Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 539.3

О СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ РАСЧЕТАХ ОДНОМЕРНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ

М. Л. Бурышкин

(Одесса)

Исследуются упрощения расчетов статики и малых колебаний регулярных механических конструкций. На основе метода элементарной ячейки показывается, что эти упрощения имеют место для всех регулярных систем, которые представимы как элементарные в смысле некоторого неприводимого представления подгруппы $D_{2h}^{(1)} \subset \subset D_{2h}^{(1)*}$, где $D_{2h}^{(1)*}$ — пространственная группа симметрии соответствующей бесконечной регулярной системы. В общей форме описываются граничные условия таких элементарных систем. Суть упрощений заключается в переходе от расчета регулярной конструкции к расчетам конечного числа элементарных в смысле группы $D_{2h}^{(1)*}$ систем, типы которых указываются. Нагрузка элементарных систем определяется с помощью разработанного эффективного способа разложения нагрузки исходной регулярной системы.

Изучению регулярных механических систем посвящен ряд исследований [1–4] В работе [2] эти исследования связаны с трансляционной симметрией бесконечной регулярной системы, что позволило использовать развитый для приложений аппарат теории представлений групп [5]. Однако самые общие и полные результаты в механике регулярных систем следует ожидать при более совершенном учете элементов симметрии бесконечной регулярной системы, которая обладает пространственной группой $D_{2h}^{(1)}$ симметрии. В частности, в данной работе удается выяснить характер всех граничных условий, обусловливающий распад исследуемой системы уравнений механической задачи, и установить специфические черты такого распада.

1. Рассматривается одномерная бесконечная регулярная механическая система S, группа симметрии $D_{2h}^{(1)}$ которой содержит одномерную подгруппу G_t трансляций с основным вектором $\mathbf{a}$. Элементарная ячейка S_0 ограничивается плоскостями Π и Π' отражений σ и $t_1\sigma$ (через t_r обозначается трансляция на вектор $r\mathbf{a}$). Нетрудно видеть, что $\Pi' = t_{0.5}\Pi$.

Если $\mathbf{u} = a^{-1}\mathbf{a}$, то неприводимые представления τ_α ($\alpha = \mathbf{k}\mathbf{u}$) подгруппы G_t определяются соотношениями

$$\tau_\alpha(t_1) = e^{i\alpha} \tag{1.1}$$

причем любой вектор $\mathbf{k}$ из зоны Бриллюэна представим в виде

$$\mathbf{k} = \alpha\mathbf{u}, \quad -\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi \tag{1.2}$$

Под $\tau_{\alpha\nu}$ понимается ν-е неприводимое представление размерности m_α со звездой $\{\alpha\mathbf{u}\}$.

В зависимости от абсолютной величины скаляра α можно различить три типа неприводимых звезд $\{\alpha\mathbf{u}\}$: а) $\alpha = 0$, б) $|\alpha| = \pi$, в) $0 < |\alpha| < \pi$. Для первых двух типов $m_0 = m_\pi = 1$ и $\tau_{\alpha\nu}(\sigma) = (-1)^{\nu-1}$, тогда как $\tau_{0\nu}(t_1) = -\tau_{\pi\nu}(t_1) = 1$. Звезде типа в) отвечает одно двумерное неприводимое представление, матрицы операторов которого $\tau_{\alpha 1}(g) = \tau_\alpha(g)$,

$\forall g \in D_{2h}^{(1)}$, причем семейства матриц-функций $\tau_\alpha(g)$ скалярного аргумента α определяются следующим образом:

$$\tau_\alpha(t_r) = \begin{Vmatrix} \cos r\alpha & \sin r\alpha \\ -\sin r\alpha & \cos r\alpha \end{Vmatrix}, \quad \tau_\alpha(t_r\sigma) = \begin{Vmatrix} \cos r\alpha & -\sin r\alpha \\ -\sin r\alpha & -\cos r\alpha \end{Vmatrix}$$

Пусть системы S и S_0 располагаются в областях Ω и Ω_0, $x(\Pi) \in \Pi \cap \cap \Omega_0$, а $x(\Pi') \in \Pi' \cap \Omega_0$. В силу ортогональности плоскости Π вектору **a**, построив систему координатных осей из оси с ортом **u** и двух ортогональных к ней осей, можно разбить линейные перемещения любой точки $x \in \in \Omega$ в направлении координатных осей и угловые перемещения относительно них любых площадок на типы симметричных p^+ и кососимметричных p^- факторов относительно плоскости Π по естественному признаку

$$\sigma p^\pm(x) = \pm p^\pm(x) \tag{1.3}$$

где $p(x)$ — значение фактора p в точке $x \in \Omega$.

Далее исследуются m_α систем S_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, m_\alpha$), каждая из которых совпадает с системой S и деформированные состояния которых преобразуются по представлению $\boldsymbol{\tau}_{\alpha\nu}$. Последнее означает, что любая из функций p_μ указанных факторов системы S_μ относится к классу заданных на Ω функций $p_{\alpha\nu\mu}$, каждая из которых удовлетворяет равенству

$$p_{\alpha\nu\mu}(gx) = g\sum_{\rho=1}^{m_\alpha} \tau_{\alpha\nu\rho\mu}(g^{-1})\, p_{\alpha\nu\rho}(x), \quad \forall g \in D_{2h}^{(1)} \tag{1.4}$$

где $\tau_{\alpha\nu\rho\mu}$ — $\rho\mu$-й элемент матрицы $\tau_{\alpha\nu}(g)$ оператора $\boldsymbol{\tau}_{\alpha\nu}(g)$. Если речь идет о вынужденных колебаниях регулярной системы, то здесь и в дальнейшем под функциями факторов деформированного или напряженного состояний понимаются функции их амплитудных значений.

Плоскость $t_r\Pi$ содержит в себе точки $t_r x(\Pi)$ ячейки $t_r S_0$ и точки $t_r\sigma x(\Pi)$ ячейки $t_r\sigma S_0$. На некоторые факторы деформированного состояния в точках $t_r x(\Pi)$ и $t_r\sigma x(\Pi)$ наложено множество C активных относительных связей $C(p)$ вида $p[t_r x(\Pi)] = p[t_r\sigma x(\Pi)]$. Аналогично вводится множество C_1 относительных связей $C_1(p)$ между некоторыми факторами в точках $t_r x(\Pi')$ и $t_{r+1}\sigma x(\Pi')$. Именно для этих факторов в зависимости от их типа удается из выражений (1.4) найти следующие ограничения, накладываемые на их значения в точках, принадлежащих плоскостям отражений:

(1.5)

а) $\alpha = 0, \begin{cases} \nu = 1; \; p_1^-[x(\Pi)] = p_1^-[x(\Pi')] = 0 \\ \nu = 2; \; p_1^+[x(\Pi)] = p_1^+[x(\Pi')] = 0 \end{cases}$

б) $|\alpha| = \pi, \quad \begin{cases} \nu = 1; \; p_1^-[x(\Pi)] = p_1^+[x(\Pi')] = 0 \\ \nu = 2; \; p_1^+[x(\Pi)] = p_1^-[x(\Pi')] = 0 \end{cases}$

в) $0 < |\alpha| < \pi, \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$p_2^+[x(t_r\Pi)] = -p_1^+[x(t_r\Pi)] \operatorname{tg} r\alpha$$

$$p_2^-[x(t_r\Pi)] = p_1^-[x(t_r\Pi)] \operatorname{ctg} r\alpha$$

$$p_2^+[x(t_r\Pi')] = -p_1^+[x(t_r\Pi')] \operatorname{tg} \frac{2r+1}{2}\alpha$$

$$p_2^-[x(t_r\Pi')] = p_1^-[x(t_r\Pi')] \operatorname{ctg} \frac{2r+1}{2}\alpha$$

По отношению к набору ячеек $S_\mu{}^{(0)}$ ($\mu = 1, 2, \ldots, m_\alpha$), каждая из которых совпадает с ячейкой $t_r S_0$, любое условие для фактора p из (1.5) естественно трактовать как некоторую идеальную механическую связь $C_{\alpha\nu}{}^{(r)}(p)$ (в плоскости $t_r\Pi$) или $C_{\alpha\nu 1}^{(r)}(p)$ (в плоскости $t_r\Pi'$), соответствующую при фиксированном r $\alpha\nu$-у неприводимому представлению группы $D_{2h}{}^{(1)}$. Отсутствие в выражениях (1.5) ограничений для одного из типов факторов деформированного состояния следует рассматривать как пассивность подобных связей. Так как каждой связи $C(p)$ из множества C отвечает взаимно однозначно связь $C_{\alpha\nu}{}^{(r)}(p)$ (аналогичное утверждение справедливо для множеств C_1 и $C_{\alpha\nu 1}^{(r)}$, то во множества $C_{\alpha\nu}{}^{(r)}$ и $C_{\alpha\nu 1}{}^{(r)}$, кроме соответствующих подмножеств $C_{\alpha\nu}{}^{(r)}$ и $c_{\alpha\nu 1}$ активных связей, могут входить и пассивные связи. Механическая система, состоящая из m_α ячеек $S_\mu{}^{(0)}$ ($\mu = 1, 2, \ldots, m_\alpha$), на которые наложены множества $C_{\alpha\nu}{}^{(r)}$ и $C_{\alpha\nu 1}{}^{(r)}$ связей, называется r-й элементарной в смысле $\alpha\nu$-го представления и обозначается $S_{\alpha\nu}{}^{(r)}$. Можно показать, что имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если на систему S действует нагрузка $q_{\alpha\nu\mu}$, то деформированное и напряженное состояние ее ячейки $t_r S_0$ совпадает с соответствующим состоянием ячейки $S_\mu{}^{(0)}$ элементарной системы $S_{\alpha\nu}{}^{(r)}$, у которой нагрузка $q_\rho{}^{(0)}$ ячейки $S_\rho{}^{(0)}$ определяется соотношением

$$(1.6) \qquad q_\rho^{(0)}(x) = q_{\alpha\nu\rho}(x), \quad \forall x \in t_r\Omega_0, \quad \rho = 1, 2, \ldots, m_\alpha$$

2. Если конечная механическая система регулярна, то при некоторых граничных условиях может существовать такой способ ее представления в качестве элементарной, при котором система S обладает группой $D_{2h}^{(1)*}$ симметрии с основным вектором $\mathbf{a}^* = \mathbf{a} / n$, где n — число элементарных относительно группы $D_{2h}^{(1)*}$ ячеек, образующих исходную конечную систему. Для обозначения ряда понятий, связанных с группой $D_{2R}^{(1)*}$, в дальнейшем применяется звездочка.

Пусть C^*, $C_1{}^*$, K^*, $K_1{}^*$ — множества активных жестких связей, наложенных на относительные (C^* и $C_1{}^*$) или абсолютные (K^* и $K_1{}^*$) перемещения и повороты смежных ячеек регулярной системы в любом из ее внутренних сечений плоскостями $t_r{}^*\Pi$ и $t_{-r}{}^*\Pi'$ ($r = 1, 2, \ldots$); K' и $K_1{}'$ — множества таких же связей, наложенных на ее абсолютные перемещения и повороты в сечениях Π и Π' (под $t_r{}^*$ понимается трансляция на вектор $r\mathbf{a}^*$). Если система S обладает группой $D_{2h}{}^{(1)*}$ симметрии, то $C = C^*$ и $C_1 = C_1{}^*$. Тогда из сказанного выше вытекает следующее утверждение: конечная регулярная система является элементарной относительно бесконечной системы S с группой $D_{2h}{}^{(1)*}$ симметрии в смысле $\alpha\nu$-го неприводимого представления группы $D_{2h}{}^{(1)}$, если $K' = K^* \bigcup c_{\alpha\nu}{}^{(r)}$ и $K_1{}' = K_1{}^* \bigcup c_{\alpha\nu 1}^{(r)}$, причем $C_{\alpha\nu}^{(r)}$ и $C_{\alpha\nu 1}^{(r)}$ должны соответствовать множествам C^* и $C_1{}^*$.

Значение введенного критерия заключается в том, что удовлетворяющие ему регулярные одномерные системы допускают упомянутые выше упрощения расчетов. В самом деле, вместо таких систем, рассматриваемых как элементарные в смысле $\alpha\nu$-го неприводимого представления группы $D_{2h}{}^{(1)}$, можно исследовать, согласно теореме 1, m_α систем S_μ, функции нагрузки $q_{\alpha\nu\mu}$ которых определяются соотношением (1.6) и выражением (1.4), переписываемым в виде

$$gp_{\alpha\nu\mu} = \sum_{\rho=1}^{m_\alpha} \tau_{\alpha\nu\rho\mu}(g)\, p_{\alpha\nu\rho}, \quad \forall g \in D_{2h}^{(1)} \tag{2.1}$$

используя при этом большую относительно $D_{2h}^{(1)}$ полноту группы $D_{2h}^{(1)*}$ симметрии.

Если под ψ понимать поддающуюся усреднению с помощью вводимого функционала усреднения функцию на группе, то этот функционал может быть определен для групп $D_{2h}^{(1)}$ и G_t обычным способом [5]

$$M_D(\psi) = \frac{1}{2} \lim_{\eta\to\infty} \frac{1}{2\eta+1} \sum_{r=-\eta}^{\eta} [\psi(t_r) + \psi(\sigma t_r)] \tag{2.2}$$

$$M_t(\psi) = \lim_{\eta\to\infty} \frac{1}{2\eta+1} \sum_{r=-\eta}^{\eta} \psi(t_r)$$

Линейное пространство L, натянутое на функции $t_r{}^*p_{\alpha\nu\mu}$ ($\mu = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m_\alpha$; $r = 0, 1, \ldots, n-1$), на основании (2.1) инвариантно относительно всех элементов группы $D^{(1)*}_{2h}$. В L действует представление $\mathbf{T}$ этой группы, для которого

$$T(g^*)p = g^*p, \quad \forall g^* \in D_{2h}^{(1)*}, \quad \forall p \in L \tag{2.3}$$

Операторы $\mathbf{T}(t_r{}^*)$ ($r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) образуют представление $\mathbf{T}_t$ подгруппы G_t в пространстве L.

Пусть (p, f) — некоторое скалярное произведение функций p и f из пространства L, ограниченное для функций $t_r p_{\alpha\nu\mu}$ ($\mu = 1, 2, \ldots, m_\alpha$; $r = 0, 1, 2, \ldots, n-1$). Введем в пространстве L новое скалярное произведение

$$\{p, f\} = M_D{}^* [(g^*p, g^*f)] \tag{2.4}$$

относительно которого представления $\mathbf{T}$ и $\mathbf{T}_t$ являются унитарными и, следовательно, распадаются на неприводимые представления этих групп. В силу ограниченности матричных элементов представлений $\mathbf{T}$, $\mathbf{T}_t$ и неприводимых представлений рассмотренных групп к этим элементам можно применять введенные функционалы усреднения, устанавливая известные свойства ортогональности [5].

Представления $\mathbf{T}$ и $\tau_{\alpha\nu}$ связаны между собой следующим образом:

$$\mathbf{T}(g)\, p_{\alpha\nu\mu} = \tau_{\alpha\nu}(g)\, p_{\alpha\nu\mu}, \quad \forall g \in D_{2h}^{(1)}, \quad \mu = 1, 2, \ldots, m_\alpha \tag{2.5}$$

Существует линейная комбинация p_α функций $p_{\alpha\nu\mu}$ ($\mu = 1, 2, \ldots, m_\alpha$), которая под действием трансляций t_r ($r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) преобразуется в соответствии с вектором αu. Пространство $L_{t\alpha} \subset L$, порожденное функциями $t_r{}^*\, p_\alpha$ ($r = 0, 1, \ldots, n-1$), на основании выражений (1.1), (2.3) и (2.5) инвариантно относительно представления $\mathbf{T}_t$, которое индуцирует в $L_{t\alpha}$ представление $\mathbf{T}_{t\alpha}$ с характером $\chi_{t\alpha}$. Если функции $p_{\alpha\nu\mu}$ ($\mu = 1, 2, \ldots$

..., m_α) не обладают никакими специальными свойствами, то функции $t_r^* p_\alpha$ ($r = 0, 1, \ldots, n-1$) линейно-независимы и

$$\chi_{t\alpha}(t_r^*) = \delta_{r,s\cdot n} n e^{is\alpha}$$

где $\delta_{r,s\cdot n}$ — символ Кронекера, а s — произвольное целое число. Число раз, которое неприводимое представление τ_ε подгруппы G_t^* встречается в представлении $\mathbf{T}_{t\alpha}$

$$(2.6) \qquad m_\varepsilon = M_t^* [\chi_{t\alpha}(t_r^*) e^{-ir\varepsilon}] = \delta_{\varepsilon\beta}$$

причем

$$(2.7) \qquad \beta = n^{-1}(\alpha + j2\pi), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Пусть K_α — множество различных по модулю и удовлетворяющих неравенству (1.2) значений β, определенных из выражения (2.7). Тогда множество $K_{-\alpha}$ состоит из чисел вида $n^{-1}(-\alpha - 2\pi j)$ и содержит число β в том и только в том случае, когда $m_\alpha = 1$. Действительно, если $\alpha + 2\pi j_1 = -\alpha - 2\pi j_2$, то $\alpha = -(j_1 + j_2)\pi$. В силу этого, так как $L = L_{t\alpha} \cup \cup L_{t(-\alpha)}$, множество K_α полностью определяет неприводимые звезды $\{\beta\mathbf{u}\}$, образующие звезду представления T. Кроме того, из (2.6) вытекает, что представление $\tau_{\beta\rho}^*$ группы $D_{2h}^{(1)*}$, индуцируемое представлением $\mathbf{T}$ в линейной оболочке L_β функций p_β^* и σp_β^*, преобразующихся под действием трансляций t_r ($r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) соответственно векторам $\beta\mathbf{u}$ и ($-\beta\mathbf{u}$) неприводимо. Между тем

$$(2.8) \qquad p_\beta^* = \sum_{r=0}^{n-1} e^{-ir\beta} t_r^* p_\alpha, \quad \forall \beta \in K_\alpha$$

так как в связи с равенствами (2.3), (2.5) и (2.7)

$$t_1^* p_\beta^* = \sum_{r=1}^{n-1} e^{i\beta} e^{-ir\beta} t_r^* p_\alpha + e^{-i(n-1)\beta} \tau_{\alpha\nu}(t_1) p_\alpha = e^{i\beta} p_\beta^*$$

и по аналогии

$$(2.9) \qquad \sigma q_\beta^* = \sum_{r=0}^{n-1} e^{ir\beta} t_r^* \sigma p_\alpha, \quad \forall \beta \in K_\alpha$$

В случае, если звезда $\{\beta\mathbf{u}\}$, а следовательно, и звезда $\{\alpha\mathbf{u}\}$ относятся к типам а) или б), выражение (2.9) переписывается в виде

$$\tau_{\beta\rho}^*(\sigma) p_\beta^* = \tau_{\alpha\nu}(\sigma) \sum_{r=0}^{n-1} e^{-r\beta i} t_r^* p_\alpha$$

откуда следует, что $\tau_{\beta\rho}^*(\sigma) = \tau_{\alpha\nu}(\sigma)$.

Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 2. Порожденное функциями $t_r^* p_{\alpha\nu\mu}$ ($\mu = 1, 2, \ldots, m_\alpha$; $r = 0, 1, \ldots, n-1$) пространство L распадается на ортогональные в смысле скалярного произведения (2.4) подпространства L_β, преобразующиеся соответственно по неприводимым представлениям $\tau_{\beta 1}^*$, если $0 < |\beta| < \pi$, и по представлениям $\tau_{\beta\nu}{}^*$ в других случаях, причем вещественные числа β различны по модулю и определяются из выражений (2.7) и (1.1).

3. Если в подпространстве L_β, преобразующемся по представлению $\tau_{\beta\rho}{}^*$, положить $p_{\beta\eta}^* = p_{\beta 1\eta}^*$ при $0 < |\beta| < \pi$ и $p_{\beta\eta}{}^* = \delta_{\eta\rho} p_{\beta\rho_1}^*$ при $\beta = 0$ или $\beta = |\pi|$, то ненулевые из функций $p_{\beta\eta}{}^*$ образуют в нем базис. В случае двумерности представления $\tau_{\beta\rho}{}^*$ для любого $g^* \in D_{2h}^{(1)*}$

$$\mathbf{T}(g)^* P_{\beta\varphi}^* = \sum_{\eta=1}^{2} \tau_{\beta\eta\varphi}^* (g^*) p_{\beta\eta}^*, \quad \varphi = 1, 2$$

$$\mathbf{T}(g^*) p_\beta{}^* = \tau_{\beta 11}{}'(g^*) p_\beta{}^* + \tau_{\beta 21}{}'(g^*) \sigma p_\beta{}^*, \quad \forall \beta \in K_\alpha \tag{3.1}$$

$$\mathbf{T}(g^*) \sigma p_\beta{}^* = \tau_{\beta 12}{}'(g^*) p_\beta{}^* + \tau_{\beta 22}{}'(g^*) \sigma p_\beta{}^*$$

Здесь

$$\tau_\beta{}'(t_r{}^*) = \begin{Vmatrix} e^{ir\beta} & 0 \\ 0 & e^{-ir\beta} \end{Vmatrix}, \quad \tau_\beta{}'(\sigma) = \begin{Vmatrix} 0; & 1 \\ 1; & 0 \end{Vmatrix}$$

$\tau_{\beta\eta\varphi}^*(g^*)$ и $\tau_{\beta\eta\varphi}'(g^*)$ — $\eta\varphi$-е элементы матриц $\tau_\beta{}^*(g^*)$ и $\tau_\beta{}'(g^*)$. Последние матрицы подобны (A — матрица преобразования подобия) и, следовательно, $Ap_\beta{}^* = p_{\beta 1}{}^*$ и $A\sigma p_\beta{}^* = p_{\beta 2}{}^*$.

Через $a_{\varphi\eta}$ и $b_{\varphi\eta}$ ($\varphi, \eta = 1, 2$) обозначаются далее $\varphi\eta$-е элементы матриц A и A^{-1}.

Из изложенного следует

$$p_{\beta\eta}^* = a_{1\eta} p_\beta{}^* + a_{2\eta} \sigma p_\beta{}^*, \quad p_\beta^* = \sum_{\eta=1}^{2} b_{\eta 1} p_{\beta\eta}^*, \quad \sigma p_\beta{}^* = \sum_{\eta=1}^{2} b_{\eta 2} p_{\beta\eta}^* \tag{3.2}$$

Можно непосредственно проверить справедливость выражений (3.1) и (3.2) для одномерных представлений и установить с помощью равенства (2.7), что

$$\tau_\alpha(g) = \tau_\beta{}^*(g) \quad (0 \leqslant |\alpha| \leqslant \pi), \quad \forall g \in D_{2h}^{(1)}, \quad \forall \beta \in K_\alpha \tag{3.3}$$

Это дает возможность, используя формулы (3.1) — (3.3), (2.8), (2.9), (2.2), (2.4) и очевидную унитарность матрицы A, вывести следующие важные соотношения:

$$p_{\beta\eta}^* = a_{1\eta} \sum_{r=0}^{n-1} e^{-ir\beta} t_r{}^* \sum_{\varphi=1}^{2} b_{\varphi 1} p_{\alpha\varphi} + a_{2\eta} \sum_{r=0}^{n-} e^{ir\beta} t_r{}^* \sum_{\varphi=1}^{2} b_{\varphi 2} p_{\alpha\varphi} = \tag{3.4}$$

$$= \sum_{\varphi=1}^{2} \sum_{r=0}^{n-1} \tau_{\beta\eta\varphi}^* (t_r{}^*) t_r{}^* p_{\alpha\varphi} \quad (\eta = 1, 2), \quad \forall \beta \in K_\alpha$$

$$\{p_{\beta\eta}^*, p_{\beta\nu}^*\} = \sum_{\rho=1}^{2} \sum_{\varphi=1}^{2} (p_{\beta\rho}^*, p_{\beta\varphi}^*) M_D{}^* [\tau_{\beta\rho\eta}^*(g^*) \tau_{\beta\varphi\nu}^*(g^*)] = \tag{3.5}$$

$$= \frac{\delta_{\nu\eta}}{m_\beta} \sum_{\rho=1}^{2} (p_{\beta\rho}^*, p_{\beta\rho}^*) \quad (\eta = 1, 2), \quad \forall \beta \in K_\alpha$$

$$\{p_{\beta\eta}^*, p_{\alpha\nu}\} = \sum_{\rho=1}^{2} \sum_{\varphi=1}^{2} \sum_{r=1}^{n-1} (t_r{}^* p_{\beta\rho}, t_r{}^* p_{\alpha\varphi}) \frac{1}{n} M_D [\tau_{\alpha\rho\eta}(g) \tau_{\alpha\varphi\nu}(g)] = \tag{3.6}$$

$$= \frac{\delta_{\eta\nu}}{m_\alpha n} \sum_{\varphi=1}^{2} \sum_{r=0}^{n-1} (t_r{}^* p_{\beta\varphi}^*, t_r{}^* p_{\alpha\varphi}) \quad (\eta = 1, 2), \quad \forall \beta \in K_\alpha$$

так как при $0 < |\alpha| < \pi$ $M_D[\tau_{\alpha\rho\eta}(g)\tau_{\alpha\varphi\nu}(g)] = \delta_{\rho\varphi}\delta_{\nu\eta}\,{}^1/_2$, а при $|\alpha| = \pi$ или $\alpha = 0$, хотя $M_D[\tau_{\alpha\rho\eta}(g)\tau_{\alpha\varphi\nu}(g)] = \delta_{\rho\varphi}\delta_{\eta\nu}\delta_{\varphi\nu}$, но $p_{\alpha\varphi}{}^* = \delta_{\varphi\nu}p_{\alpha\nu}{}^*$.

Выражение (3.6) переписывается в виде

$$(3.7)\qquad \{p^*_{\beta\eta}, p_{\alpha\nu}\} = \frac{\delta_{\eta\nu}}{m_\alpha n}\sum_{\varphi=1}^{2}\sum_{r=0}^{n-1}\left(\sum_{\rho=1}^{2}\tau^*_{\beta\rho\varphi}(t_r{}^*)\,p^*_{\beta\rho},\, t_r p_{\alpha\varphi}\right) =$$

$$= \frac{\delta_{\eta\nu}}{m_\alpha n}\sum_{\rho=1}^{2}(p^*_{\beta\rho}, p^*_{\beta\rho}) \quad (\eta = 1, 2), \quad \forall\beta\in K_\alpha$$

Равенство (3.7) означает, что система ненулевых функций $p_{\beta\eta}{}^*$ из всех подпространств $L_\beta \subset L$ образует ортогональный в смысле скалярного произведения (2.4) базис пространства L. Согласно (3.5) и (3.7)

$$\frac{\{p^*_{\beta\eta}, p_{\alpha\nu}\}}{\{p^*_{\beta\eta}, p^*_{\beta\eta}\}} = \delta_{\eta\nu}\frac{m_\beta}{m_\alpha n} \quad (\eta = 1, 2) \quad \forall\beta\in K_\alpha$$

В связи с этим то обстоятельство, что $p_{\alpha\nu} \in L$, делает очевидным следующее утверждение.

Теорема 3. Функции $p_{\alpha\nu}$ представимы в виде

$$p_{\alpha\nu} = \sum_{\beta\in K_\alpha}\frac{m_\beta}{m_\alpha n}p^*_{\beta\nu}$$

Если m_K — число элементов во множестве K_α, то теоремы 1 и 2, принцип суперпозиции на базе теоремы 3, а также формулы (2.7), и (3.4) позволяют вместо $S_{\alpha\nu}{}^{(r)}$ исследовать m_K однозначно определенных нулевых элементарных (в смысле представлений группы $D_{2h}{}^{(1)*}$) систем $S_{\beta\rho}{}^{(0)}$. Полученные результаты с помощью выражения (1.4) могут быть распространены на линейную систему $S_{\alpha\nu}{}^{(r)}$. В этом и заключается механический смысл упрощений, вносимых в расчеты регулярных систем при ряде граничных условий.

В заключение следует отметить два обстоятельства. Во-первых, все сказанное остается верным и для нагрузок, при которых размерность пространства $L_{t\alpha}$ меньше n. В этом случае функции нагрузок систем $S^{(0)*}_{\beta\rho}$ при некоторых значениях β окажутся, согласно (3.4), тождественно равными нулю. Во-вторых, приведенные теоремы применимы для нахождения спектра собственных частот или критических сил. Как нетрудно видеть, спектр элементарной системы $S_{\alpha\nu}{}^{(r)}$ является объединением соответствующих спектров систем $S^{(0)*}_{\beta\rho}$.

Поступила 15 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бурышкин М. Л.* О частотных уравнениях метода сил для регулярных цепных систем. Прикл. механ., 1970, т. 6, вып. 2.
2. *Бурышкин М. Л.* О свободных колебаниях регулярных цепных систем. Прикл. механ., 1971, т. 7, вып. 8.
3. *Динкевич С. З., Красносельская Н. Б.* Построение матрицы статических и динамических реакций для стержня на упругих опорах и ее использование при расчете циклических и регулярных стержневых систем. В сб.: Исследования по теории сооружений, вып. 18, М., Стройиздат, 1970.
4. *Крейн М. Г.* К теории вибраций многопролетных балок. Вестн. инж. и техн., 1933, № 4.
5. *Любарский Г. Я.* Теория групп и ее применение в физике. М., Физматгиз, 1958.