Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 539.3

СТАТИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ СО СЦЕПЛЕНИЕМ

В. А. Бабешко

(Ростов-на-Дону)

Изучаются системы интегральных уравнений, возникающих в плоских и осесимметричных контактных задачах теории упругости в случае сцепления штампа с телом. Развивается метод, основанный на факторизации матриц-функций специального вида, дается его обоснование. Приводятся приложения метода в статических и динамических задачах. Метод особенно эффективен в динамических контактных задачах о вибрации штампа на поверхности слоистой среды или цилиндра.

Другие методы решения контактных задач со сцеплением предложены в [1–8].

1. Ниже рассматриваются системы интегральных уравнений следующих двух типов:

$$\sum_{n=1}^{2} r_{mn}q_n = f_m(x), \qquad x \in \Omega, \ m = 1, 2 \tag{1.1}$$

$$r_{mn}q_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \int_{\sigma} R_{mn}(u)\, e^{iu(x-\xi)} du\, q_n(\xi)\, d\xi, \quad \Omega \equiv [-a, a] \tag{1.2}$$

$$r_{mn}q_n = \int_{0}^{a} \int_{\sigma_1} R_{mn}(u)\, J_{1-[m/2]}(ux) J_{1-[n/2]}(u\xi)\, u\xi q_n(\xi)\, du\, d\xi, \quad \Omega \equiv [0, a] \tag{1.3}$$

Контур σ в (1.2) при наличии особенностей у функций $R_{mn}(u)$ располагается в соответствии с правилами, установленными в работах [9, 10]. В частности, в статических задачах он совпадает с вещественной осью. Контур σ_1 — часть контура σ, лежащая в правой полуплоскости.

Считаем, что элементы матрицы $\mathbf{R}(u)$ регулярны в области, содержащей контур σ, а на бесконечности обладают асимптотическим поведением

$$R_{mm}(u) = C\, |u|^{-1} [1 + O(u^{-1})]$$
$$R_{mn}(u) = iBu^{-1} [1 + O(u^{-1})]$$
$$C > |B|, \quad \operatorname{Im} B = 0, \quad u \to \pm\infty$$

Будем различать два случая: а) контур σ совпадает с вещественной осью; тогда считаем, что матрица $\mathbf{R}(u)$ положительно-определенная; б) контур σ имеет положение, указанное в работах [9, 10]; в этом случае считаем, что элементы матрицы $\mathbf{R}(u)$ связаны с вещественными на вещественной оси функциями $K_{mn}(u)$ соотношениями

$$R_{mn}(u) = K_{mn}(u), \quad R_{12}(u) = -R_{21}(u) = iK_{12}(u)$$

причем функции $K_{mm}(u)$ — четные, $K_{12}(u)$ — нечетная и все имеют на вещественной оси одни и те же однократные полюсы $\pm\zeta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, p)$.

В условиях а) легко доказывается корректная разрешимость систем (1.1) — (1.3) на подпространстве $\mathring{H}_{-1/2}$ некоторого весового пространства [11], состоящего из функций с носителем на $[-a, a]$ или $[0, a]$. Отметим, что $L_\alpha \subset \mathring{H}_{-1/2}$ $(\alpha > 1)$.

В случае б) доказывается эквивалентность систем на этом подпространстве уравнениям второго рода с вполне непрерывным оператором. Единственность в случае б) автору удалось доказать лишь в L_α и при следующих предположениях:

1) $[K_{11}^{-1}(\zeta_r)]' > 0$

2) $[K_{11}^{-1}(\zeta_r)]'[K_{22}^{-1}(\zeta_r)]' > \{[K_{12}^{-1}(\zeta_r)]'\}^2$

3) существуют в случае системы (1.1), (1.2) рациональные ограниченные на бесконечности функции $\Pi_{nm}(u)$ с полюсами в точках $\pm\zeta_k$ $(k = 1, 2, \ldots$ $\ldots p)$ такие, что на вещественной оси имеют место неравенства

$$K_{11}(u)P_{11}(u) + iK_{12}(u)P_{12}(u) \geqslant 0$$
$$[K_{11}(u)K_{22}(u) - K_{12}^2(u)][P_{11}(u)P_{22}(u) - P_{12}(u)P_{21}(u)] \geqslant 0$$
$$P_{mn}(u) = (-1)^{m+n}\Pi_{nm}(u)[\Pi_{11}(u)\Pi_{22}(u) - \Pi_{12}(u)\Pi_{21}(u)]^{-1}$$

В случае системы (1.1), (1.3) добавляется требование четности и ограниченности функций $\Pi_{mm}(u)$ и u $\Pi_{mn}(u)$, $m \neq n$.

Будем в дальнейшем считать, что сформулированные условия единственности решений в L_α, $\alpha > 1$, имеют место.

2. Важным моментом при построении решений уравнений (1.1) — (1.3) является факторизация матрицы-функции $\mathbf{R}(u)$, т. е. представление ее в виде [12]

$$\mathbf{R}(u) = \mathbf{M}_-^{-1}(u)\mathbf{M}_+(u) \equiv \mathbf{N}_+^{-1}(u)\mathbf{N}_-(u) \tag{2.1}$$

Здесь матрицы $\mathbf{M}_+(u)$, $\mathbf{N}_+(u)$ имеют элементы, регулярные выше контура σ, а определители — отличные от нуля в этой области. Этими же свойствами обладают элементы матриц $\mathbf{M}_-(u)$, $\mathbf{N}_-(u)$ в области ниже контура σ. Факторизацию (2.1) матрицы $\mathbf{R}(u)$ можно осуществить в соответствии с общими теоремами работы [12].

Для построения эффективных приближенных решений систем интегральных уравнений важную роль будет играть приближенная факторизация матриц-функций.

В соответствии с методами работы [13] построим матрицу $\mathbf{R}^\circ(u)$, аппроксимирующую $\mathbf{R}(u)$ таким образом, что каждый элемент на вещественной оси удовлетворяет условиям теоремы работы [13]. Легко показать, что эти условия обеспечивают и близость решений систем уравнений в равномерной с весом метрике. Введем в рассмотрение функционально-коммутативную матрицу $\mathbf{\Phi}(u)$ с элементами $\varphi_{mn}(u)$ вида

$$\varphi_{11} = \varphi_{22} = R_{11}(u), \quad \varphi_{12} = -\varphi_{21} = R_{12}(u) = iK_{12}(u)$$

Известно, что факторизация этих матриц производится по скалярным формулам с помощью функций от матриц и в результате имеют место представления

$$\Phi(u) = \Phi_+(u)\,\Phi_-(u) \equiv \Phi_-(u)\,\Phi_+(u) \tag{2.2}$$

Вид элементов $\varphi_{mn}^{\pm}(u)$ дается соотношениями

$$\begin{aligned} &2\varphi_{mn}^{\pm}(u) = S_{\pm}(u) + T_{\pm}(u) \\ &2\varphi_{12}^{\pm}(u) = -2\varphi_{21}^{\pm}(u) = i\,[S_{\pm}(u) - T_{\pm}(u)] \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь $S_{\pm}$, $T_{\pm}$ получаются в результате факторизации относительно контура σ функций

$$S_+S_- = R_{11} - iR_{12}, \qquad T_+T_- = R_{11} + iR_{12} \tag{2.4}$$

Нетрудно изучить асимптотические свойства элементов матриц $\Phi_{\pm}(u)$. Оказывается, в своих областях регулярности для них справедливы соотношения

$$\begin{aligned} &\sigma^{-1}\varphi_{11}^{\pm} = (\mp iu)^{-\theta_{\pm}} + (\mp iu)^{-\theta_{\mp}} + O(u^{-1}) \\ &\sigma^{-1}\varphi_{12}^{\pm} = (\mp iu)^{-\theta_{\pm}} - (\mp iu)^{-\theta_{\mp}} + O(u^{-1}) \\ &\sigma = \sqrt[4]{C^2 - B^2}, \qquad \theta_{\pm} = {}^1/_2 \pm i\pi^{-1}\,\mathrm{arcth}\, B / C \end{aligned} \tag{2.5}$$

Введем теперь в рассмотрение матрицу

$$\mathbf{H}(u) = \Phi_-^{-1}(u)\,\mathbf{R}(u)\,\Phi_+^{-1}(u) \tag{2.6}$$

Ее элементы имеют вид

$$\begin{aligned} &H_{11}(u) = 1 - {}^1/_4\,\varphi_{12}^-\,[L(u)\varphi_{12}^+ + P(u)\varphi_{11}^+] \\ &H_{22}(u) = 1 + {}^1/_4\,\varphi_{11}^-\,[L(u)\varphi_{11}^+ - P(u)\varphi_{12}^+] \\ &H_{12}(u) = {}^1/_4\,\varphi_{12}^-\,[P(u)\varphi_{12}^+ - L(u)\varphi_{11}^+] \\ &H_{21}(u) = {}^1/_4\,\varphi_{11}^-\,[L(u)\varphi_{12}^+ + P(u)\varphi_{11}^+] \\ &L(u) = (R_{22} - R_{11})[\det \Phi(u)]^{-1} \\ &P(u) = (R_{21} + R_{12})[\det \Phi(u)]^{-1} \end{aligned} \tag{2.7}$$

Их асимптотическое поведение при $|u| \to \infty$ дается соотношениями

$$H_{mm}(u) = 1 + O(u^{-1}), \quad H_{mn}(u) = O(u^{-1}), \quad m \neq n \tag{2.8}$$

Аналитичность элементов матрицы $\mathbf{H}(u)$, а также оценки (2.8) показывают, что она принадлежит распадающейся алгебре, а потому допускает факторизацию [12]

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{H}_-(u)\,\mathbf{H}_+(u) = \mathbf{T}_+(u)\,\mathbf{T}_-(u) \tag{2.9}$$

Принимая во внимание (2.8), на основании (2.9) получаем первую (правостороннюю) факторизацию (2.1) матрицы $\mathbf{R}(u)$. Совершенно аналогично строится и вторая (левосторонняя) факторизация (2.1) матрицы $\mathbf{R}(u)$, для чего в (2.6) достаточно поменять местами Φ_+ и Φ_- и воспользоваться второй формулой (2.9).

Осуществим первую факторизацию (2.9) приближенно. С этой целью представим матрицу $\mathbf{H}(u)$ с помощью комбинации двух матриц $\mathbf{H}_k(u)$ $(k = 1, 2)$ с четными элементами

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{H}_1(u) + u\mathbf{H}_2(u)$$

Элементы матриц $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$ ограничены на бесконечности, а на вещественной оси могут иметь конечное число полюсов и нулей. Пусть $h(u)$ — элемент одной из матриц $\mathbf{H}_k$, который ограничен на бесконечности, а на вещественной оси имеет полюсы $\pm\gamma_k$ $(k = 1, 2, \ldots, \alpha)$ и нули $\pm\delta_k$ $(k = 1, 2, \ldots, \beta)$. Введем в рассмотрение ограниченную на бесконечности функцию $h_0(u)$ вида

$$h_0(u) = h(u)\prod_{k=1}^{\gamma}\frac{u^2-\gamma_k^2}{u^2-\delta_k^2}$$

Здесь $\gamma = \max(\alpha, \beta)$. Если $\alpha > \beta$, то δ_k $(k > \beta)$ — произвольные чисто мнимые числа; это же относится при $\beta > \alpha$ и к γ_k $(k > \alpha)$. Таким образом, $h_0(u)$ — четная, непрерывная на всей оси функция. Аппроксимируем функцию $h_0(u)$ на всей оси рациональной функцией в равномерной метрике. С этой целью отобразим полуось на отрезок $[0, 1]$, положив

$$h_0(u) = h_0\left(\sqrt{\frac{A^2x}{1-x}}\right) \equiv g(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \quad A > 0$$

Непрерывная на $[0, 1]$ функция $g(x)$ с любой степенью точности аппроксимируется полиномами Бернштейна, т. е.

$$g(x) \approx \sum_{s=0}^{N} g\left(\frac{s}{N}\right) C_N^s x^s (1-x)^{N-s} = g_0(x).$$

Таким образом, рациональная функция, аппроксимирующая на всей оси $h_0(u)$, дается соотношением

$$h_0(u) \approx g_0\,[u^2(u^2+A^2)^{-1}]$$

С помощью этого приема строится матрица $\mathbf{G}(u)$ с элементами из рациональных функций, аппроксимирующая матрицу $\mathbf{H}(u)$ на всей оси.

Матрица $\mathbf{G}(u)$ с описанными свойствами, как известно, факторизуется в конечном виде [14]. Окончательно первая приближенная факторизация $\mathbf{R}(u)$ дается соотношением (2.1), в котором

$$\mathbf{M}_-^{-1}(u) \approx \mathbf{\Phi}_-(u)\,\mathbf{G}_-(u), \quad \mathbf{M}_+(u) \approx \mathbf{G}_+(u)\,\mathbf{\Phi}_+(u)$$

Аналогично строится и вторая приближенная аппроксимация (2.1).

3. Построив факторизацию матрицы $\mathbf{R}(u)$, сведем системы интегральных уравнений к уравнениям второго рода и построим их приближенные решения.

С этой целью введем в рассмотрение векторы

$$\mathbf{Q}(u) = \{Q_1(u), Q_2(u)\} \tag{3.1}$$

для случаев уравнений (1.2) и (1.3) соответственно

$$Q_k(u) = \int_{-a}^{a} q_k(x)\,e^{iux}dx \tag{3.2}$$

$$Q_k(u) = \int_{0}^{a} q_k(x)\,xJ_{1-[k/2]}(ux)\,dx \tag{3.3}$$

Обозначим, кроме того

$$\theta_n(\alpha, \beta, a) = \frac{\alpha\beta J_n(\alpha a) H^{(2)}_{n+1}(\beta a) - a\alpha J_{n+1}(\alpha a) H^{(2)}_n(\beta a)}{\alpha^2 - \beta^2}.$$

$\varkappa_k(\alpha, a, n)$ — регулярные в нижней полуплоскости функции, подчиненные в этой области условию при $|\alpha| \to \infty$

$$(3.4) \qquad i\sqrt{a}\varkappa_1 H_n^{(2)}(\alpha a) \to 1, \quad \sqrt{a}\varkappa_2 J_n(\alpha a) \to 1$$

Через $\theta(\alpha, \beta, a)$ и $\varkappa_k(\alpha, a)$ обозначим диагональные матрицы второго порядка с элементами $\theta_1(\alpha, \beta, a)$, $\theta_0(\alpha, \beta, a)$ и $\varkappa_k(\alpha, a, 1)$, $\varkappa_k(\alpha, a, 0)$ соответственно.

Продолжим систему (1.1), (1.2) на всю ось, положив правую часть равной вектору $\varphi_k(x) = \{\varphi_{1k}(x), \varphi_{2k}(x)\}$, причем $k = 1$ при $x > a$, а $k = 2$ при $x < -a$.

Обозначим далее

$$(3.5) \qquad \mathbf{X}(u) = -\mathbf{M}_-(u)\, e^{-iu2a} \int_{-\infty}^{-a} \varphi_1(x)\, e^{-iu(x+a)} dx$$

$$\mathbf{Y}(-u) = -\mathbf{N}_+(u)\, e^{iu2a} \int_{a}^{\infty} \varphi_2(x)\, e^{iu(x-a)} dx$$

$$\mathbf{F}(u) = \int_{-a}^{a} \mathbf{f}(x)\, e^{iux} dx, \qquad \mathbf{f} = \{f_1, f_2\}$$

Применим к продолженной системе (1.1), (1.2) преобразование Фурье (обобщенное, если $\varphi_k(x)$ не убывают). Тогда придем к справедливому на контуре σ соотношению

$$(3.6) \qquad \mathbf{K}(u)\,\mathbf{Q}(u) = \mathbf{F}(u) - \mathbf{M}_-^{-1}(u)\, e^{-2aiu}\mathbf{X}(u) - \mathbf{N}_+^{-1}(u)\, e^{2aiu}\mathbf{Y}(-u)$$

Повторяя теперь известный прием, изложенный в одномерном случае, например в [15], приходим к следующей системе уравнений второго рода для определения $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$:

$$(3.7) \qquad \mathbf{X}(u) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \mathbf{M}_-(-\alpha)\,[\mathbf{N}_+^{-1}(-\alpha)\, e^{-2ai\alpha}\mathbf{Y}(\alpha) + e^{-ai\alpha}\mathbf{F}(-\alpha)]\,\frac{d\alpha}{\alpha+u}$$

$$\mathbf{Y}(u) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \mathbf{N}_+(\alpha)\,[\mathbf{M}_-^{-1}(\alpha)\, e^{-2ai\alpha}\mathbf{X}(\alpha) + e^{-ai\alpha}\mathbf{F}(\alpha)]\,\frac{d\alpha}{\alpha+u}$$

Если $\mathbf{f}(x) \in c_2(-a, a)$, то, как нетрудно установить, $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ регулярны в области ниже контура σ, включая сам контур, и убывают там с весом u^γ, $\gamma < 1$.

Определив из (3.7) вектор-функции $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, найдем затем $\mathbf{Q}$ из (3.6), а вместе с ним с учетом (3.2) также $q_k(x)$. Для системы (3.7) в указанном классе имеет место в силу эквивалентности системе (1.1), (1.2) единственность. Поскольку интегральные операторы вполне непрерывны в пространстве функций, непрерывных на контуре σ с весом, что легко проверяется, то система (3.7) разрешима.

Повторяя те же рассуждения и в случае системы (1.1), (1.3), случай б), и применив к первому и второму уравнениям преобразования Бесселя соответственно первого и нулевого порядков, придем к векторному соотношению на контуре σ вида:

$$\mathbf{K}(u)\,\mathbf{Q}(u)=\mathbf{F}(u)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma}\mathbf{\Theta}(u,\beta,a)\,\mathbf{N}_{+}^{-1}(\beta)\,\varkappa_1(\beta,\alpha)\,\mathbf{Z}(\beta)\,d\beta \tag{3.8}$$

$$\mathbf{F}(u)=\{F_1,F_2\},\qquad F_k=\int\limits_0^a f_k(r)\,rJ_{1-[k/2]}(ur)\,dr$$

Применяя к (3.8) те же приемы, что и при сведении соотношения (3.6) к системе (3.7), с использованием (3.4), получим для определения $\mathbf{Z}$ следующее уравнение второго рода:

$$\mathbf{Z}(u)=\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_{\Gamma_2}\mathbf{N}_{+}(\alpha)\,[\mathbf{C}(\alpha,\beta)\,\mathbf{N}_{+}^{-1}(\beta)\,\mathbf{Z}(\beta)+\varkappa_2(\alpha,a)\,\mathbf{F}(\alpha)\,2\alpha]\times \tag{3.9}$$

$$\times\frac{d\beta\,d\alpha}{(\alpha-u)(\alpha^2-\beta^2)}$$

$$\mathbf{C}(\alpha,\beta)=(\alpha+\beta)\,\mathbf{I}-\mathbf{\Theta}(\alpha,\beta,a)\,\varkappa_1(\beta,a)\,\varkappa_2(\alpha,a)\,(\alpha^2-\beta^2) \tag{3.10}$$

$$u>\Gamma_1>\Gamma_2$$

Контуры Γ_1, Γ_2 расположены в области регулярности матрицы-функции $\mathbf{R}(u)$. Смысл неравенств (3.10) разъясняется в работе [16]. Уравнение (3.9) несложными преобразованиями также приводится к уравнению с вполне непрерывным оператором в том же пространстве, что и $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, и аналогичным путем доказывается его однозначная разрешимость для $\mathbf{f}(r)\in C_2$. Форма (3.9) удобна для построения приближенного решения.

4. Для построения приближенных решений систем интегральных уравнений (1.1) осуществим приближенную факторизацию функций (2.4). С этой целью применим аппроксимации, аналогичные использованным в работе [17]. Именно, для построения первой факторизации (2.4) положим

$$h_k(u)=(R_{11}-iR_{12})D_{+}^{-1}(u,k)D_{-}^{-1}(u,k)=h_{k1}(u)+ \tag{4.1}$$
$$+uh_{k2}(u)=1+O(u^{-1}),\quad k=1,2$$

$$D_{+}(u,1)=\sigma(b-iu)^{-\theta_{+}},\quad D_{-}(u,1)=\sigma(b+iu)^{-\theta_{-}},\qquad b>0 \tag{4.2}$$
$$D_{+}(u,2)=\sigma^2\beta^{-1}\Gamma(g_2/\beta-iu/\beta)\Gamma^{-1}(b_2/\beta-iu/\beta)$$

$$D_{-}(u,2)=\sigma^2\beta^{-1}\Gamma(g_1/\beta-iu/\beta)\Gamma^{-1}(b_1/\beta-iu/\beta) \tag{4.3}$$
$$b_1-g_1={}^1/_2\,\beta\pi^{-1}(\pi+i\ln\lambda)$$
$$b_2-g_2={}^1/_2\,\beta\pi^{-1}(\pi-i\ln\lambda),\qquad \lambda=(C+B)(C-B)^{-1}$$

Здесь функции $h_{ks}(u)$ — четные, которые с помощью приема, изложенного в 2, могут быть аппроксимированы рациональными функциями. Таким образом, функция $h_k(u)$, аппроксимированная рациональной, легко факторизуется, а вместей с ней с учетом (4.2), (4.3) легко строится первая приближенная факторизация (2.4). Отсюда

$$S_{+}\approx D_{+}(u,k)h_k^{+}(u),\qquad S_{-}\approx D_{-}(u,k)h_k^{-}(u)$$
$$h_k(u)\approx h_k^{+}(u)h_k^{-}(u)$$

где $h_k^{\pm}(u)$ — рациональные, ограниченные на бесконечности функции.

Применяя далее для факторизации матрицы-функции $\mathbf{R}(u)$ приемы, изложенные в 2, убеждаемся, что элементы матриц $\mathbf{R}_{\pm}(u)$ являются комбинациями функций $D_{\pm}(u, k)$, умноженных на рациональные.

Это обстоятельство позволяет для получения приближенных решений уравнений (3.7), (3.9) применять прием, связанный с деформацией контуров в нижнюю полуплоскость. Если при деформации контур пересекает полюсы подынтегральных функций, то в правых частях соотношений (3.7), (3.9) появляются вычеты, а интегралы по деформированным в нижнюю полуплоскость контурам убывают. Последними при построении приближенных решений можно пренебрегать при достаточной их малости. В результате, так же как и в одномерном случае [15], построение приближенных решений уравнений (3.7), (3.9) сводится к решению конечной системы линейных алгебраических уравнений. Отметим, что поскольку при использовании аппроксимирующих функций $D_{\pm}(u, 1)$ встречаются точки ветвления $\pm ib$, то для деформации контуров в нижнюю полуплоскость на достаточное расстояние необходимо число b выбирать по возможности большим.

Так же, как и в работе [18], для описания решения в окрестности краев штампов целесообразно использовать аппроксимацию (4.2), а для внутренней области — соответственно (4.3).

Опуская выкладки, приведем общий вид приближенных решений интегральных уравнений (1.1) — (1.3) во внутренней области и в окрестности краев.

В случае (1.2) имеем

$$q_k(x) = \sum_{r=1}^{N} [c_{rk}e^{iz_r(k)(a-x)} + d_{rk}e^{i\zeta_r(k)(a+x)}], \quad x \in (-a, a)$$

$$q_k(x) = c(a \mp x)^{-\theta_k^{\pm}}, \quad x \to \pm a$$

В случае (1.3)

$$q_k(x) = \sum_{r=1}^{N} s_{rk} I_{1-[k/2]}[z_r(k)x], \quad x \in [0, a)$$

$$q_k(x) = s(a - x)^{-\theta_+}, \quad x \to a$$

Здесь $z_r(k)$ — полюсы элементов матрицы $\mathbf{N}_-^{-1}(u)$ соответственно верхней строки при $k = 1$ и нижней при $k = 2$. Так же взаимосвязаны $\zeta_r(k)$ и матрица $\mathbf{M}_+^{-1}(u)$.

В качестве примеров приведем матрицы-функции $\mathbf{R}(u)$, встречающиеся в задачах о действии штампов на упругий слой в динамических и статических случаях.

Задача и вибрации штампа, без трения лежащего на жестком основании

$$R_{11} = -{}^1/_2\, \varkappa_2^2\sigma_2 \operatorname{ch}\sigma_1 \operatorname{ch}\sigma_2 \Delta^{-1}(u)$$

$$R_{22} = -{}^1/_2\, \varkappa_2^2\sigma_1 \operatorname{sh}\sigma_1 \operatorname{sh}\sigma_2 \Delta^{-1}(u)$$

$$R_{12} = -R_{21} = i\,[(u^2 - {}^1/_2\, \varkappa_2^2)\operatorname{sh}\sigma_2 \operatorname{ch}\sigma_1 -$$
$$- \sigma_1\sigma_2 \operatorname{sh}\sigma_1 \operatorname{ch}\sigma_2]\Delta^{-1}(u)$$

$$\Delta(u) = (u^2 - {}^1/_2\varkappa_2^2)^2 \operatorname{ch}\sigma_1 \operatorname{sh}\sigma_2 - u^2\sigma_1\sigma_2 \operatorname{sh}\sigma_1 \operatorname{ch}\sigma_2$$

$$\sigma_k = \sqrt{u^2 - \varkappa_k^2}, \quad \varkappa_1^2 = \rho\omega^2h^2(\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad \varkappa_2^2 = \rho\omega^2h^2\mu^{-1}$$

ρ, λ, μ — соответственно плотность материала слоя и коэффициенты Ламэ, h — толщина слоя, ω — частота колебания штампа.

Видно, что матрица $\mathbf{R}$ относится к случаю б). К системам с аналогичными матрицами приводятся задачи о вибрации штампов, сцепленных со слоистой средой и упругими цилиндрами.

Случай а) имеет место в статическом варианте ($\omega = 0$) рассмотренной задачи, в задачах о жестком сцеплении штампов с упругим клином, в задачах гидродинамики о вибрации пластин на поверхности вязкой жидкости.

Результаты работы докладывались на XIII Международном Конгрессе по теоретической и прикладной механике в Москве.

Автор благодарит И. И. Воровича за внимание к работе, ценные советы и обсуждение результатов.

Поступила 20 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моссаковский В. И.* Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.
2. *Уфлянд Я. С.* Контактная задача теории упругости для кругового в плане штампа при наличии сцепления. ПММ, 1956, т. 20, вып. 5.
3. *Попов Г. Я.* К решению плоской контактной задачи теории упругости при наличии сил сцепления или трения. Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. наук, 1963, т. 16, № 2.
4. *Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х., Бабловн А. А.* О симметричном давлении круглого штампа на упругое полупространство при наличии сцепления. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
5. *Мхитарян С. М.* О некоторых плоских контактных задачах теории упругости с учетом сил сцепления и связанных с ними интегральных и дифференциальных уравнениях. Изв. АН АрмССР. Механика, 1968, т. 21, № 5—6.
6. *Александров В. М.* О плоских контактных задачах теории упругости при наличии сцепления или трения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
7. *Соловьев А. С.* Об одном интегральном уравнении и его приложениях к контактным задачам теории упругости с учетом сил трения и сцепления. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
8. *Тен В. П.* Осесимметричная динамическая контактная задача для вязкоупругого полупространства при наличии сцепления под штампом. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
9. *Бабешко В. А.* Об единственности решений интегральных уравнений динамических контактных задач. Докл АН СССР, 1973, т. 210, № 6.
10. *Бабешко В. А.* Об условиях излучения для упругого слоя. Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 3.
11. *Волевич Л. Я., Панеях В. П.* Некоторые пространства обобщенных функций и теоремы вложения. Успехи матем. наук, 1965, т. 20, вып. 1.
12. *Гохберг И. Ц., Фельдман Н. А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. М., «Наука», 1971.
13. *Бабешко В. А.* Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
14. *Векуа Н. П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М., «Наука», 1970.
15. *Нобл Б.* Метод Винера — Хопфа. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
16. *Бабешко В. А.* Асимптотические свойства решений некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. Докл. АН СССР, 1970, т. 193, № 3.
17. *Бабешко В. А.* Об одном эффективном методе решения некоторых интегральных уравнений теории упругости математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.
18. *Бабешко В. А., Гарагуля В. А.* Асимптотическое решение задачи о действии штампа, круглого в плане, на упругий слой. Изв. АН СССР, МТТ, 1971, № 1.