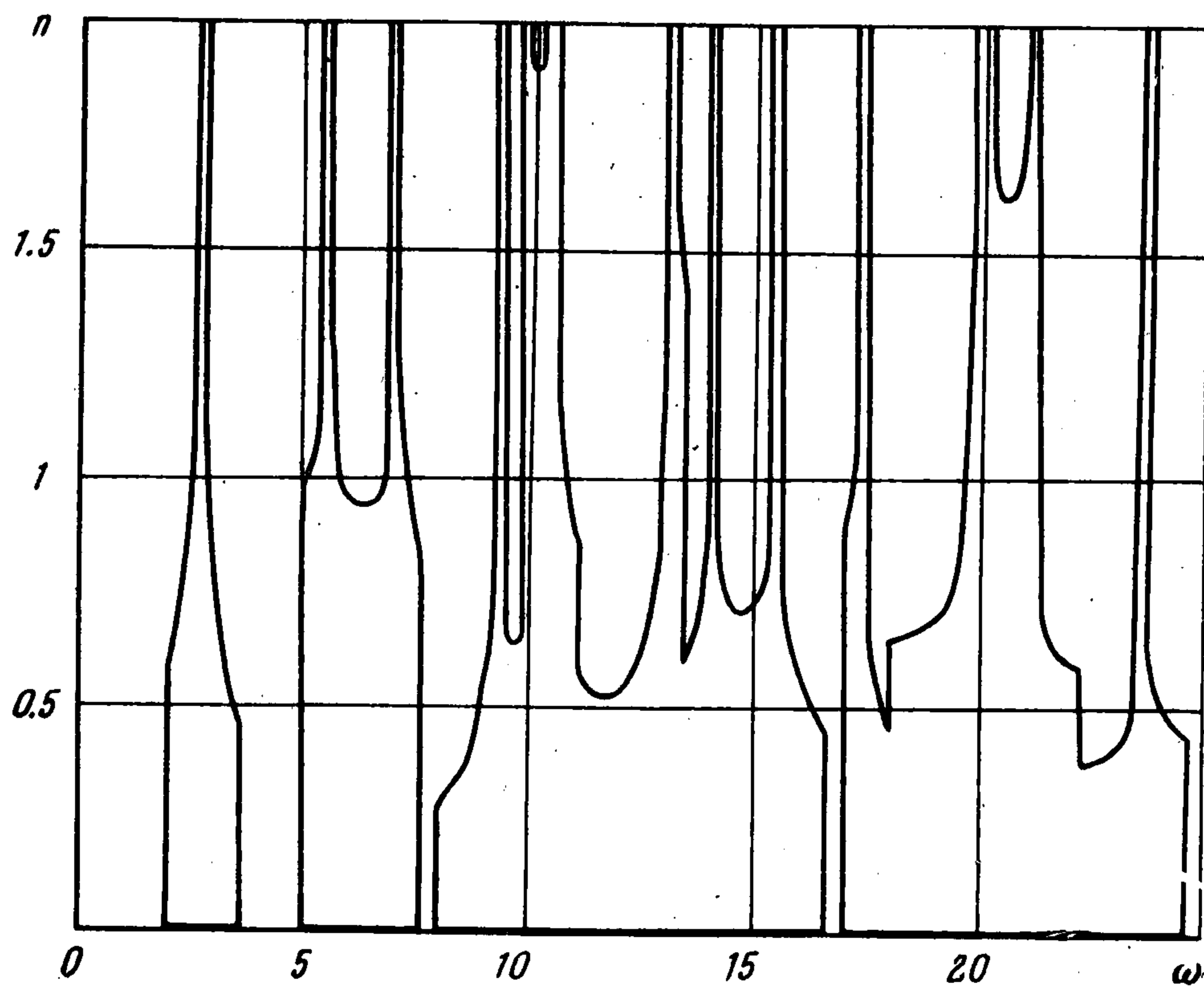
$$\Gamma: k_1^2 + k_2^2 = \omega (\rho h / D)^{1/2}; \quad k_{1,2} \geq 0, \quad |\gamma_{1,2}| \leq 1$$

Результаты вычислений безразмерной плотности частот

$$n_*(\omega) = 4\pi (D/\rho h)^{1/2} (KLa_1a_2)^{-1} n(\omega)$$

для пластины с квадратными ($a_1 = a_2$) ячейками даны на фиг. 2 в зависимости от приведенной частоты.

Спектр частот полосовой. Плотность частот получает конечные приращения при частотах, являющихся собственными для опертой по контуру ячейки (положительные приращения) и для заземленной (отрицательные). Особенности логарифмического типа оказываются на частотах, совпадающих с собственными для ячейки, опертой по двум противоположным сторонам и заземленной по двум другим.



Фиг. 2

Рассмотрим полосы частот, такие, что для каждой из полос бесконечно малому изменению частоты соответствуют бесконечно малое изменение формы колебаний. В отличие от случая балки для пластины полосы частот могут накладываться одна на другую. Например, на отрезке [20, 21.31] каждой частоте соответствуют пять существенно разных форм собственных колебаний.

Поступила 27 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Brillouin L. Wave propagation in periodic structures. N: Y., Dover publ., 1953.
2. Москаленко В. Н. Случайные колебания многопролетных пластин. Инж. ж. МТТ, 1968, № 4.
3. Болотин В. В. Краевой эффект при колебаниях упругих оболочек. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.