

**ДИФФУЗИЯ К ЧАСТИЦЕ В ОДНОРОДНОМ  
ПОСТУПАТЕЛЬНО-СДВИГОВОМ ПОТОКЕ**

Ю. П. Гупало, Ю. С. Рязанцев, В. И. Улин

(Москва)

Рассматривается задача об установившейся конвективной диффузии вещества, растворенного в потоке несжимаемой жидкости, к поверхности частицы, движущейся с постоянной скоростью в поле сдвигового течения. Предполагается, что обтекание частицы безынерционно и что на ее поверхности происходит полное поглощение растворенного компонента. В приближении диффузионного пограничного слоя определено поле концентрации и получены выражения для полного диффузионного потока вещества на поверхность сферической твердой частицы и капли (пузыря).

1. Поле течения. В прямоугольной декартовой системе координат, связанной с центром движущейся сферической частицы (капли), поле скоростей невозмущенного (на больших расстояниях от частицы) поступательно-сдвигового потока может быть представлено в виде

$$(1.1) \quad \mathbf{v} = \{v_x, v_y, v_z\} = \{-\alpha x, -\alpha y, U + 2\alpha z\}$$

Здесь  $U$  — скорость невозмущенного поступательного движения жидкости,  $\alpha$  — интенсивность сдвигового движения, которая может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Будем считать, что выполняются условия безынерционного (стоксова) обтекания, т. е.

$$(1.2) \quad R = Ua / \nu \ll 1, \quad R_\alpha = |\alpha| a^2 / \nu \ll 1$$

( $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости потока,  $a$  — радиус частицы). В стоксовом приближении распределение скоростей в жидкости при обтекании частицы потоком (1.1) представляет собой суперпозицию полей скоростей, соответствующих обтеканию частицы однородным поступательным и однородным сдвиговым потоками.

Для описания распределения скоростей воспользуемся формулами (см., например, [1, 2])

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \psi(r, \theta) &= \psi_U(r, \theta) + \psi_\alpha(r, \theta) \\ \psi_U(r, \theta) &= \frac{aU}{4} (r - a) \left( 2 \frac{r}{a} - M_2 - M_2 \frac{a}{r} \right) \sin^2 \theta \\ \psi_\alpha(r, \theta) &= \alpha a^3 \left( \frac{r^3}{a^3} - \frac{5}{2} M_1 + \frac{3}{2} M_2 \frac{a^2}{r^2} \right) \sin^2 \theta \cos \theta \\ M_1 &= \frac{\beta + 2/5}{\beta + 1}, \quad M_2 = \frac{\beta}{\beta + 1} \\ \left( v_r = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad v_\theta = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

При записи (1.3) использована сферическая система координат, связанная с центром частицы (капли), в которой угол  $\theta$  отсчитывается от направления скорости поступательного потока,  $\beta$  — отношение динамических вязкостей капли и окружающей жидкости (случаю твердой частицы соответствует  $|\beta \rightarrow \infty$ ). В случае капли дополнительно предполагается, что числа Вебера достаточно велики (капля остается сферической) и что в системе отсутствуют поверхностно-активные вещества.

В качестве примера течения типа (1.1) укажем на поле обтекания частицы, движущейся в конфузоре (диффузоре) в условиях конического сходящегося (расходящегося) потока.

Действительно, в пренебрежении влиянием стенок течение вдали от частицы, движущейся со скоростью  $U_p$  вдоль оси конического конфузора (диффузора), описывается суперпозицией поступательного потока со скоростью  $-U_p$  и поля стока (источника), расположенного в вершине конуса. В системе координат, связанной с центром частицы, потенциал этого течения

$$\varphi_{\infty} = -U_p r \cos \theta + \frac{v_0 r_0^2}{r_{OM}}$$

$$r_{OM} = (r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos \theta)^{1/2}, \quad v_0 = \frac{q_0}{2\pi r_0^2 (1 - \cos \gamma)}$$

Здесь  $r_0$  — расстояние от центра частицы до вершины конуса,  $2\gamma$  — угол раствора стенок,  $q_0$  — расход жидкости. Разлагая величину  $1/r_{OM}$  в ряд по степеням отношения  $r/r_0$  и ограничиваясь членами второго порядка, получим, опуская несущественную постоянную

$$\varphi_{\infty} = (v_0 - U_p) r \cos \theta + \frac{v_0}{r_0} r^2 \frac{3\cos^2 \theta - 1}{2}$$

Этот потенциал соответствует полю течения (1.1), если положить  $v_0 - U_p = U$ ,  $v_0/r_0 = \alpha$ .

**2. Постановка задачи о диффузии.** Предполагается, что в жидкости содержится растворенное вещество, которое полностью поглощается на поверхности частицы. Для большинства капельных жидкостей числа Шмидта велики, поэтому наряду с условиями (1.2) для чисел Рейнольдса оказываются выполненными следующие условия для чисел Пекле ( $D$  — коэффициент диффузии):

$$P = Ua/D \gg 1, \quad P_{\alpha} = |\alpha| a/D \gg 1$$

Следовательно, при определении диффузионного притока вещества на поверхность частицы можно использовать приближение диффузионного пограничного слоя и записать уравнение конвективной диффузии в виде

$$(2.1) \quad v_r \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{v_{\theta}}{r} \frac{\partial c}{\partial \theta} = D \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c}{\partial r} \right)$$

Здесь  $c$  — концентрация, компоненты скорости  $v_r$ ,  $v_{\theta}$ , определяются формулами (1.2).

Переходя от переменных  $r$ ,  $\theta$  к переменным  $\psi$ ,  $\theta$ , вместо (2.1) получим

$$(2.2) \quad \frac{\partial c}{\partial \theta} = -D \sin \theta \frac{\partial}{\partial \psi} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial c}{\partial \psi} \right)$$

В уравнение (2.2) входит произведение  $r^2 \partial \psi / \partial r$ , которое необходимо представить в виде функции от  $\psi$ ,  $\theta$ . В приближении диффузионного пограничного слоя это произведение рассматривается в области  $r - a \ll a$ . Здесь главные члены разложений в ряд по степеням  $r - a$  функций тока  $\psi_s$  и  $\psi_f$  соответственно для твердой частицы ( $\beta \rightarrow \infty$ ) и для капли ( $\beta \ll P^{1/2}$ ) можно представить согласно (1.3) в виде

$$(2.3) \quad \psi_s = \frac{3}{4} U (r - a)^2 (1 + \omega_s \cos \theta) \sin^2 \theta, \quad \omega_s = 10 \frac{\alpha a}{U}$$

$$(2.4) \quad \psi_f = \frac{1}{2} \frac{aU}{\beta + 1} (r - a) (1 + \omega_f \cos \theta) \sin^2 \theta, \quad \omega_f = 6 \frac{\alpha a}{U}$$

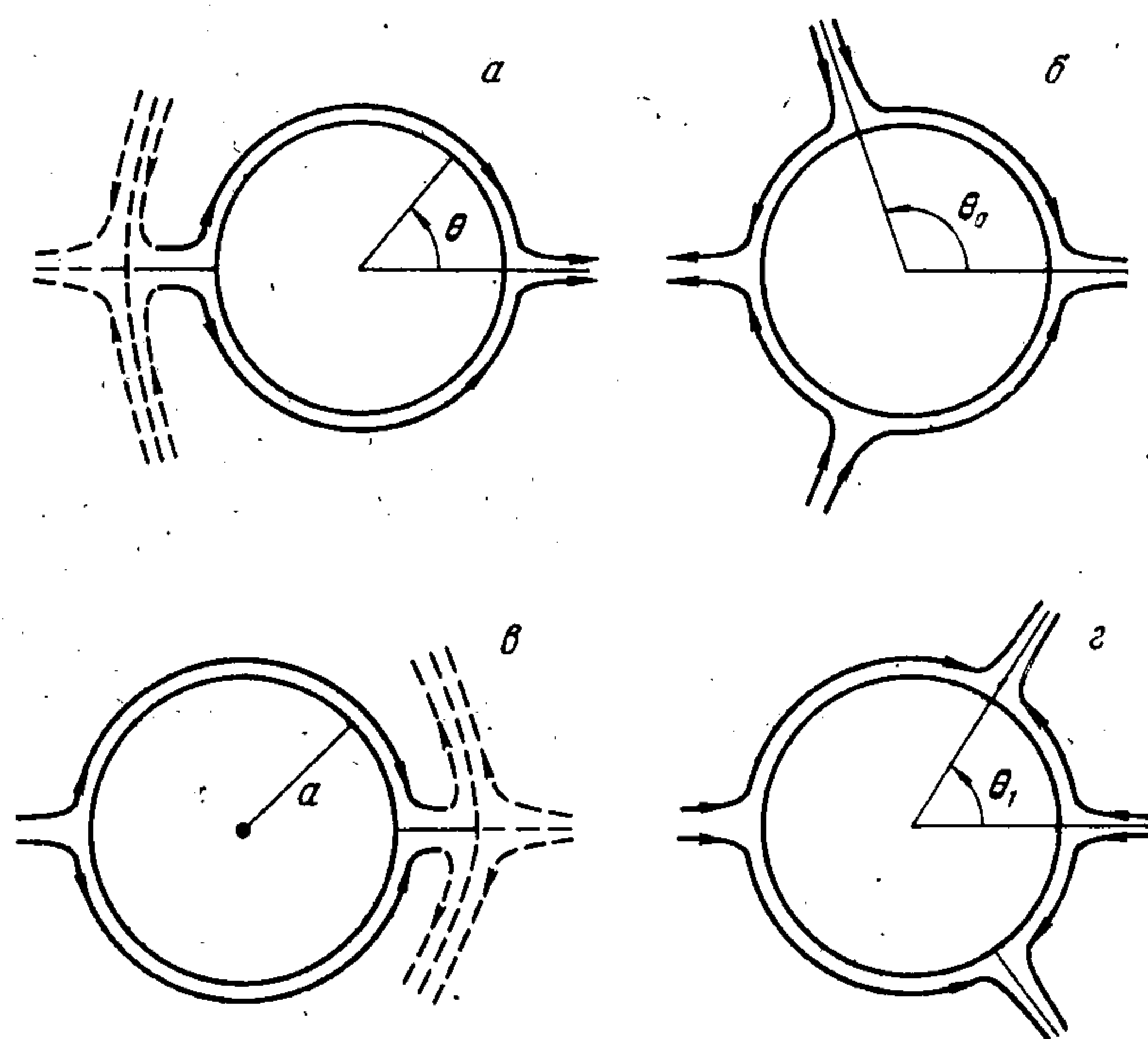
Подчеркнем, что при  $\beta \rightarrow 0$  формула (2.4) и следующие из нее не дают предельного перехода к случаю частицы.

При определении диффузионного потока уравнение (2.2) должно быть дополнено граничными условиями, которые в рассматриваемом случае имеют вид

$$(2.5) \quad \psi \rightarrow \pm \infty, \quad c \rightarrow c_0; \quad \psi = 0, \quad c = 0; \quad \theta = \theta_0, \quad c = c_0$$

Здесь  $c_0$  — концентрация растворенного вещества вдали от частицы,  $\theta_0$  — угол, определяющий положение точек, в которых происходит зарождение диффузионного пограничного слоя на поверхности частицы.

Первое условие (2.5) выражает постоянство концентрации вне диффузионного пограничного слоя, второе соответствует предположению о полном поглощении растворенного вещества на поверхности частицы. Третье условие связано с использованием приближения диффузионного пограничного слоя и выражает равенство концентрации величине  $c_0$  на линиях тока, приходящих из бесконечности и заканчивающихся в точках зарождения пограничного слоя.



Фиг. 1

Из вида функции тока обтекания твердой частицы (2.3) следует, что форма пограничного слоя и угол  $\theta_0$  зависят от величины и знака параметра  $\omega_s$ , характеризующего относительную интенсивность сдвигового и поступательного движений. Возможны четыре различных типа обтекания, которые схематически показаны на фиг. 1, где случаи  $a - г$  соответствуют следующим значениям параметра  $\omega_s$  и угла  $\theta_0$ :

а)  $0 \leq \omega_s \leq 1, \quad \theta_0 = \pi$

б)  $\omega_s \geq 1, \quad \theta_0 = \arccos\left(-\frac{1}{\omega_s}\right)$

в)  $-1 \leq \omega_s \leq 0, \quad \theta_0 = \pi$

г)  $\omega_s \leq -1, \quad \theta_0 = \begin{cases} \theta, & 0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ \pi, & \theta_1 < \theta \leq \pi \end{cases}, \quad \theta_1 = \arccos\left(-\frac{1}{\omega_s}\right)$

Аналогичные случаи обтекания имеют место и для капли (в соответствующих выражениях фигурирует величина  $\omega_f$  вместо  $\omega_s$ ).

3. Диффузия к твердой частице. В общем случае задача (2.2), (2.3), (2.5) может быть представлена в виде

$$(3.1) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial |\psi_s|} \left( |\psi_s|^{1/2} \frac{\partial c}{\partial |\psi_s|} \right)$$

$$t = t(\theta, \omega_s) = \text{sign } \psi_s D a^2 (3U)^{1/2} \int_{\theta}^{\theta_0} \sin^2 x |1 + \omega_s \cos x|^{1/2} dx$$

$$|\psi_s| \rightarrow \infty, c \rightarrow c_0; \quad \psi_s = 0, c = 0; \quad t = 0, c = c_0$$

Решение задачи (3.1) имеет вид

$$(3.2) \quad c = c_0 \left( \frac{4}{9} \right)^{1/3} \Gamma^{-1} \left( \frac{4}{3} \right) \int_0^z \exp \left( -\frac{4}{9} \eta^3 \right) d\eta, \quad z = \frac{|\psi_s|^{1/2}}{t^{1/3}}$$

Формула (3.2) дает возможность определить дифференциальный и интегральный потоки вещества на поверхность частицы

$$(3.3) \quad j(\theta) = D \left( \frac{\partial c}{\partial r} \right)_{r=a} = D \left( \frac{\partial c}{\partial |\psi_s|} \frac{\partial |\psi_s|}{\partial r} \right) \Big|_{\psi_s=0}$$

$$I = 2\pi a^2 \oint j(\theta) \sin \theta d\theta$$

Рассмотрим указанные выше четыре случая отдельно.

а)  $0 \leq \omega_s \leq 1$ ,  $\psi > 0$ ,  $\theta_0 = \pi$ . Для локального диффузионного потока на поверхность частицы получим

$$(3.4) \quad j(\theta) = j^0 (\omega_s + 1)^{-1/3} \frac{\sin \theta (1 + \omega_s \cos \theta)^{1/2}}{[A(\pi, p) - A(\theta, p)]^{1/3}}$$

$$j^0 = \frac{c_0}{6^{1/3} \Gamma(4/3)} \left( \frac{UD^2}{a^2} \right)^{1/3}, \quad p^2 = \frac{2\omega_s}{\omega_s + 1}$$

$$A(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sin^2 x \left( 1 - k^2 \sin^2 \frac{x}{2} \right)^{1/2} dx = \frac{8}{15} \left( 1 - 3 \cos \varphi - \frac{2}{k^2} \right) \times$$

$$\times \sin \varphi \left( 1 - k^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{1/2} - \frac{8}{15} \frac{(1 - k^2)(2 - k^2)}{k^4} F \left( \frac{\varphi}{2}, k \right) +$$

$$+ \frac{16}{15} \frac{k^4 - k^2 + 1}{k^4} E \left( \frac{\varphi}{2}, k \right)$$

Здесь  $F(\varphi/2, k)$  и  $E(\varphi/2, k)$  — эллиптические интегралы первого и второго рода.

Для полного потока с учетом (3.4) по формуле (3.3) получим

$$(3.5) \quad I(\omega_s) = I^0 (\omega_s + 1)^{1/3} [A(\pi, p)]^{2/3}, \quad I^0 = 3\pi a^2 j^0$$

б)  $\omega_s \geq 1$ ,  $\theta_0 = \arccos(-1/\omega_s)$ . В этом случае распределение диффузионного потока по поверхности сферы имеет различный вид на лобовой ( $\theta_0 \leq \theta < \pi$ ) и кормовой ( $0 < \theta \leq \theta_0$ ) частях сферы. Используя соотношение

$$A(\varphi, k) = \frac{1}{k^3} A \left( 2 \arcsin \left( k \sin \frac{\varphi}{2} \right), \frac{1}{k} \right)$$

получим

$$(3.6) \quad j(\theta) = j^{\circ} \frac{(2\omega_s)^{1/2}}{(\omega_s - 1)^{2/3}} \frac{\sin \theta |1 + \omega_s \cos \theta|^{1/2}}{\left[ A(\pi, q) - A\left(2 \arcsin\left(q^{-1} \cos \frac{\theta}{2}\right), q\right) \right]^{1/3}}$$

$$q^2 = \frac{\omega_s - 1}{2\omega_s}, \quad \theta_0 \leq \theta < \pi$$

$$j(\theta) = j^{\circ} \frac{(2\omega_s)^{1/2}}{(\omega_s + 1)^{2/3}} \frac{\sin \theta (1 + \omega_s \cos \theta)^{1/2}}{\left[ A(\pi, p^{-1}) - A\left(2 \arcsin\left(p \sin \frac{\theta}{2}\right), p^{-1}\right) \right]^{1/3}}$$

$$(3.7) \quad p^2 = \frac{2\omega_s}{\omega_s + 1}, \quad 0 < \theta \leq \theta_0$$

Полный диффузионный поток вещества на поверхность частицы равен

$$(3.8) \quad I(\omega_s) = I^{\circ} \left\{ \frac{(\omega_s - 1)^{4/3}}{2\omega_s} [A(\pi, q)]^{2/3} + \frac{(\omega_s + 1)^{4/3}}{2\omega_s} [A(\pi, p^{-1})]^{2/3} \right\}$$

Здесь и всюду далее значения  $j^{\circ}$ ,  $I^{\circ}$  и функция  $A(\varphi, k)$  определяются так же, как в (3.4) и (3.5).

в)  $-1 \leq \omega_s \leq 0$ ,  $\theta_0 = \pi$ . Для дифференциального и интегрального потоков получим

$$(3.9) \quad j(\theta) = j^{\circ} (|\omega_s| + 1)^{-1/3} \frac{\sin \theta (1 - |\omega_s| \cos \theta)^{1/2}}{[A(\pi - \theta, p)]^{1/3}}, \quad p^2 = \frac{2|\omega_s|}{|\omega_s| + 1}$$

$$(3.10) \quad I(\omega_s) = I^{\circ} (|\omega_s| + 1)^{1/3} [A(\pi, p)]^{2/3}$$

г)  $\omega_s < -1$ ,  $\theta_0 = \pi$  при  $\theta_1 < \theta \leq \pi$  и  $\theta_0 = 0$  при  $0 \leq \theta < \theta_1$ ,  $\theta_1 = \arccos(1/|\omega_s|)$ . Для распределения диффузионного потока на лобовой ( $\theta_1 < \theta \leq \pi$ ) и кормовой ( $0 \leq \theta < \theta_1$ ) частях сферы получим соответственно

$$(3.11) \quad j(\theta) = j^{\circ} \frac{(2|\omega_s|)^{1/2}}{(|\omega_s| + 1)^{2/3}} \frac{\sin \theta (1 - |\omega_s| \cos \theta)^{1/2}}{\left[ A\left(2 \arcsin\left(p \cos \frac{\theta}{2}\right), p^{-1}\right) \right]^{1/3}}$$

$$\theta_1 < \theta \leq \pi$$

$$(3.12) \quad j(\theta) = j^{\circ} \frac{(2|\omega_s|)^{1/2}}{(|\omega_s| - 1)^{2/3}} \frac{\sin \theta (|\omega_s| \cos \theta - 1)^{1/2}}{\left[ A\left(2 \arcsin\left(q^{-1} \sin \frac{\theta}{2}\right), q\right) \right]^{1/3}}$$

$$q^2 = \frac{|\omega_s| - 1}{2|\omega_s|}, \quad 0 \leq \theta < \theta_1$$

Полный поток на всю частицу равен

$$(3.13) \quad I(\omega_s) = I^{\circ} \left\{ \frac{(|\omega_s| - 1)^{4/3}}{2|\omega_s|} [A(\pi, q)]^{2/3} + \frac{(|\omega_s| + 1)^{4/3}}{2|\omega_s|} [A(\pi, p^{-1})]^{2/3} \right\}$$

Для приложений наибольший интерес представляет величина полного диффузионного притока к поверхности частицы. Используя формулы (3.4), (3.5), (3.8), (3.10), (3.13), получим выражение для числа Шервуда, опре-

деленного по радиусу частицы, в виде

$$(3.14) \quad \text{Sh} = \frac{1}{50^{1/3} \Gamma(4/3)} (|\omega_s| + 1)^{1/3} B(p) P^{1/3}, \quad |\omega_s| \leq 1$$

$$(3.15) \quad \text{Sh} = \frac{1}{50^{1/3} \Gamma(4/3)} \left\{ \frac{(|\omega_s| - 1)^{4/3}}{2|\omega_s|} B(q) + \frac{(|\omega_s| + 1)^{4/3}}{2|\omega_s|} B\left(\frac{1}{p}\right) \right\} P^{1/3},$$

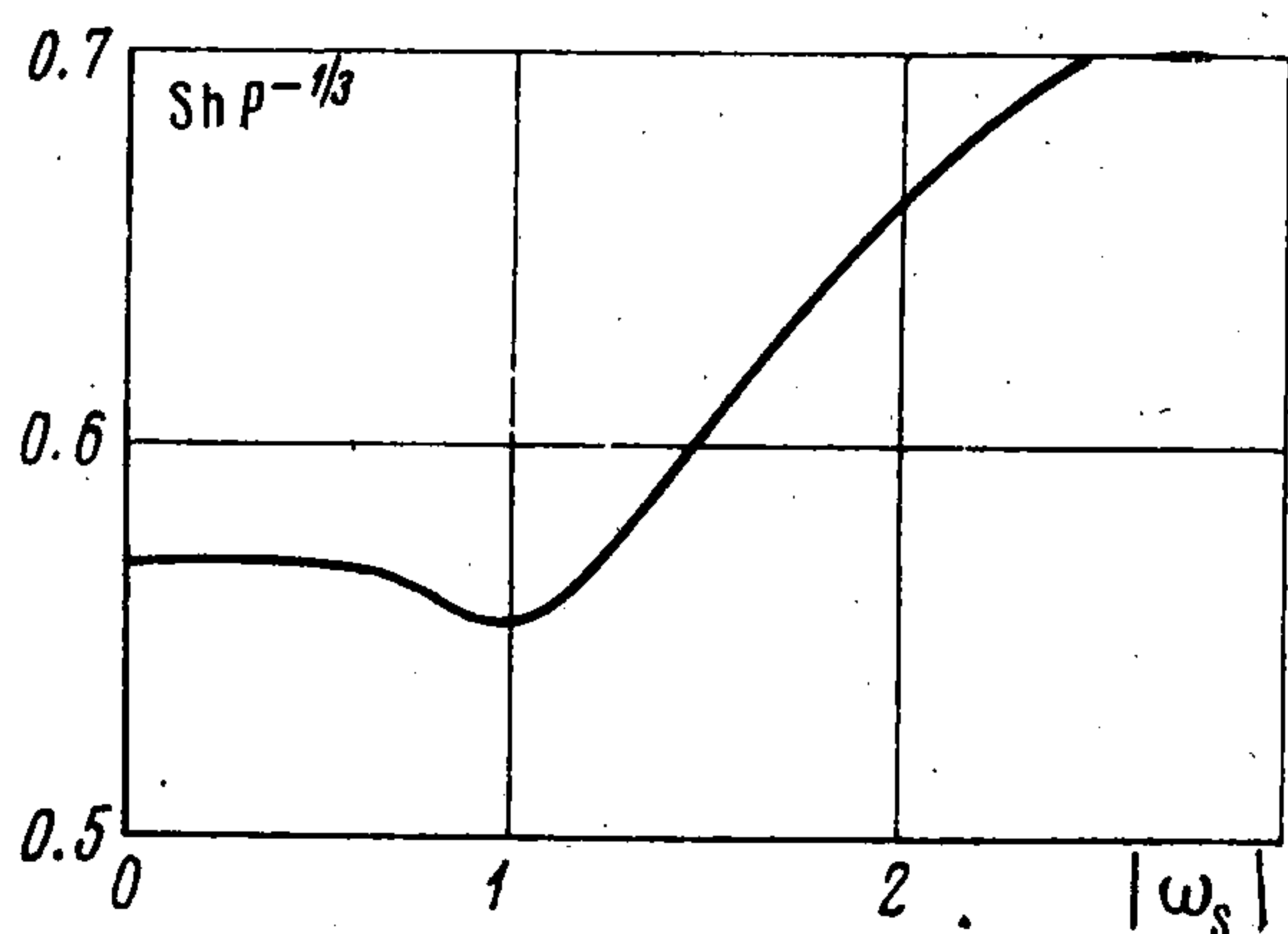
$$|\omega_s| \geq 1$$

$$B(k) = \left[ \frac{(1 - k^2)(2 - k^2)}{k^4} K(k) - 2 \frac{k^4 - k^2 + 1}{k^4} E(k) \right]^{2/3}$$

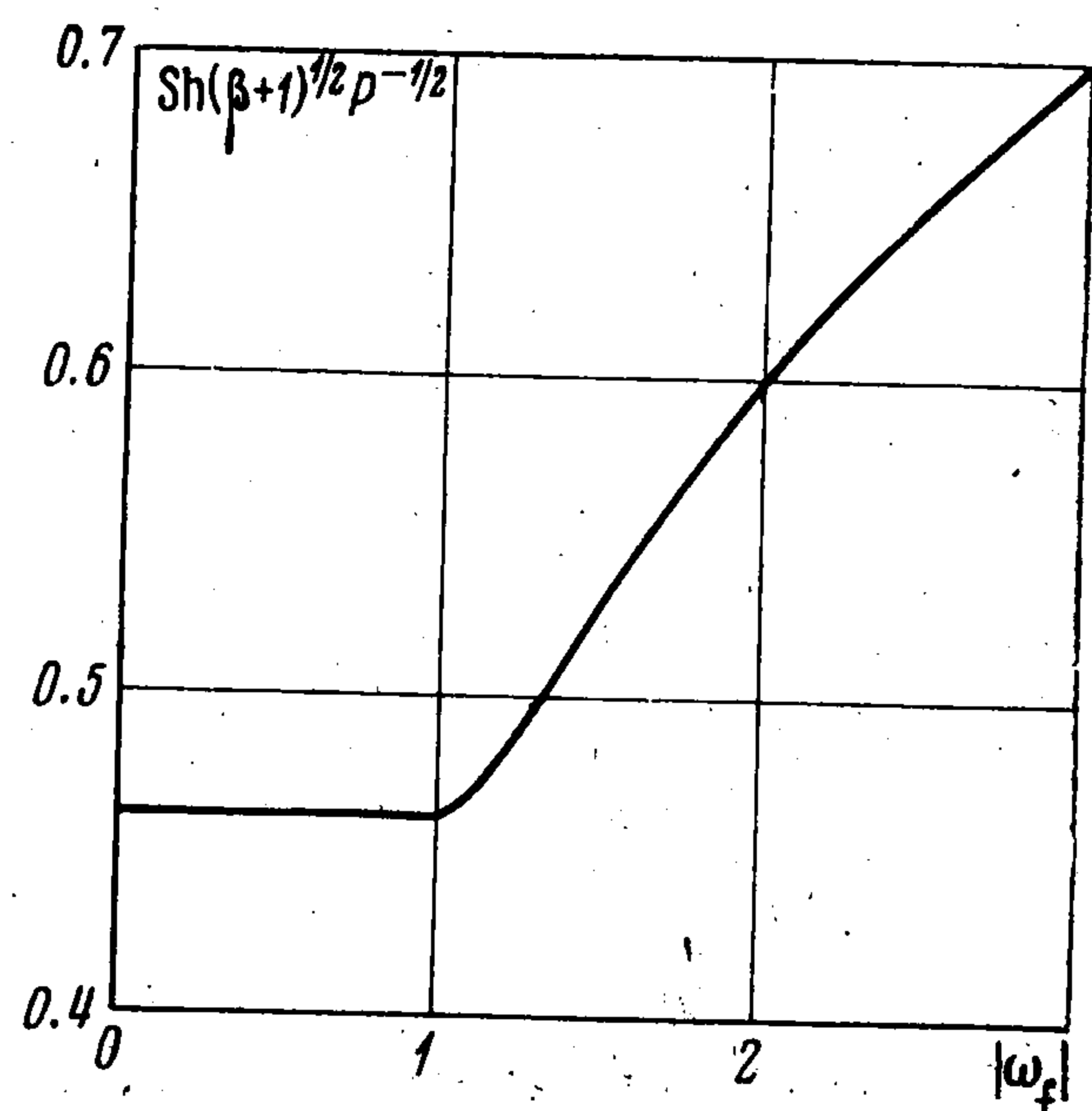
Здесь  $K(k)$  и  $E(k)$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Зависимость величины  $\text{Sh} P^{-1/3}$  от  $|\omega_s|$  представлена на фиг. 2.

Полученные результаты свидетельствуют о существенном влиянии сдвигового течения на массообмен. В частном случае  $|\omega_s| = 0$  формулы



Фиг. 2



Фиг. 3

(3.4), (3.5) или (3.9), (3.10) дают результаты, полученные в работе [1] для обтекания частицы поступательным потоком, при  $|\omega_s| \rightarrow \infty$  формулы (3.6) — (3.8) и (3.11) — (3.13) соответствуют результатам, приведенным в работах [3,4] для частицы в однородном сдвиговом потоке.

4. Диффузия к капле (пузырю). Задачу (2.2), (2.4), (2.5) можно представить в виде

$$(4.1) \quad \frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial \psi_f^2}, \quad t = \frac{Da^3 U}{2(\beta+1)} \int_0^{\theta_0} (1 + \omega_f \cos \theta) \sin^3 \theta d\theta$$

$$|\psi_f| \rightarrow \infty, \quad c \rightarrow c_0; \quad \psi_f = 0, \quad c = 0; \quad t = 0, \quad c = c_0$$

Ее решение

$$(4.2) \quad c(z) = \frac{2c_0}{\sqrt{\pi}} \int_z^0 \exp(-\eta^2) d\eta, \quad z = \frac{|\psi_f|}{2t^{1/2}}$$

Используя (4.2), определим дифференциальный и интегральный диффузионные потоки вещества на поверхность капли по формулам (3.3) для различных случаев обтекания.

Для случаев а) и в) распределение диффузионного потока по поверхности капли имеет вид

$$(4.3) \quad j(\theta) = j^{\circ} \frac{(1 - \cos \theta)(1 + \omega_f \cos \theta)}{[1/3(2 - \cos \theta) - 1/4\omega_f(1 - \cos \theta)^2]^{1/2}}, \quad j^{\circ} = c_0 \left[ \frac{DU}{2\pi a(\beta + 1)} \right]^{1/2}$$

Интегрируя (4.3) по поверхности капли, получим

$$(4.4) \quad I = 4 \sqrt{\frac{2\pi}{3}} c_0 \left[ \frac{Da^3 U}{\beta + 1} \right]^{1/2}$$

Видно, что наличие сдвигового течения не влияет на полный диффузионный приток вещества к поверхности капли при  $|\omega_f| \leq 1$ .

В случае б) распределение диффузионного потока на лобовой и кормовой частях поверхности капли описывается формулой

$$(4.5) \quad j(\theta) = j^{\circ} \frac{\omega_f^{2/3} \sin^2 \theta}{[1/4\omega_f^2(2 - \cos^2 \theta) - 1/12(1 - 2\omega_f \cos \theta)]^{1/2}}$$

Интегрируя (4.5) по всей поверхности капли, получим

$$(4.6) \quad I = 4\pi a^2 j^{\circ} [\zeta_+^{1/2}(\omega_f) + \zeta_-^{1/2}(\omega_f)]$$

$$\zeta_{\pm}(\omega_f) = \pm \frac{2}{3} + \frac{\omega_f}{4} + \frac{1}{2\omega_f} - \frac{1}{12\omega_f^3}$$

В случае г) распределения диффузионного потока на лобовой и кормовой частях капли соответственно имеют вид

$$(4.7) \quad j(\theta) = j^{\circ} \frac{(1 - \cos \theta)(1 - |\omega_f| \cos \theta)}{[1/3(2 - \cos \theta) + 1/4|\omega_f|(1 - \cos \theta)^2]^{1/2}}$$

$$\theta_1 \leq \theta < \pi, \quad \theta_1 = \arccos(1/|\omega_f|)$$

$$(4.8) \quad j(\theta) = j^{\circ} \frac{(1 + \cos \theta)(|\omega_f| \cos \theta - 1)}{[-1/3(2 + \cos \theta) + 1/4|\omega_f|(1 + \cos \theta)^2]^{1/2}}, \quad 0 < \theta \leq \theta_1$$

Интегрируя (4.7) и (4.8) по лобовой и кормовой частям капли, для интегрального потока получим

$$(4.9) \quad I = 4\pi a^2 j^{\circ} [\zeta_+^{1/2}(|\omega_f|) + \zeta_-^{1/2}(|\omega_f|)]$$

В практических приложениях наибольший интерес представляет величина интегрального притока. Используя (4.4), (4.6), (4.9), для числа Шервуда получим]

$$(4.10) \quad Sh = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} (\beta + 1)^{-1/2} P^{1/2}, \quad |\omega_f| \leq 1$$

$$(4.11) \quad Sh = \sqrt{\frac{1}{8\pi}} \left[ \left(1 + \frac{1}{|\omega_f|}\right)^{3/2} \left(|\omega_f| - \frac{1}{3}\right)^{1/2} + \left(1 - \frac{1}{|\omega_f|}\right)^{3/2} \left(|\omega_f| + \frac{1}{3}\right)^{1/2} \right] (\beta + 1)^{-1/2} P^{1/2}, \quad |\omega_f| \geq 1$$

Зависимость величины  $Sh(\beta + 1)^{1/2} P^{-1/2}$  от  $|\omega_f|$  представлена на фиг. 3. Эта величина остается постоянной при  $|\omega_f| \leq 1$  и растет с ростом  $|\omega_f|$  при  $|\omega_f| > 1$ .

В заключение отметим, что в предельных случаях однородного поступательного ( $\omega_f \rightarrow 0$ ) и однородного сдвигового ( $|\omega_f| \rightarrow \infty$ ) потоков формулы (4.10), (4.11) согласуются с полученными ранее в работах [1,3,4].

Авторы признательны Г. Ю. Степанову за ценные замечания.

Поступила 25 II 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Изд. 2. М., Физматгиз, 1959.
2. Taylor G. I. Viscosity of a fluid containing small drops of another fluid. Proc. Roy. Soc. A. 1932, vol. 138, No. 834, p. 41—48.
3. Гупало Ю. П., Рязанцев Ю. С. Диффузия к частице в случае сдвигового течения вязкой жидкости. Приближение диффузионного пограничного слоя. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
4. Gupalo Yu. P., Ryazantsev Yu. S. Heat and mass transfer from a sphere with a chemical surface reaction in a laminar flow. Acta Astronaut., 1974, vol. 1, No. 7—8, p. 993.