

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ТОНКОСТЕННЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

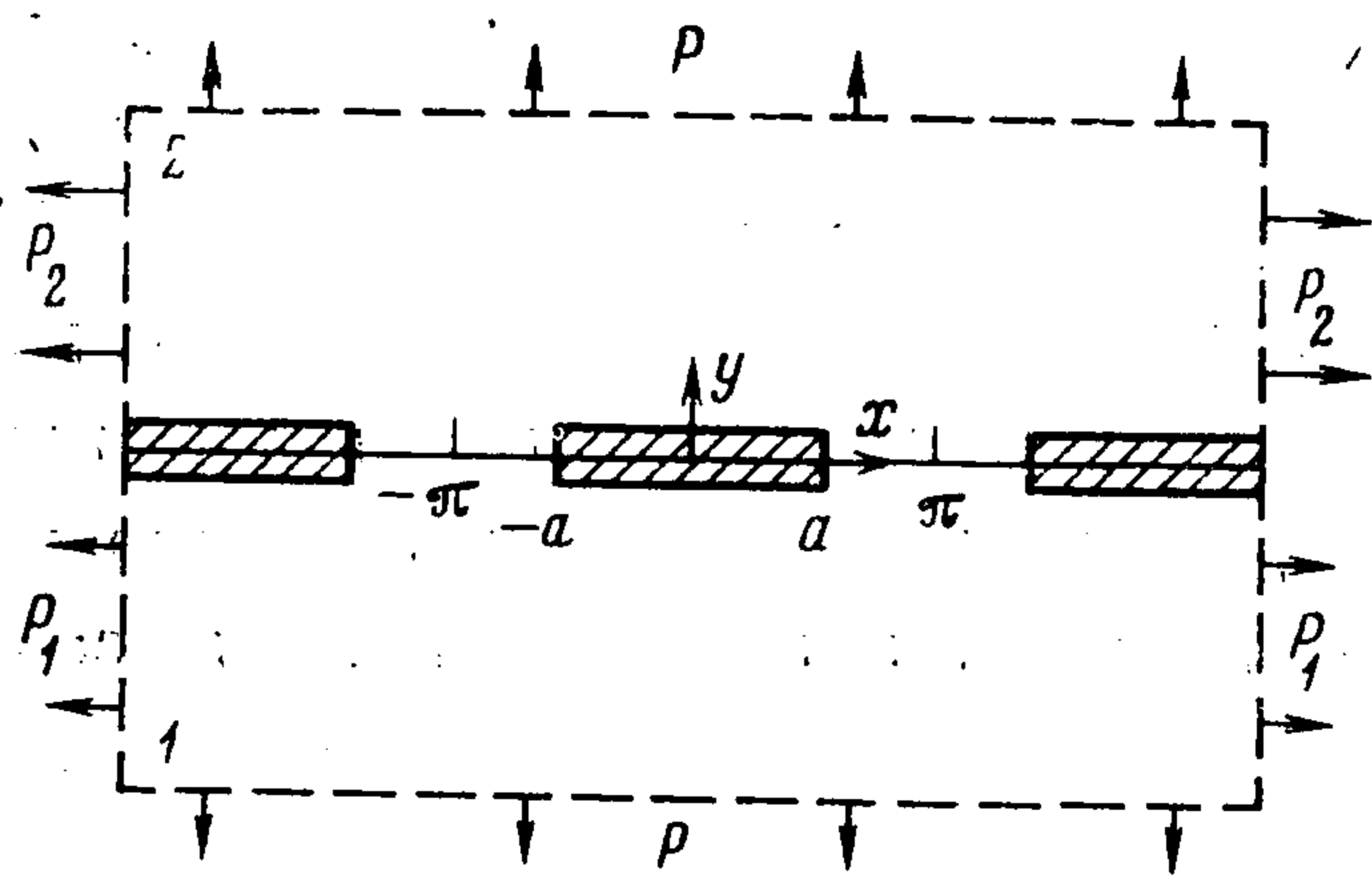
Д. В. Грилицкий, Г. Т. Сулим

(Львов)

Напряженное состояние однородной и кусочно-однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины исследовалось в работах [1-4]. В [1,2] основное внимание уделялось определению разности касательных напряжений на противоположных берегах включения в предположении равенства перемещений на них. Вследствие этого решение интегрального уравнения Прандтля, к которому свелась задача, пригодно для гибких включений с достаточно большим модулем упругости. Несколько иной подход для случая однородной плоскости намечен в [3,4], где учитывалось относительное смещение берегов включения, но пренебрегалось возникающей на них разностью напряжений. Некоторые результаты для соответствующей периодической задачи получены в [5,6].

Изучается периодическая задача упругого равновесия плоскости, состоящей из двух спаянных изотропных полуплоскостей, с тонкостенными упругими включениями конечной длины на прямой линии раздела материалов. Получена система сингулярных интегральных уравнений, решение которой пригодно для включений любой жесткости: от абсолютно жестких или гибких, но нерастяжимых, до абсолютно податливых (разрезов). Таким образом, установлена тесная связь между теорией трещин и теорией тонкостенных упругих включений. В предельном случае получается решение задачи для одного включения в более точной постановке, чем в статьях [1-4].

1. Рассматривается упругое равновесие плоскости, состоящей из двух спаянных изотропных полуплоскостей с тонкостенными упругими включениями длины $2a$ и ширины $2h$, расположенными на прямой линии разде-



Фиг. 1

ла материалов с периодом 2π (фиг. 1). Предполагается, что полуплоскости находятся под действием напряжений на бесконечности ($\sigma_y^\infty = P$, $\sigma_{x1}^\infty = P_1$, $\sigma_{x2}^\infty = P_2$), а также системы p^1 групп сосредоточенных сил $Q_j = Q_{xj} + iQ_{yj}$, действующих в точках $z_{0j} + 2n\pi$ ($j = 1, 2, \dots, p^1$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), и p^2 групп моментов M_k , приложенных в точках $z_{k0} +$

$\pm 2n\pi$ ($k = 1, 2, \dots, p^2$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Первые m^1 групп сил и m^2 групп моментов приложены в точках нижней полуплоскости, остальные — в верхней полуплоскости. Такой выбор нагрузки позволяет считать задачу периодической, поскольку в точках $z + 2n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) напряженно-деформированное состояние одинаково. Поэтому в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением полосы $|x| \leq \pi$, $|y| < \infty$.

Обозначим через L_1 совокупность промежутков $[2n\pi - a, 2n\pi + a]$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), занимаемых включениями, через L_2 — остальную часть действительной оси.

Учитывая малую толщину включений, граничные условия на линии $y = 0$ запишем в виде

$$(1.1) \quad \begin{aligned} (\sigma_{y1} - i\tau_{xy1}) - (\sigma_{y2} - i\tau_{xy2}) = f_1(x) - if_2(x) &= \begin{cases} f_1^*(x) - if_2^*(x), & x \in L_1 \\ 0, & x \in L_2 \end{cases} \\ (u_1' + iv_1') - (u_2' + iv_2') = f_3(x) + if_4(x) &= \begin{cases} f_3^*(x) + if_4^*(x), & x \in L_1 \\ 0, & x \in L_2 \end{cases} \\ f_j(x) = f_j(x + 2n\pi), \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

В предположении равенства поперечных деформаций на кромках включений имеем, по аналогии с работой [7], четыре условия взаимодействия тонкостенных включений с окружающей средой

$$(1.2) \quad \begin{aligned} u_1' + u_2' &= 2k_0\sigma_x - k_1(\sigma_{y1} + \sigma_{y2}) \\ u_2 - u_1 &= \frac{h}{\mu_0}(\tau_{xy1} + \tau_{xy2}) - h(v_1' + v_2') \\ u_2' - u_1' &= -k_2(\sigma_{y2} - \sigma_{y1}) \\ v_2 - v_1 &= k_0h(\sigma_{y1} + \sigma_{y2}) - 2k_1h\sigma_x, \quad x \in L_1 \end{aligned}$$

Здесь

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \sigma_x &= N_- + \frac{1}{2h} \int_{2n\pi-a}^x [\tau_{xy2}(t) - \tau_{xy1}(t)] dt, \quad 2n\pi - a \leq x \leq 2n\pi + a \\ n &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

$$(1.4) \quad k_0 = \frac{1}{E_0}, \quad k_1 = \frac{\nu_0}{E_0}, \quad k_2 = \frac{k_1^2 - k_0^2}{k_1}, \quad \mu_0 = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)}$$

Индекс 1 относится к нижней полуплоскости, индекс 2 — к верхней; $\tau_{xyi}, \sigma_{yi}, \sigma_{xi}$ — касательные и нормальные напряжения; u_i, v_i — компоненты вектора перемещений; E_0, ν_0 — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала включений; N_- — нормальные напряжения на левых торцах включений; $f_j(x)$ — периодические функции, подлежащие определению.

2. Напряжения и перемещения выражаются формулами [8]

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \sigma_{yj} - i\tau_{xyj} &= \Phi_j(z) + \overline{\Phi_j(z)} + z\overline{\Phi_j'(z)} + \overline{\Psi_j(z)} \\ 2\mu_j(u_j' + iv_j') &= \kappa_j\Phi_j(z) - \overline{\Phi_j(z)} - z\overline{\Phi_j'(z)} - \overline{\Psi_j(z)}, \quad j = 1, 2 \\ \Phi_j(z) &= \sum_j^1 S_{jk}(z) + \Gamma_j + \Phi_{0j}(z) \\ \Psi_j(z) &= \sum_j^1 R_{jk}(z) + \sum_j^2 R_k^*(z) + \Gamma_j' + \Psi_{0j}(z) \\ S_{jk}(z) &= -e_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{Q_k}{z + 2n\pi - z_{0k}} \\ R_{jk}(z) &= e_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\kappa_j \overline{Q}_k}{z + 2n\pi - z_{0k}} - \frac{(\overline{z}_{0k} + 2n\pi) Q_k}{(z + 2n\pi - z_{0k})^2} \right] \\ R_k^*(z) &= \frac{iM_k}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{z + 2n\pi - z_{k0}}, \quad e_j = \frac{1}{2\pi(1 + \kappa_j)} \end{aligned}$$

$$\kappa_j = \frac{3 - \nu_j}{1 + \nu_j}, \quad \mu_j = \frac{E_j}{2(1 + \nu_j)}$$

$$\Sigma_1^i = \sum_{k=1}^{m^i}, \quad \Sigma_2^i = \sum_{k=m^i+1}^{p^i}, \quad \Gamma_j = \frac{1}{4}(P + P_j),$$

$$\Gamma_j' = \frac{1}{2}(P - P_j), \quad i, j = 1, 2$$

$\Phi_{0j}(z)$, $\Psi_{0j}(z)$ — голоморфные вне L_1 функции, исчезающие при $z \rightarrow x + i\infty$.

Определим $\Phi_1(z)$ в верхней полуплоскости S_2 , $\Phi_2(z)$ — в нижней полуплоскости S_1 соотношением

$$\Phi_j(z) = -\bar{\Phi}_j(z) - z\bar{\Phi}_j'(z) - \bar{\Psi}_j(z), \quad z \in S_k; j, k = 1, 2; k \neq j$$

и с применением формулы (1.421.3) [9] получим на действительной оси

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{y1} - i\tau_{xy1} &= \Phi_{01}^-(x) - \Phi_{01}^+(x) + A_1(x) \\ 2\mu_1(u_1' + iv_1') &= \kappa_1\Phi_{01}^-(x) + \Phi_{01}^+(x) + B_1(x) \\ \sigma_{y2} - i\tau_{xy2} &= \Phi_{02}^+(x) - \Phi_{02}^-(x) + A_2(x), \quad 2\mu_2(u_2' + iv_2') = \\ &= \kappa_2\Phi_{02}^+(x) + \Phi_{02}^-(x) + B_2(x) \end{aligned}$$

$$A_j(x) = A_j + e_j \Sigma_j^1 [(\kappa_j Q_k - \bar{Q}_k) \overline{L_k(x)} - Q_k L_k(x) + \bar{Q}_k C_k(x)] + \Sigma_j^2 \frac{iM_k}{2\pi} L_k^*(x)$$

$$B_j(x) = B_j +$$

$$+ e_j \Sigma_j^1 [(\bar{Q}_k - \kappa_j Q_k) \overline{L_k(x)} - \kappa_j Q_k L_k(x) - \bar{Q}_k C_k(x)] - \Sigma_j^2 \frac{iM_k}{2\pi} L_k^*(x)$$

$$A_j = \Gamma_j + \bar{\Gamma}_j + \bar{\Gamma}_j', \quad B_j = \kappa_j \Gamma_j - \bar{\Gamma}_j - \bar{\Gamma}_j'$$

$$L_k(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{x - z_{0k}}{2} \right), \quad L_k^*(x) = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{x - z_{k0}}{2} \right)$$

$$C_k(x) = \frac{1}{4} (\bar{z}_{0k} - z_{0k}) \operatorname{cosec}^2 \left(\frac{x - z_{0k}}{2} \right) + \overline{L_k(x)}$$

Из условий (1.1), используя соотношения (2.2) и решая соответствующие задачи сопряжения, после некоторых преобразований находим

$$(2.3) \quad \Phi_{01}^+(x) = \frac{\mu_1}{c_{21}} [2\mu_2 X^+(x) + \kappa_2 Y^+(x)]$$

$$\Phi_{01}^-(x) = \frac{\mu_1}{c_{12}} [-2\mu_2 X^-(x) + Y^-(x)]$$

$$\Phi_{02}^+(x) = \frac{\mu_2}{c_{21}} [-2\mu_1 X^+(x) + Y^+(x)]$$

$$\Phi_{02}^-(x) = \frac{\mu_2}{c_{12}} [2\mu_1 X^-(x) + \kappa_1 Y^-(x)]$$

$$X^\pm(x) = \pm \frac{1}{2} [2\omega(x) + f_3(x) + if_4(x)] + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\omega(t) + f_3(t) + if_4(t)}{t - x} dt$$

$$Y^{\pm}(x) = \pm \frac{1}{2} [\Omega(x) - f_1(x) + i f_2(x)] + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Omega(t) - f_1(t) + i f_2(t)}{t-x} dt$$

$$\omega(x) = \frac{B_2(x)}{4\mu_2} - \frac{B_1(x)}{4\mu_1}, \quad \Omega(x) = A_1(x) - A_2(x), \quad c_{12} = \mu_1 + \kappa_1\mu_2$$

$$c_{21} = \mu_2 + \kappa_2\mu_1$$

Подставляя (2.3) в (2.2), разделяя действительные и мнимые части, учитывая также периодичность функций $f_j(x)$, получим выражения для напряжений и производных от перемещений

$$(2.4) \quad \sigma_{y1}(x) = \sigma_y^{\circ}(x) + m_{12}^+ f_1(x) + l_1^- f_3(x) + m_{12}^- t_2(x) - l_1^+ t_4(x)$$

$$\sigma_{y2}(x) = \sigma_{y1}(x) - f_1(x)$$

$$\tau_{xy1}(x) = \tau_{xy}^{\circ}(x) + m_{12}^+ f_2(x) - l_1^- f_4(x) - m_{12}^- t_1(x) -$$

$$- l_1^+ t_3(x), \quad \tau_{xy2}(x) = \tau_{xy1}(x) - f_2(x)$$

$$\sigma_{x1}(x) = \sigma_{x1}^{\circ}(x) + n_{12}^- f_1(x) + r_{12}^+ f_3(x) + n_{12}^+ t_2(x) -$$

$$- r_{12}^- t_4(x), \quad |x| \leq \pi$$

$$\sigma_{x2}(x) = \sigma_{x2}^{\circ}(x) - n_{21}^- f_1(x) - r_{21}^+ f_3(x) + n_{21}^+ t_2(x) -$$

$$- r_{21}^- t_4(x)$$

$$u_1'(x) = u^{\circ'}(x) + l_2^- f_1(x) + m_{21}^+ f_3(x) + l_2^+ t_2(x) +$$

$$+ m_{21}^- t_4(x), \quad u_2'(x) = u_1'(x) - f_3(x)$$

$$v_1'(x) = v^{\circ'}(x) - l_2^- f_2(x) + m_{21}^+ f_4(x) + l_2^+ t_1(x) - m_{21}^- t_3(x)$$

$$v_2'(x) = v_1'(x) - f_4(x)$$

Здесь

$$(2.5) \quad \sigma_y^{\circ}(x) = \text{Im} [I_1(x)] + \text{Re} [I_3(x)]$$

$$\tau_{xy}^{\circ}(x) = \text{Re} [I_1(x)] - \text{Im} [I_3(x)]$$

$$\sigma_{xj}^{\circ}(x) = \text{Im} [I_{jn}(x)] + 2\text{Re} [-2e_j \Sigma_j^1 Q_k L_k(x) + 2\Gamma_j -$$

$$- (-1)^j r_{jn} \omega(x) + q_{nj} A_j(x) + p_{jn} A_n(x)]$$

$$u^{\circ'}(x) = \text{Im} [I_2(x)] + \text{Re} [I_4(x)]$$

$$v^{\circ'}(x) = -\text{Re} [I_2(x)] + \text{Im} [I_4(x)]$$

$$t_i(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a f_j(t) \text{ctg} \left(\frac{t-x}{2} \right) dt, \quad I_{jn}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n_{jn}^+ \Omega(t) - 2r_{jn}^- \omega(t)}{t-x} dt$$

$$I_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_{12}^- \Omega(t) - 2l_1^+ \omega(t)}{t-x} dt, \quad I_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{l_2^+ \Omega(t) + 2m_{12}^- \omega(t)}{t-x} dt$$

$$I_3(x) = m_{21}^+ A_1(x) + m_{12}^+ A_2(x) + 2l_1^- \omega(x)$$

$$I_4(x) = \frac{m_{12}^+}{2\mu_1} B_1(x) + \frac{m_{21}^+}{2\mu_2} B_2(x) - l_2^- \Omega(x)$$

$$q_{jn} = -\frac{\mu_n}{c_{nj}} - \frac{1}{2} m_{jn}^+, \quad p_{jn} = \frac{\mu_j}{c_{jn}} - \frac{1}{2} m_{jn}^+$$

$$r_{jn}^{\pm} = \mu_1 \mu_2 \frac{3c_{nj} \pm c_{jn}}{c_{12} c_{21}}, \quad m_{jn}^{\pm} = \mu_i \frac{c_{nj} \pm c_{jn} \kappa_n}{2c_{12} c_{21}}$$

$$n_{jn}^{\pm} = \mu_j \frac{3c_{nj} \pm c_{jn} \kappa_n}{2c_{12} c_{21}}, \quad l_1^{\pm} = \mu_1 \mu_2 \left(\frac{1}{c_{12}} \pm \frac{1}{c_{21}} \right)$$

$$l_2^{\pm} = \frac{c_{21} \kappa_1 \pm c_{12} \kappa_2}{4c_{12} c_{21}}, \quad i = 1, 2, 3, 4; j, n = 1, 2; n \neq j$$

(σ_y° , σ_{x1}° , σ_{x2}° , τ_{xy}° , u° , v° — соответствующие напряжения и производные от перемещений на линии сая полуплоскостей при отсутствии включений).

Подстановка соотношений (2.4) в условия (1.2) приводит к системе интегральных уравнений

$$(2.6) \quad \begin{aligned} t_2(x) + \lambda_{11}t_4(x) + \lambda_{12}f_1(x) + \lambda_{13}f_3(x) - \lambda_1 \int_{-a}^x f_2(t) dt &= F_1(x) \\ t_3(x) + \lambda_{21}t_1(x) + \lambda_{22}f_2(x) + \lambda_{23}f_4(x) - \lambda_2 \int_{-a}^x f_3(t) dt &= F_2(x) \\ t_4(x) + \lambda_{31}t_2(x) + \lambda_{32}f_3(x) + \lambda_{33}f_1(x) + \\ + \lambda_3 \int_{-a}^x f_2(t) dt + \lambda_4 \int_{-a}^x f_4(t) dt &= F_3(x) \\ f_3(x) &= -k_2 f_1(x), \quad |x| \leq a < \pi \end{aligned}$$

Здесь

$$(2.7) \quad \begin{aligned} F_1(x) &= \frac{1}{\Lambda_1} [k_0 N_- - u^{\circ'}(x) - k_1 \sigma_y^\circ(x)] \\ F_2(x) &= \frac{\mu_0}{\Lambda_2} \left[v^{\circ'}(x) - \frac{\tau_{xy}^\circ(x)}{\mu_0} - \frac{c_1^-}{2h} \right] \\ F_3(x) &= \frac{1}{l_1^+} \left[\sigma_y^\circ(x) + \frac{c_2^-}{2hk_0} - v_0 N_- \right] \\ \lambda_{11} &= \frac{m_{21}^- - k_1 l_1^+}{\Lambda_1}, \quad \lambda_{12} = \frac{l_2^- + k_1 \Lambda_3}{\Lambda_1}, \quad \lambda_{13} = \frac{k_1 l_1^- + \Lambda_3}{\Lambda_1} \\ \lambda_{21} &= -\frac{m_{12}^+ + \mu_0 l_2^+}{\Lambda_2} \\ \lambda_{22} &= \frac{l_2^- \mu_0 - \Lambda_3}{\Lambda_2}, \quad \lambda_{23} = \frac{l_1^- + \mu_0 \Lambda_3}{\Lambda_2}, \quad \lambda_{31} = -\frac{m_{12}^-}{l_1^+} \\ \lambda_{32} &= -\frac{l_1^-}{l_1^+}, \quad \lambda_{33} = \frac{\Lambda_3}{l_1^+} \\ \lambda_1 &= \frac{k_0}{2h\Lambda_1}, \quad \lambda_2 = -\frac{\mu_0}{2h\Lambda_2}, \quad \lambda_3 = \frac{v_0}{2hl_1^+}, \quad \lambda_4 = -\frac{1}{2hk_0 l_1^+} \\ \Lambda_1 &= l_2^+ + k_1 m_{12}^-, \quad \Lambda_2 = m_{12}^- \mu_0 - l_1^+, \quad \Lambda_3 = m_{21}^+ - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Напряжения на бесконечности и упругие постоянные материалов связаны соотношением (2.8), искомые функции — условиями (2.9)

$$(2.8) \quad \mu_2 B_1 = \mu_1 B_2$$

$$(2.9) \quad \int_{-a}^a f_i(t) dt = A^i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$A^1 = 0, \quad A^2 = 2h(N_+ - N_-), \quad A^3 = c_1^+ - c_1^-, \quad A^4 = c_2^+ - c_2^-$$

Нормальные напряжения на торцах включения N_\pm определяются формулой

$$(2.10) \quad N_\pm = \frac{1}{2} [\eta_1 \sigma_{x1}^\circ(x) + \eta_2 \sigma_{x2}^\circ(x)]|_{x=\pm a}, \quad \eta_i = \left[\frac{\min(\mu_0, \mu_i)}{\mu_i} \right]^{1/2}, \quad i = 1, 2$$

Величины c_1^\pm и c_2^\pm характеризуют перемещение нижнего края торца включения $x = \pm a$ относительно верхнего края того же торца в направ-

лении оси ox и оси oy соответственно и вычисляются по формулам

(2.11)

$$c_1^{\pm} = -2h \left\{ (1 + \nu_0) \tau_{xy}^{\circ}(x) \left[\frac{1}{\max(E_0, E_1)} + \frac{1}{\max(E_0, E_2)} \right] - v^{\circ\prime}(x) \right\} \Big|_{x=\pm a}$$

$$c_2^{\pm} = -h \left[\frac{\sigma_y^{\circ}(x) - \nu_0 \sigma_{x1}^{\circ}(x)}{\max(E_0, E_1)} + \frac{\sigma_y^{\circ}(x) - \nu_0 \sigma_{x2}^{\circ}(x)}{\max(E_0, E_2)} \right] \Big|_{x=\pm a}$$

Вследствие условий слая нормальные и касательные напряжения (за исключением $\sigma_{xi}(x)$), а также производные от перемещений на берегах включений описываются формулами (2.4), где индексы 1 и 2 следует отнести к нижней и верхней кромкам включения соответственно. Среднее нормальное напряжение в поперечном сечении включения σ_x определяется формулой (1.3).

В случае абсолютно жестких включений ($E_0 \rightarrow \infty$) имеем $f_3(x) = f_4(x) = 0$, и система уравнений (2.6) преобразуется в одно уравнение для определения функции $f_1(x) + if_2(x)$

$$(2.12) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a [f_1(t) + if_2(t)] \operatorname{ctg} \left(\frac{t-x}{2} \right) dt + \frac{l_2^-}{l_2^+} [f_1(x) + if_2(x)] =$$

$$= -\frac{1}{l_2^+} [u^{\circ\prime}(x) - iv^{\circ\prime}(x)], \quad |x| \leq a$$

Когда $E_0 = 0$, получаем $f_1(x) = f_2(x) = 0$ и интегральное уравнение периодической задачи для системы разрезов на линии раздела двух плоских сред

$$(2.13) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a [f_3(t) + if_4(t)] \operatorname{ctg} \left(\frac{t-x}{2} \right) dt - \frac{l_1^-}{l_1^+} [f_3(x) + if_4(x)] =$$

$$= \frac{1}{l_1^+} [\sigma_y^{\circ}(x) - i \tau_{xy}^{\circ}(x)], \quad |x| \leq a$$

Если включения имеют пренебрежимо малую изгибную жесткость, то можно априори положить $\sigma_{y1} = \sigma_{y2}$. В системе уравнений (2.6) следует исключить из рассмотрения четвертое уравнение и считать $f_1(x) = 0$. В этом случае при $E_0 \rightarrow \infty$ имеем $f_4(x) = 0$ и уравнение, соответствующее периодической задаче о нерастяжимых нитях, вмонтированных на прямой линии раздела двух материалов

$$(2.14) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^a [f_2(t) + i \Lambda_4 f_3(t)] \operatorname{ctg} \left(\frac{t-x}{2} \right) dt + \frac{l_2^- \Lambda_4}{m_{12}^-} [f_2(x) + i \Lambda_4 f_3(x)] =$$

$$= \frac{\Lambda_4}{m_{12}^-} v^{\circ\prime}(x) + \frac{i}{l_2^+} u^{\circ\prime}(x)$$

$$\Lambda_4 = \sqrt{-\lambda_3 m_{12}^- / l_2^- l_2^+}, \quad |x| \leq a$$

Интегральные уравнения (2.12) — (2.14) имеют одинаковую структуру и решаются в замкнутом виде [10].

3. Пусть полуплоскости имеют одинаковые механические характеристики ($E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$). Тогда в системе уравнений (2.6)

$$(3.1) \quad \lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{22} = \lambda_{23} = \lambda_{32} = \lambda_{33} = 0$$

Воспользовавшись результатами работы [11], где, в частности, решалось интегро-дифференциальное уравнение с ядром Гильберта, решение системы (2.6) в случае (3.1) ищем в виде рядов

$$(3.2) \quad f_i(x) = \sec \frac{x}{2} [2(\cos x - \cos a)]^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^i T_n \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \right)$$

$$i = 1, 2, 3, 4; \quad |x| \leq a$$

коэффициенты которых определяются из бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (3.3), (3.4) и соотношений (3.5)

$$(3.3) \quad \frac{\pi}{2} A_{2k+1+p}^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[r_1 B_{2n+p, 2k+p} + r_2 \sum_{j=0}^{\infty} B_{2n+p, 2j+p} B_{2j+p, 2k+p} \right] A_{2n+1+p}^2 = \Phi_{2k+p}$$

$$(3.4) \quad \frac{\pi}{2} A_{2k+1+p}^3 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+p, 2k+p} A_{2n+1+p}^3 = \Phi_{2k+p}^2, \quad p = 0, 1; \quad k = 0, 1, \dots$$

$$(3.5) \quad A_{2k+1+p}^1 = -\frac{1}{k_2} A_{2k+1+p}^3$$

$$A_{2k+1+p}^4 = \frac{2}{\pi \lambda_{11}} \left[\Phi_{2k+p}^3 - \frac{\pi}{2} A_{2k+1+p}^2 - \lambda_1' \sum_{n=0}^{\infty} B_{2n+p, 2k+p} A_{2n+1+p}^2 \right]$$

Здесь

$$\Phi_l^1 = 2 \sin \frac{a}{2} g_l^1 + C_l^1 A_0^0 + C_l^2 A_0^2, \quad \Phi_l^2 = 2 \sin \frac{a}{2} g_l^2 + C_l^3 A_0^1$$

$$\Phi_l^3 = 2 \sin \frac{a}{2} g_l^3 + C_l^4 A_0^0 + C_l^5 A_0^2$$

$$\Phi_l = \frac{1}{r_3} \left(\lambda_{11} \Phi_l^3 - \Phi_l^1 + \frac{2\lambda_4'}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,l} \Phi_n^1 \right)$$

$$\lambda = \frac{k_2 \lambda_2'}{k_2 - \lambda_{21}}, \quad r_1 = \frac{\lambda_4' - \lambda_1' - \lambda_3' \lambda_{11}}{r_3}, \quad r_2 = \frac{2\lambda_1' \lambda_4'}{\pi r_3}, \quad r_3 = \lambda_{31} \lambda_{11} - 1$$

$$C_l^1 = C_l - \lambda_1' B_{-1,l}, \quad C_l^2 = -\lambda_{11} C_l, \quad C_l^3 = -C_l - \lambda_2' B_{-1,l}$$

$$C_l^4 = \lambda_3' B_{-1,l} - \lambda_{31} C_l$$

$$C_l^5 = \lambda_4' B_{-1,l} - C_l, \quad C_l = \pi \sin \frac{l\pi}{2} \left(\operatorname{tg} \frac{a}{4} \right)^{l+1}, \quad \lambda_i' = 2 \operatorname{tg} \frac{a}{2} \lambda_i$$

$$A_0^i = \frac{1}{\pi} \cos \frac{a}{2} A^i$$

$$g_l^i = \int_{-1}^1 G_i \left[2 \operatorname{arctg} \left(x \operatorname{tg} \frac{a}{2} \right) \right] U_l(x) \sqrt{1-x^2} \left(1 + x^2 \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} \right)^{-1} dx$$

$$G_1(x) = F_1(x) + \frac{\lambda_1'}{2a} A^2, \quad G_2(x) = F_2(x) + \frac{\lambda_2'}{2a} A^3$$

$$G_3(x) = F_3(x) - \frac{1}{2a} (\lambda_3' A^2 + \lambda_4' A^4)$$

$$B_{m-1,l} = -8(l+1) \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j (2j+1) \left(\operatorname{tg} \frac{a}{4} \right)^{2j+1} \times$$

$$\times \left[\sin \frac{(m+l)\pi}{2} \right]^2 [m^2 - (2j-l)^2]^{-1} [m^2 - (2j+l+2)^2]^{-1}$$

$$i = 1, 2, 3, 4; \quad m, l = 0, 1, 2, \dots$$

($T_n(x)$, $U_n(x)$ — полиномы Чебышева первого и второго рода.)

Используя оценки, приведенные в работе [11], можно показать, что системы уравнений (3.3), (3.4) при любых геометрических и физических параметрах задачи по крайней мере квазирегулярны и к их решению вполне применим метод редукции.

Коэффициенты интенсивности напряжений у торцов включения определяются по формулам

$$(3.6) \quad \{k_{-1i}^{\pm}, k_{-2i}^{\pm}, k_{-3i}^{\pm}\} = \lim_{x \rightarrow \pm a \pm 0} \left[\sqrt{\frac{x}{a} - 1} \{\sigma_{yi}(x), \tau_{xyi}(x), \sigma_{xi}(x)\} \right]$$

$$\{k_{+1i}^{\pm}, k_{+2i}^{\pm}, k_{+3i}^{\pm}\} = \lim_{x \rightarrow \pm a \mp 0} \left[\sqrt{1 - \frac{x}{a}} \{\sigma_{yi}(x), \tau_{xyi}(x), \sigma_{xi}(x)\} \right]$$

Используя формулу

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \operatorname{ctg} \left(\frac{t-x}{2} \right) T_k \left(\operatorname{tg} \frac{t}{2} \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \right) \sec \frac{t}{2} [2(\cos t - \cos a)]^{-1} dt =$$

$$= J_{1,k}(x) - \operatorname{sign}(x) T_k \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \right) \sec \frac{x}{2} [2(\cos a - \cos x)]^{-1}$$

$a < |x| \leq \pi, \quad k = 0, 1, \dots$

$$J_{1,0}(x) = \frac{1}{2} \sec \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \quad J_{1,k}(x) = \frac{1}{2} \operatorname{cosec} \frac{a}{2} \left(\sec \frac{x}{2} \right)^2 U_{k-1} \times$$

$$\times \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{ctg} \frac{a}{2} \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

из соотношений (3.6) получим

$$(3.7) \quad k_{-1i}^{\pm} = \mp m_{12}^{-} K_2^{\pm} \pm l_1^{+} K_4^{\pm}, \quad k_{-2i}^{\pm} = \pm m_{12}^{-} K_1^{\pm} \pm l_1^{\pm} K_3^{\pm}$$

$$k_{-3i}^{\pm} = \mp n_{12}^{+} K_2^{\pm} \pm r_{12}^{-} K_4^{\pm}, \quad k_{-32}^{\pm} = \mp n_{21}^{+} K_2^{\pm} \pm r_{21}^{-} K_4^{\pm}$$

$$k_{+11}^{\pm} = m_{12}^{+} K_1^{\pm}, \quad k_{+12}^{\pm} = -m_{21}^{+} K_1^{\pm}, \quad k_{+21}^{\pm} = m_{12}^{+} K_2^{\pm}, \quad k_{+22}^{\pm} = -m_{21}^{+} K_2^{\pm}$$

$$k_{+31}^{\pm} = n_{12}^{-} K_1^{\pm} + r_{12}^{+} K_3^{\pm}, \quad k_{+32}^{\pm} = -n_{21}^{-} K_1^{\pm} - r_{21}^{+} K_3^{\pm}$$

$$K_j^{\pm} = \sec \frac{a}{2} (2a \sin a)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (\pm 1)^n A_n^j, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2, 3, 4$$

В случае симметрии внешней нагрузки относительно осей координат

$$\Phi_l^j = 2 \sin \frac{a}{2} g_l^j, \quad G_j(x) = F_j(x), \quad F_2(x) \equiv 0, \quad j = 1, 2, 3, 4; \quad l = 0, 1, \dots$$

функции $F_1(x), F_3(x)$ — четные, и системы уравнений (3.3), (3.4), а также соотношения (3.5) дают

$$A_k^1 = A_k^3 = A_{2k}^2 = A_{2k}^4 = 0, \quad k = 0, 1, \dots$$

Отсюда, в частности, получаем $f_1(x) = f_3(x) = 0, \quad |x| \leq a$.

Обозначив коэффициенты интенсивности напряжений для случая силовой и геометрической симметрии задачи в виде

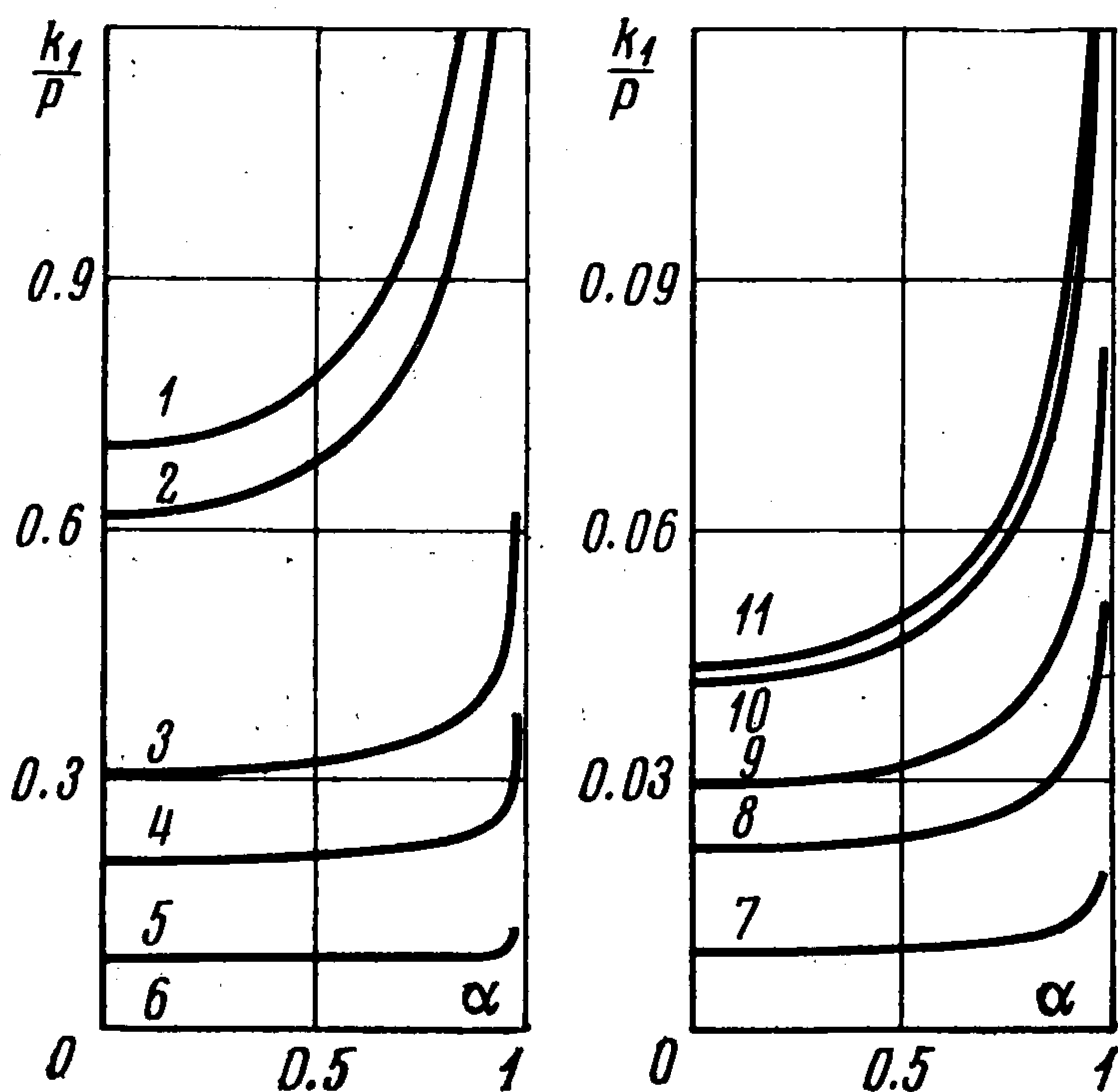
$$k_1 = k_{-1i}^{\pm}, \quad k_2 = \pm k_{+21}^{\pm} = \mp k_{+22}^{\pm}, \quad k_3 = k_{-3i}^{\pm} \quad (k_{+1i}^{\pm} = k_{-2i}^{\pm} = k_{+3i}^{\pm} = 0)$$

из формул (3.7) найдем

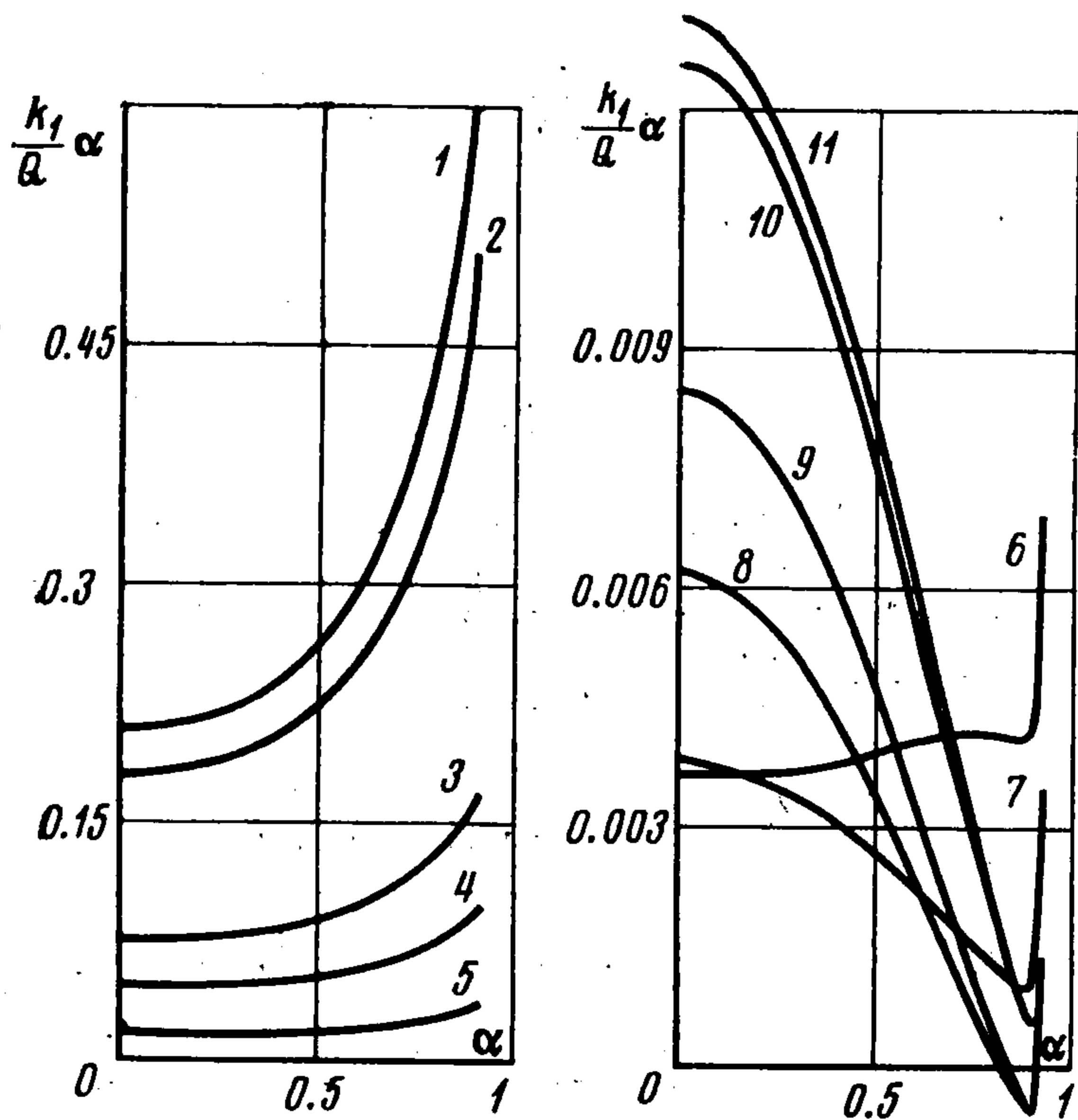
$$k_1 = -m_{12}^{-} K_2 + l_1^{+} K_4, \quad k_2 = m_{12}^{+} K_2, \quad k_3 = -n_{12}^{+} K_2 + r_{12}^{-} K_4$$

$$K_j = \sec \frac{a}{2} (2a \sin a)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n+1}^j, \quad j = 2, 4$$

Коэффициенты A_{2n+1}^j ($j = 2, 4$) находятся из (3.3) и (3.5) при $p = 0$.



Фиг. 2



Фиг. 3

1—11 соответствуют следующим значениям относительной жесткости включений $k = E_0 / E$: 0.001, 0.01, 0.1, 0.2, 0.5, 1, 2, 5, 10, 100, 1 000. Результаты, представленные кривыми 1 и 11, отличаются от решений периодических задач соответственно для разрезов и абсолютно жестких включений не более чем на 1—2%. Когда α близко к нулю, приходим к результатам для одного изолированного включения.

Поступила 15 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Хачикян А. С. Равновесие плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины: Изв. АН АрмССР. Механика, 1970, т. 23, № 3.
2. Сулим Г. Т., Грилицкий Д. В. Напряженное состояние кусочно-однородной плоскости с тонкостенным упругим включением конечной длины. Прикл. механ., 1972, т. 8, вып. 11.
3. Куршин Л. М., Суздальницкий И. Д. Напряжения в плоскости с заполненной щелью. Прикл. механ., 1973, т. 9, вып. 10.

На ЭВМ М-222 проведен численный анализ задачи для двух случаев симметричного нагружения:

1) $\sigma_y^\infty = P$, $\sigma_{xi}^\infty = P_i = 0$ ($i = 1, 2$), сосредоточенные силы и моменты отсутствуют;

2) нагружение осуществляется сосредоточенными силами $\pm iQ$, приложенными в точках $\pm ia + 2n\pi$ соответственно ($n = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$).

Система уравнений (3.3) (при $p = 0$) решалась методом редукции, т. е. в разложении (3.2) учитывалось конечное число членов N , и в результате рассматривалась соответствующая усеченная система линейных алгебраических уравнений. Контроль сходимости проводился двумя способами: путем сравнения функций $f_j^N(x)$ ($j = 2, 4$), вычисленных при $N = M$ и $N = 2M$ соответственно, и путем сравнения точности удовлетворения найденными функциями $f_j^N(x)$ исходной системе интегральных уравнений (2.6) в случае (3.1). В рассмотренных примерах для достижения точности вычислений в 1% оказалось возможным, в зависимости от относительной длины включения $\alpha = a / \pi$, ограничиться решением системы уравнений от 15-го до 50-го порядка.

Вычисления проводились при $a / h = 10$, $\nu_0 = \nu = 1/3$.

Фиг. 2; 3 иллюстрируют зависимость коэффициента интенсивности нормальных напряжений k_1 от относительной длины включения α в случаях 1 и 2 соответственно. Кривые

4. Соткилава О. В., Черепанов Г. П. Некоторые задачи неоднородной теории упругости. ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
5. Хачикян А. С. Плоская задача теории упругости для прямоугольника с тонкостенным включением. Изв. АН АрмССР. Механика, 1971, т. 24, № 4.
6. Грилицкий Д. В., Сулим Г. Т. Периодическая задача для кусочно-однородной упругой плоскости с тонкостенными упругими включениями. Прикл. механ., 1975, т. 11, вып. 1.
7. Чобанян К. С., Хачикян А. С. Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением. Изв. АН АрмССР. Механика, 1967, т. 20, № 6.
8. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., «Наука», 1966.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1971.
10. Чибрикова Л. И. О решении некоторых полных сингулярных интегральных уравнений. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1962, т. 122, кн. 3.
11. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К периодической контактной задаче для полуплоскости с упругими накладками. ПММ, 1974, т. 35, вып. 1.