

## ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА В КВАЗИЦИЛИНДРИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

В. Т. Гринь, А. Н. Крайко, Н. И. Тилляева

(Москва)

В одномерном («гидравлическом») приближении выполнен анализ устойчивости течения торможения идеального, т. е. невязкого и нетеплопроводного газа в канале с переходом через скорость звука в прямом скачке уплотнения или разрыве более общего типа (например, в детонационной волне). В основе исследования лежат предположения о малости возмущений и о квазицилиндричности канала, что делает возможным применение подхода, развитого Г. Г. Черным в 1953 г. и в дальнейшем использованного при решении ряда задач о динамике течения в каналах [1, 2], а также при анализе устойчивости двухфронтной структуры волны детонации [3]. При формулировке задачи об устойчивости течения в канале поток на его входе считается сверхзвуковым и невозмущенным. На выходе из канала ставится условие отражения — линейная связь, выражающая возмущение «левого» инварианта Римана через возмущения «правого» инварианта Римана и энтропии. Для случаев, когда любой из коэффициентов отражения равен нулю, получены необходимые и достаточные условия, при помощи которых выполнен анализ устойчивости течения в канале с замыкающим скачком уплотнения.

Кроме упомянутого выше исследования Г. Г. Черного 1953 г., который исследовал устойчивость течения в канале с замыкающим скачком уплотнения при отсутствии отражений возмущений от сечения выхода, и аналогичного исследования для детонационной волны, выполненного А. Б. Бабицким в 1959 г., обсуждаемой проблеме посвящен ряд работ других авторов [4-9]. К сожалению, полученные в этих работах результаты, как правило, не являются строгими даже в рамках каких-либо дополнительных, но обоснованных предположений (типа предположения Г. Г. Черного о квазицилиндричности канала). Результаты, представляющие исключение, относятся к течению с замыкающим скачком, расположенном на стационарном режиме в сечении выхода [4, 8], и к течению в сужающемся канале со скачком, локализованным достаточно близко от указанного сечения [8]. Прочие результаты либо основаны на квазистационарных соображениях качественного характера [5], либо исходят из дополнительного предположения об устойчивости скачка в расширяющемся канале [6], либо опираются на рассмотрение только линейных членов разложений по пространственной переменной в условиях, когда необходимо привлекать следующие члены рядов [8], либо, наконец, просто ошибочны [9]. В последней работе неправильно выполнена линеаризация соотношений на скачке<sup>1</sup>. Во всех цитированных работах, как и в данной статье, исследование ведется в рамках линейной теории. Отметим, что в последнее время при анализе устойчивости течения, а также различных динамических процессов в каналах все более широкое применение находят численные методы (см., например, [10-14]).

1. Рассмотрим течение в канале, площадь поперечного сечения которого  $F$  — известная функция продольной координаты  $x$ , отсчитываемой

<sup>1</sup> В. Н. Глазнев — автор [9] был ознакомлен с соответствующими соображениями и согласился с ними.

вдоль оси канала. Пусть  $t$  — время,  $u$  —  $x$ -компонента скорости потока,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $e$  — удельная внутренняя энергия,  $i$  — удельная энтальпия,  $a$  — скорость звука, причем

$$(1.1) \quad e = e(p, \rho), \quad i = i(p, \rho) = e + p / \rho, \quad a = a(p, \rho)$$

где функции, стоящие справа, известны. Для совершенного газа с показателем адиабаты  $\kappa$

$$e = p / (\kappa - 1)\rho, \quad i = \kappa p / (\kappa - 1)\rho, \quad a = (\kappa p / \rho)^{1/2}$$

Перечисленные величины, а также другие параметры без верхнего индекса градус будем считать безразмерными. Если  $l^\circ$ ,  $F_*^\circ$ ,  $u_*^\circ$  и  $\rho_*^\circ$  — характерные величины с размерностями длины, площади, скорости и плотности, то приведение к безразмерному виду достигается отнесением продольной координаты к  $l^\circ$ , площади поперечного сечения канала — к  $F_*^\circ$ , времени — к  $l^\circ / u_*^\circ$ , скорости газа и скорости звука — к  $u_*^\circ$ , плотности — к  $\rho_*^\circ$ , давления — к  $\rho_*^\circ u_*^{\circ 2}$ , удельных внутренней энергии и энтальпии — к  $u_*^{\circ 2}$ . Отметим, что в одномерном приближении, которое используется в данном исследовании, характерную площадь  $F_*^\circ$  можно и удобно выбирать независимо от выбора  $l^\circ$ , в то время как в точной постановке  $F_*^\circ \sim l^{\circ 2}$ .

В рассматриваемом приближении уравнения, описывающие нестационарное течение невязкого и нетеплопроводного газа в канале с непроницаемыми стенками, сводятся к «характеристической» системе

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} - a^2 \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho a} \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial p}{\partial x} \right\} + u a \frac{d \ln F}{dx} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{\rho a} \left\{ \frac{\partial p}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial p}{\partial x} \right\} - u a \frac{d \ln F}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

Уравнения (1.2) выполняются в подобластях непрерывности параметров. На сильных разрывах параметры потока удовлетворяют законам сохранения, которые, например, в случае скачка уплотнения в том же приближении записываются в форме

$$(1.3) \quad [\rho(u - n)] = 0, \quad [p + \rho(u - n)^2] = 0, \quad [2i + (u - n)^2] = 0$$

Здесь квадратные скобки означают разности стоящих в них комбинаций параметров с обеих сторон от разрыва,  $n$  — скорость скачка, причем если  $x = x_s(t)$  — уравнение движения скачка, то

$$(1.4) \quad n = \dot{x}_s(t)$$

где точкой обозначена полная производная по времени.

Уравнения и соотношения (1.1)–(1.4) вместе с начальными и граничными условиями, которые будут сформулированы ниже, полностью определяют развитие течения в канале. Начальные условия состоят в задании распределений параметров во всем канале при  $t = 0$ . Вид и количество граничных условий во входном и выходном сечениях канала зависят от соотношения между  $u$  и  $a$  в указанных сечениях. Так, например, если на входе скорость сверхзвуковая ( $u > a$ ), то здесь следует задавать все параметры газа как функции времени. В случае, когда эти параметры постоянны, будем говорить, что поток на входе в канал невозмущен.

2. При исследовании устойчивости стационарного течения используются уравнения, а также соотношения на скачках, которые получаются из приведенных выше при помощи линеаризации, что предполагает малость нестационарных возмущений параметров. Если стационарное течение содержит поверхность разрыва («замыкающий скачок»), положение которого совместим с началом отсчета  $x$ , то последнее предположение означает, в частности, что  $x_s(t)$  и  $n(t)$  малы по сравнению с длиной канала и со скоростью газа в нем.

При линеаризации любой параметр, например, скорость представим в виде  $u(x, t) = U(x) \{1 + u_n(x, t)\}$ , где большой буквой обозначена соответствующая стационарная величина, а  $u_n(x, t)$  — относительное нестационарное отклонение. Исключение составляет скорость скачка (на стационарном режиме скачок покоится), для которой используется представление  $U_n$ , где  $U_-$  — стационарное значение скорости потока слева от замыкающего скачка (при  $x = 0$ ). Распределения «больших» (стационарных) параметров удовлетворяют уравнениям

$$(2.1) \quad \frac{dU}{dx} = \frac{U}{M^2 - 1} \frac{d \ln F}{dx}, \quad \frac{dP}{dx} = \frac{RU^2}{1 - M^2} \frac{d \ln F}{dx}$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{RM^2}{1 - M^2} \frac{d \ln F}{dx} \quad \left( M = \frac{U}{A} \right)$$

которые получаются из (1.2), если в последних опустить производные по времени. В (2.1)  $P$ ,  $R$  и  $A$  — стационарные значения давления, плотности и скорости звука.

Возмущения параметров на поверхности замыкающего скачка рвутся, удовлетворяя при этом связям, вытекающим из (1.3). В рамках линейного подхода указанные связи удобно записывать не на движущемся разрыве, т. е. не при  $x = x_s(t)$ , а в его стационарном положении (при  $x = 0$ ). Линеаризация и перенос в сечение  $x = 0$  осуществляются с использованием выражений для производных стационарных параметров из (2.1) и дополнительного предположения о малости производных по  $x$  от нестационарных добавок. Последнее означает, что линейный анализ ограничен случаями, для которых вклад высокочастотных компонент в спектральные разложения  $u_n(x, t)$ , ... невелик (отметим, кстати, что для высокочастотных возмущений становятся существенными и другие нелинейные эффекты [12]).

Если сверхзвуковой поток на входе в канал в течение достаточно продолжительного отрезка времени был невозмущен и остается невозмущенным и в дальнейшем, а именно этот случай рассматривается ниже, то при  $t \geq 0$  нестационарные возмущения будут отсутствовать всюду слева от скачка (газ течет слева направо). При таких условиях линеаризованные соотношения, получающиеся из (1.3) и (1.4), принимают вид (газ совершенный)

$$(2.2) \quad u_{n+} + \rho_{n+} + (1 - K)n = 0, \quad 2u_{n+} + (1 / \kappa M_+^2)p_{n+} + \rho_{n+} + (K - 1)\Delta \ln F = 0$$

$$p_{n+} - N\rho_{n+} + E\Delta \ln F_s = 0, \quad n = x_s^* / U_-$$

$$\Delta \ln F_s \equiv \ln F(x_s) - \ln F(0) = Yx_s$$

$$\left( \begin{aligned} K &= \frac{U_-}{U_+}, & N &= \frac{\kappa \{2 + (\kappa - 1) M_-^2\} M_-^2}{1 - \kappa + 2\kappa M_-^2} \\ E &= \frac{(\kappa - N)(M_+^2 - M_-^2)}{(1 - M_+^2)(1 - M_-^2)}, & Y &= \left( \frac{d \ln F}{dx} \right)_{x=0} \end{aligned} \right)$$

Здесь, как и всюду далее, малые величины означают относительные отклонения параметров от своих стационарных значений (при тех же  $x$ ), а нижний индекс минус (плюс) приписан параметрам до (после) замыкающего скачка при  $x = 0$ .

Линеаризацию системы (1.2) и все дальнейшее исследование проведем при дополнительном предположении о квазицилиндричности участка канала, расположенного справа от замыкающего скачка. Указанное предположение означает, что для  $x > 0$  любой стационарный параметр, например скорость, можно представить в виде  $U(x) = U_+ \{1 + u_e(x)\}$ , причем  $|u_e(x)| \ll 1$  и  $|du_e(x)/dx| \ll 1$ . Подстановка подобных выражений в (2.1), отбрасывание членов второго и более высокого порядка и последующее интегрирование получившейся в результате линейной системы приводит к соотношениям

$$(2.3) \quad \begin{aligned} u_e(x) &= \Delta \ln F(x) / (M_+^2 - 1), & p_e(x) &= \kappa M_+^2 \Delta \ln F(x) / \\ & / (1 - M_+^2), & \rho_e(x) &= M_+^2 \Delta \ln F(x) / (1 - M_+^2) \\ & (\Delta \ln F(x) \equiv \ln F(x) - \ln F(0)) \end{aligned}$$

при получении которых учитывалось, что в согласии с определением величин с индексом  $e$   $u_e(0) = p_e(0) = \rho_e(0) = 0$ .

В случае квазицилиндрического канала с точностью до малых более высокого порядка имеем  $u(x, t) = U_+ \{1 + u_e(x) + u_n(x, t)\}$ . Подставляя это и аналогичные выражения для  $p(x, t)$  и  $\rho(x, t)$  в (1.2), проводя линеаризацию и учитывая, что  $u_e(x)$ ,  $p_e(x)$  и  $\rho_e(x)$  даются формулами (2.3), приходим к следующей системе:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_+ \frac{\partial}{\partial x} \right) (p_n - \kappa \rho_n) &= 0, & \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (U_+ + A_+) \frac{\partial}{\partial x} \right\} \left( u_n + \frac{1}{\kappa M_+} p_n \right) &= 0 \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (U_+ - A_+) \frac{\partial}{\partial x} \right\} \left( u_n - \frac{1}{\kappa M_+} p_n \right) &= 0 \end{aligned}$$

для нестационарных добавок. Решение этой системы имеет вид

$$(2.4) \quad \begin{aligned} p_n(x, t) - \kappa \rho_n(x, t) &= S(\zeta) \\ u_n(x, t) + (1 / \kappa M_+) p_n(x, t) &= 2R(\xi) \\ u_n(x, t) - (1 / \kappa M_+) p_n(x, t) &= 2L(\eta) \\ (\zeta = x - U_+ t, & \quad \xi = x - (U_+ + A_+) t, \quad \eta = x - (U_+ - A_+) t) \end{aligned}$$

Здесь множитель 2 в правых частях второго и третьего равенств введен для упрощения последующих формул, а  $S$ ,  $R$  и  $L$  — произвольные функции. Функция  $S$  сохраняет постоянное значение вдоль каждой траектории частицы, а  $R$  и  $L$  — вдоль траекторий акустических волн, распространяющихся по частицам соответственно в направлении и против потока. В рассматриваемом приближении указанные функции играют роль энтропии, правого и левого инвариантов Римана. Соответствующие волны будем называть  $S$ -,  $R$ - и  $L$ -волнами.

Разрешая (2.4) относительно  $u_n$ ,  $p_n$  и  $\rho_n$ , найдем

$$(2.5) \quad \begin{aligned} u_n(x, t) &= R(\xi) + L(\eta), & p_n(x, t) &= \{R(\xi) - L(\eta)\} \kappa M_+ \\ \rho_n(x, t) &= \{R(\xi) - L(\eta)\} M_+ - S(\zeta) \kappa^{-1} \end{aligned}$$

В сечении стационарного положения скачка (при  $x = 0$ ) функции  $R$ ,  $L$  и  $S$  должны удовлетворять линейным связям, которые получаются при подстановке (2.5) в (2.2). Так как справа на скачок приходят лишь возмущения, определяемые левым инвариантом, то соответствующие связи удобно переписать в виде формул, выражающих отраженные инварианты ( $R_+$  и  $S_+$ ) и скорость скачка  $n$  через  $L_+$  и смещение скачка от его стационарного положения, или отвечающее этому смещению приращение  $\Delta \ln F_s$ . Эти формулы имеют вид

$$(2.6) \quad \begin{aligned} R_+ &= \varphi L_+ - \psi \Delta \ln F_s, & S_+ &= \varphi' L_+ - \psi' \Delta \ln F_s \\ n &= \mu L_+ - \beta \Delta \ln F_s \end{aligned}$$

При соответствующим образом определенных коэффициентах  $\varphi$ ,  $\psi$ , ... полученные соотношения имеют место для сильных разрывов достаточно широкого класса (например, для детонационных волн и скачков конденсации, рассматриваемых в однофронтном приближении). В случае скачка уплотнения эти коэффициенты — функции только  $M_+$  и  $\kappa$ , причем в согласии с (2.2) и (2.4)

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \varphi &= \frac{(1 - 2M_+)N + \kappa M_+^2}{(1 + 2M_+)N + \kappa M_+^2}, & \psi &= \frac{(K - 1)N + E}{(1 + 2M_+)N + \kappa M_+^2} M_+ \\ \varphi' &= M_+ (1 - \varphi) (\kappa - N) \kappa / N, & \psi' &= \{E - M_+ (\kappa - N) \psi\} \kappa / N \\ \mu &= \frac{1 - M_+ - (1 + M_+) \varphi}{(K - 1) M_+}, & \beta &= 1 - \frac{(1 + M_+) \psi}{(K - 1) M_+} \end{aligned}$$

При дозвуковой скорости в сечении выхода к нему со стороны канала приходят  $R$ - и  $S$ -волны, которые могут отражаться в виде  $L$ -волн. В соответствии с этим граничное условие в сечении выхода запишем в виде

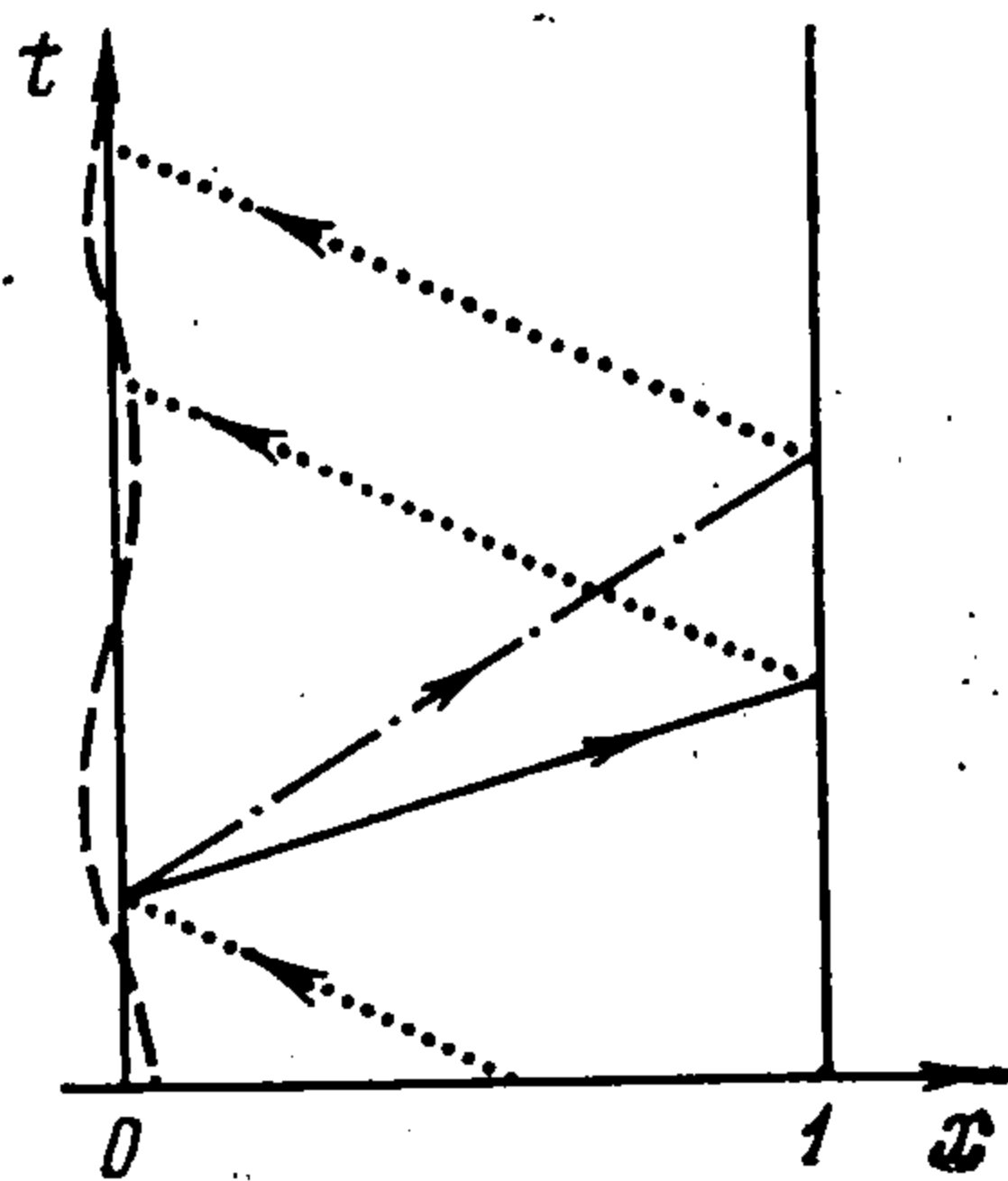
$$(2.8) \quad L = \chi R + \chi' S \quad \text{при } x = 1$$

Здесь  $\chi$  и  $\chi'$  — коэффициенты отражения, которые в отличие от коэффициентов  $\varphi$ ,  $\psi$ , ... в (2.6) зависят от вида устройств, примыкающих к исследуемому каналу справа, а не определяются только параметрами потока в указанном сечении. При написании (2.8) и далее за  $l^\circ$  принято расстояние от сечения стационарного положения скачка до выхода из канала. В качестве  $u_*^\circ$  и  $F_*^\circ$  выберем стационарную скорость потока за скачком и площадь поперечного сечения канала при  $x = 0$ . В соответствии с таким выбором  $u_*^\circ$  и  $F_*^\circ$

$$(2.9) \quad \begin{aligned} U_- &= K, & \Delta \ln F &= \ln F, & \zeta &= x - t \\ \xi &= x - \left(1 + \frac{1}{M_+}\right)t, & \eta &= x - \left(1 - \frac{1}{M_+}\right)t \end{aligned}$$

3. При исследовании эволюции течения в канале важную роль играют времена  $\tau_s$ ,  $\tau_r$  и  $\tau_l$ , которые требуются волнам соответствующих типов для прохождения расстояния между замыкающим скачком и сечением выхода. В согласии с принятым обезразмериванием,  $\tau_s = 1$ ,  $\tau_r = M_+ / (1 + M_+)$  и  $\tau_l = M_+ / (1 - M_+)$ . Время прохождения всего пути акустической волной, ушедшей от сечения  $x = 0$  в виде  $R$ -волны и отразившейся от сечения  $x = 1$  в виде  $L$ -волны,  $\tau = \tau_r + \tau_l = 2M_+ / (1 - M_+^2)$ .

Изучим эволюцию течения, возникшего в результате возмущения некоторого стационарного режима, отвечающего заданным сверхзвуковым параметрам на входе в канал и заданному давлению  $p_b$  в сечении выхода ( $x = 1$ ). Замыкающий скачок (или разрыв другого типа) на стационарном



Фиг. 1

режиме располагается при  $x = 0$ , причем  $M_+ < 1$ , т. е. поток при  $0 < x < 1$  дозвуковой. Причинами, выведшими поток из его стационарного состояния, могли быть возмущения, пришедшие от входа или выхода из канала, а также весьма произвольные внешние воздействия (силовые, тепловые и т. п.). К моменту начала рассмотрения  $t_0 > \tau$  все воздействия предполагаются отсутствующими (в частности, поток перед смещенным от стационарного положения скачком невозмущен), по крайней мере, в продолжении временного интервала не меньшего, чем  $\tau$ , а в сечении  $x = 1$  выполняется условие отражения (2.8). В указанном условии на первом этапе исследования положим  $\chi \neq 0$ ,  $\chi' = 0$ , что отвечает отражению только  $R$ -волн. Считая, что принятые условия сохраняются и в дальнейшем (при  $t > t_0$ ), изучим поведение течения при достаточно больших  $t$ .

Заметим, что полное представление об эволюции течения дает анализ поведения  $x_s(t)$  и  $L_+(t)$ . Действительно, первые два равенства (2.6) с учетом (2.9) и того, что  $\ln F_s = Yx_s(t)$ , позволяют найти  $R_+(t)$  и  $S_+(t)$ , которые оказываются линейными комбинациями  $x_s(t)$  и  $L_+(t)$  и в силу своих свойств сохраняются на линиях  $\xi = \text{const}$  и  $\zeta = \text{const}$  соответственно.

Функции  $x_s(t)$  и  $L_+(t)$  удовлетворяют системе двух дифференциально-разностных уравнений, первое из которых получается из последнего соотношения (2.6) после исключения  $n$  с учетом (2.2) и (2.9) и имеет вид

$$(3.1) \quad x_s^*(t) = \mu_0 L_+(t) - \beta_0 Y x_s(t) \quad (\mu_0 = K\mu, \beta_0 = K\beta)$$

Для получения второго уравнения рассмотрим картину отражения  $R$ - и  $L$ -волн от скачка и от сечения выхода.  $L$ -волна, пришедшая в момент  $t \geq t_0$  в сечение  $x = 0$ , образовалась в результате отражения  $R$ -волны в момент  $t - \tau_l$  от сечения  $x = 1$ . Последняя, в свою очередь, покинула сечение  $x = 0$  в момент  $t - \tau_l - \tau_r = t - \tau$ . Траектории различных волн в плоскости  $xt$  показаны на фиг. 1, на которой сплошные, пунктирные и штрихпунктирные прямые — траектории  $R$ -,  $L$ - и  $S$ -волн соответственно. Стрелками показаны направления распространения волн, а штри-

хами нарисована траектория замыкающего скачка. Отметим, что в рамках используемого линейного приближения отражение  $L$ -волн от скачка заменяется их отражением от сечения  $x = 0$ . Единственным возмущением, пришедшим на скачок (верхнее, в сечение  $x = 0$ ) в момент  $t - \tau$ , является  $L$ -волна. Поэтому из (2.6) и (2.8) при  $\chi' = 0$  получим

$$(3.2) \quad L_+(t) = \varphi_0 L_+(t - \tau) - \psi_0 Y x_s(t - \tau) \quad (\varphi_0 = \chi\varphi, \psi_0 = \chi\psi)$$

где  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  имеют смысл суммарных коэффициентов отражения от разрыва и от сечения выхода. Для анализа наряду с (3.2) удобно использовать уравнение

$$(3.3) \quad L_+^*(t) + \psi_0 Y x_s^*(t - \tau) - \varphi_0 L_+^*(t - \tau) = 0$$

полученное из (3.2) дифференцированием по  $t$ .

Уравнения (3.1) и (3.3) образуют систему двух дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа [15]. Ее решение для  $t \geq t_0$  полностью определяется «начальными данными» на отрезке  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$ . Последние состоят в задании на указанном отрезке двух функций  $x_s(t) = x_{s0}(t)$  и  $L_+(t) = L_{0+}(t)$ . Однако в рассматриваемом случае  $x_s(t)$  достаточно задать лишь в одной точке (например, при  $t = t_0$ ), так как это при известной для  $t_0 - \tau \leq t \leq t_0$  функции  $L_{0+}(t)$  по (3.1) однозначно определяет  $x_{s0}(t)$  на том же отрезке.

При известных начальных условиях поведение решения уравнений (3.1) и (3.3) определяется расположением в комплексной плоскости корней характеристического уравнения этой системы, которое имеет вид [15]

$$(3.4) \quad \lambda [(\lambda + \beta_0 Y)(1 - \varphi_0 e^{-\tau\lambda}) + \mu_0 \psi_0 Y e^{-\tau\lambda}] = 0$$

Для того чтобы все решения (3.1) и (3.3) были при  $t \rightarrow \infty$  ограниченными (т. е. исходное стационарное течение было устойчивым), в согласии с [15] достаточно выполнения двух условий: во-первых, действительные части всех корней (3.4) должны быть неположительными и, во-вторых, каждый корень (3.4) с нулевой действительной частью должен быть простым. Первое условие является и необходимым.

Корень  $\lambda = 0$  является простым. Уравнение, определяющее бесконечную последовательность остальных корней (3.4), удобно переписать в виде

$$(3.5) \quad pe^z + q - ze^z + \varphi_0 z = 0 \\ (p = -\tau\beta_0 Y; \quad q = \tau Y (\beta_0 \varphi_0 - \mu_0 \psi_0), \quad z = \tau\lambda)$$

Исследование этого уравнения можно провести методом, аналогичным изложенному в [15] для случая  $\varphi_0 = 0$ . Опуская соответствующий анализ, приведем лишь окончательные результаты. Необходимыми и достаточными условиями того, что все корни (3.5) имеют отрицательные действительные части, является одновременное выполнение четырех неравенств

$$(3.6) \quad |\varphi_0| < 1, \quad p < 1 - \varphi_0, \quad p < -q < \sqrt{\alpha^2 (1 - \varphi_0^2) + p^2}$$

Здесь, если  $p \neq 0$ , то под  $\alpha$  понимается корень уравнения:  $\sin \alpha / (\cos \alpha - \varphi_0) = \alpha / p$ . Если же  $p = 0$ , то в (3.6) следует положить  $\alpha = \arccos \varphi_0$ . В обоих случаях берется значение  $\alpha$  из интервала  $0 < \alpha < \pi$ .

Из условий (3.6) особенно простой смысл имеет первое: суммарный коэффициент отражения акустической волны от разрыва и от сечения выхода должен быть меньше единицы.

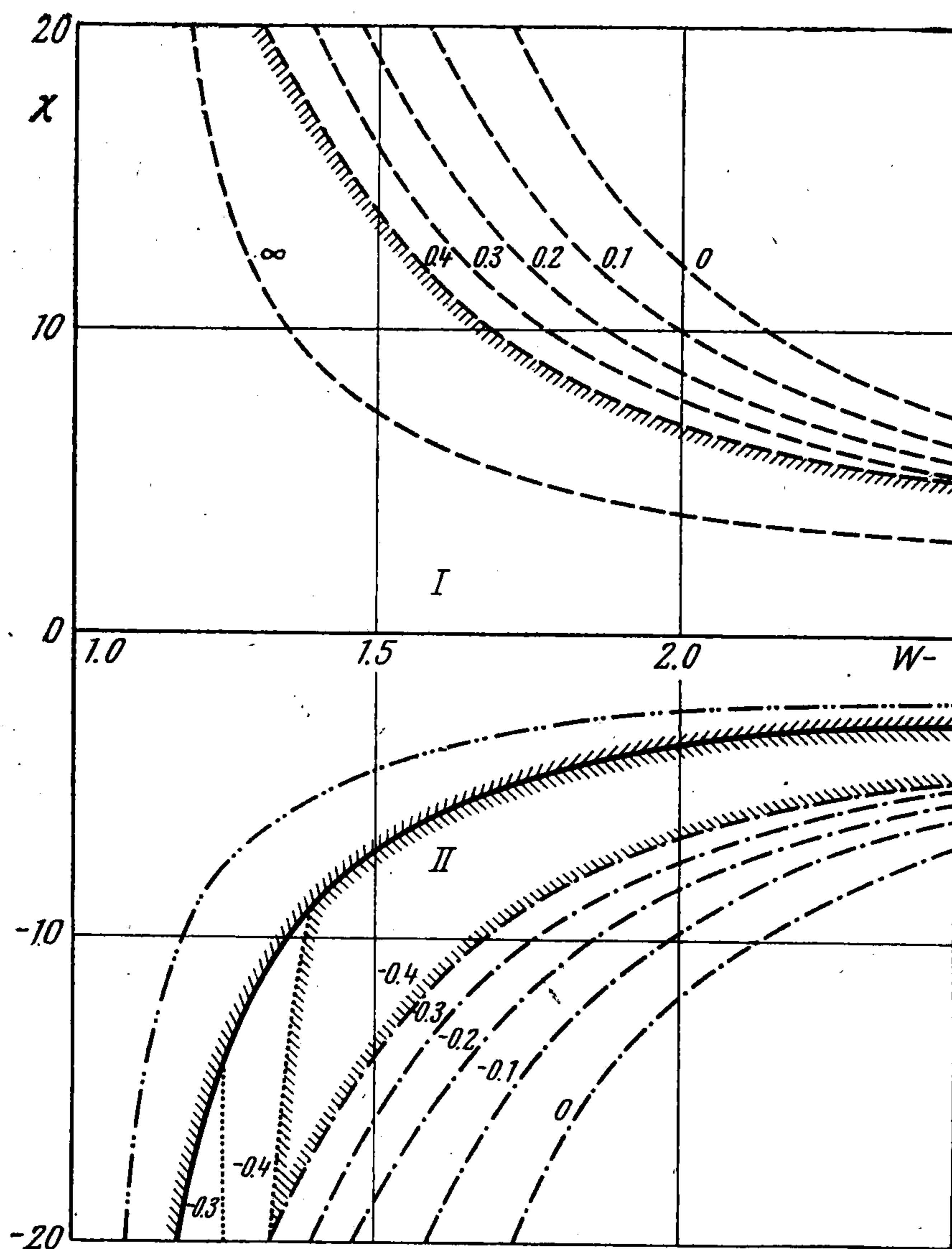
Отметим одно существенное обстоятельство. Исходная линеаризованная задача при отсутствии отражения энтропийных волн ( $\chi' = 0$ ) содержит семь параметров: коэффициенты  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $\mu$  и  $\beta$ , которые входят в условия (2.6) на разрыве, величину  $Y$ , характеризующую форму канала в сечении  $x = 0$ , время запаздывания  $\tau$  и коэффициент отражения  $R$ -волн от сечения выхода  $\chi$ . В согласии с (3.6) поведение течения определяется не каждым из этих параметров, а тремя их комбинациями:  $\varphi_0 = \chi\varphi$ ,  $p = -p_0Y$  и  $q = -q_0\chi Y$ , где  $p_0 = \tau\beta_0$  и  $q_0 = \tau(\mu_0\psi - \beta_0\varphi)$ , как и  $\varphi$  — функции  $\kappa$ , параметров газа перед разрывом (в случае скачка уплотнения — числа Маха  $M_-$ ) и типа разрыва. При заданных потоке перед разрывом, типе разрыва и величинах  $Y$  и  $\chi$  всегда можно проверить условия (3.6), выполнение которых гарантирует устойчивость исследуемого стационарного режима. Если вместо какого-нибудь неравенства из (3.6) получается точное равенство, то характеристическое уравнение (3.4) имеет корни с нулевыми действительными частями, в общем случае отличные от  $\lambda = 0$ . При этом для выяснения вопроса о поведении решения требуются дополнительные исследования. Изменение хотя бы одного из неравенств (3.6) на обратное свидетельствует о неустойчивости исходного стационарного потока.

В соответствии со сказанным, условия (3.6) позволяют построить в пространстве определяющих параметров задачи области устойчивых и неустойчивых режимов течения. В качестве иллюстрации на фиг. 2 приведены результаты подобного построения в случае замыкающего скачка уплотнения в совершенном газе с  $\kappa = 1.4$ . Построение проведено в плоскости  $\chi W_-$ , где  $W_-$  — отношение скорости потока перед скачком к критической скорости (на стационарном режиме). В целях удобства описания этих результатов пронумеруем уравнения, которые можно получить, если заменить знаки неравенств в (3.6) знаками равенств, присвоив им в порядке следования в (3.6) номера (3.6.1), . . . , (3.6.4).

Пусть скачок локализован в сечении, где канал расширяется ( $Y > 0$ ). Тогда нижней границей области устойчивых режимов является сплошная кривая на фиг. 2, форма и положение которой не зависит от величины  $Y$ . Уравнение этой кривой:  $\chi = -p_0 / q_0$  легко получается из (3.6.3). Кривые, образующие верхнюю границу области устойчивых режимов, зависят от  $Y$ . Для  $Y = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$  и  $\infty$  указанные кривые даны на фиг. 2 штрихами (цифры около кривых — значения  $Y$ ). При  $Y = 0$  верхняя граница дается уравнением  $\chi = 1 / \varphi$ , которое для этого значения  $Y$  получается как из (3.6.1), так и из (3.6.4). Границы, отвечающие  $Y \neq 0$ , определяются уравнением (3.6.4) и монотонно смещаются вниз с ростом  $Y$ . По этой причине на фиг. 2 приведена также предельная кривая, соответствующая  $Y = \infty$ . Указанная кривая дается уравнением  $\chi = p_0 / q_0$ . Так как квазицилиндрическое приближение пригодно лишь при достаточно малых  $Y$ , то в любом случае, когда еще справедливо использованное приближение, верхняя граница области устойчивых режимов располагается над этой кривой.

Для сужающегося канала ( $Y < 0$ ) область устойчивых режимов в противоположность случаю  $Y > 0$  расположена под сплошной кривой. Слева область устойчивости ограничена частично сплошной кривой,

а частично кривой:  $\chi = (1 + p_0 Y) / \varphi$ , уравнение которой получается из (3.6.2). В пределах изменения  $\chi$  на фиг. 2 соответствующий участок границы появляется лишь для достаточно больших  $|Y|$ . Для  $Y = -0.3$  и  $-0.4$  такие участки изображены на фиг. 2 пунктиром. Нижние границы области устойчивости при  $Y < 0$  зависят от величины  $Y$  и для пяти значений  $Y$  нанесены штрихпунктиром. При  $Y = 0$  эта граница дается уравнением:  $\chi = -1 / \varphi$ , которое есть следствие как (3.6.1), так и (3.6.4).

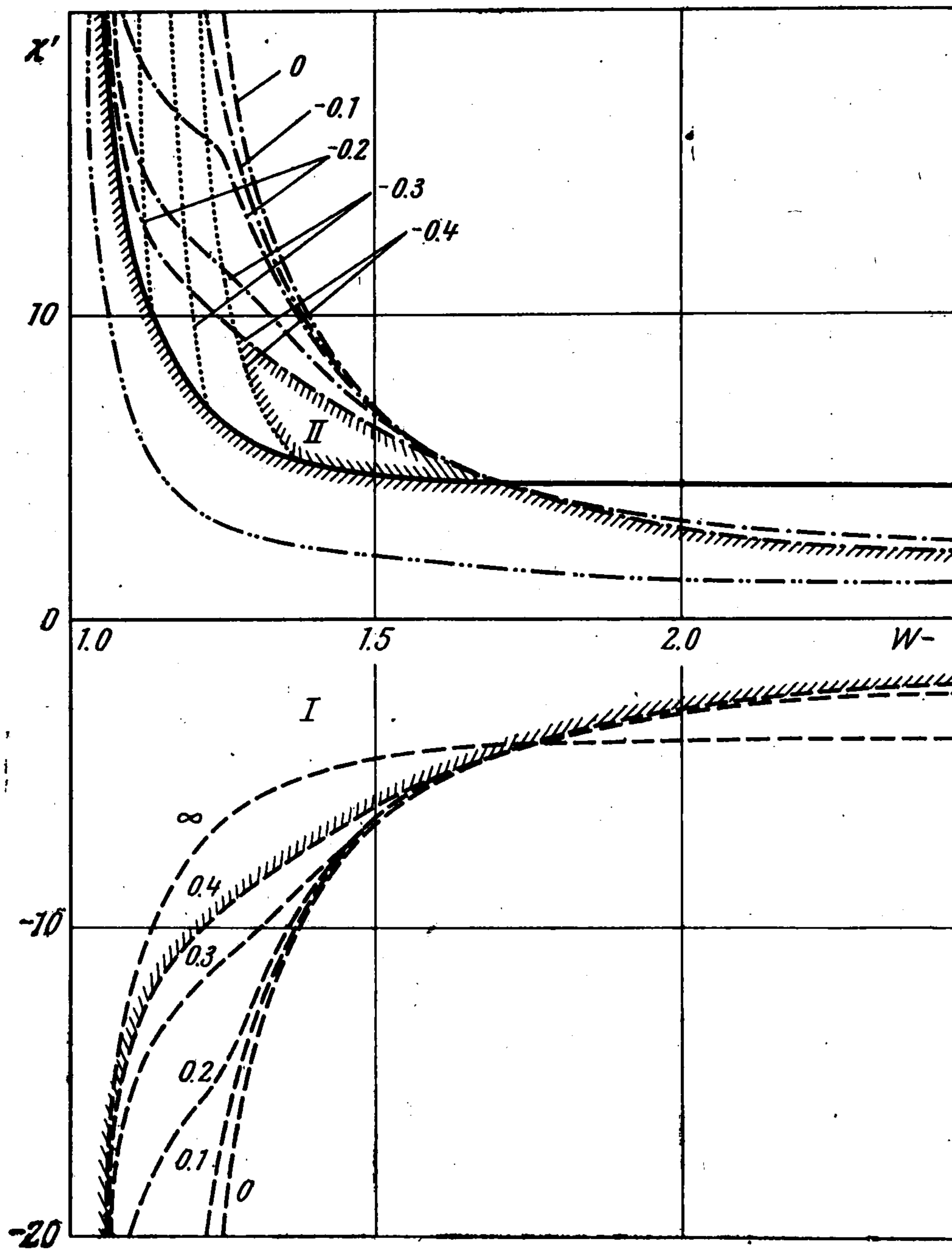


Фиг. 2

При  $Y < 0$  нижние границы определяются уравнением (3.6.4), в силу которого они смещаются вверх и при  $Y = -\infty$  совпадают со сплошной кривой. На самом деле область устойчивых режимов исчезает гораздо раньше из-за смещения вправо и вниз левой границы (т. е. пунктирной кривой). Для пояснения сказанного выше на фиг. 2 изнутри заштрихованы границы областей I и II, являющихся областями устойчивости в случаях  $Y = 0.4$  и  $Y = -0.4$  соответственно.

Проведенное выше исследование легко переносится на случай, когда от сечения выхода отражаются только энтропийные волны, т. е. в (2.8)  $\chi = 0$ , а  $\chi' \neq 0$ . При этом сохраняются все полученные выше условия, если в них заменить  $\chi$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\tau$  на  $\chi'$ ,  $\varphi'$ ,  $\psi'$  и  $\tau' = 1 / (1 - M_+)$ , где для замыкающего скачка  $\varphi'$  и  $\psi'$  находятся по (2.7). В плоскости  $\chi'W_-$  результаты соответствующего исследования приведены на фиг. 3, на которой различные кривые (сплошные, штриховые и т. п.), а также области I и

II имеют тот же смысл, что и на фиг. 2. Наиболее существенное различие между этими фигурами состоит в том, что кривые, расположенные на фиг. 2 над (под) осью абсцисс, на фиг. 3 находятся под (над) указанной осью. Кроме того, в случае отражения энтропийных волн имеют место пересечения кривых, которых нет на фиг. 2.



Фиг. 3

4. Использование условий (3.5), а для  $\kappa = 1.4$  фиг. 2 и 3 позволяет для широкого класса граничных условий в сечении выхода решать вопрос об устойчивости стационарного течения в квазицилиндрическом канале с замыкающим скачком уплотнения.

В качестве примера рассмотрим ряд конкретных способов задания этих условий. Полному отсутствию отражения возмущений от сечения выхода ( $\chi = \chi' = 0$  при всех  $W_-$ ) отвечает ось абсцисс, целиком лежащая в области I, как на фиг. 2, так и на фиг. 3. Следовательно, в этом случае течение с замыкающим скачком в расширяющемся (сужающемся) канале устойчиво (неустойчиво). Как уже отмечалось, данный вывод впервые был сделан Г. Г. Черным еще в 1953 г. и может быть получен непосредственно из (2.6), (2.8) и (2.2) или из уравнений (3.1) и (3.3), которые в этом случае принимают вид

$$x_s'(t) = -\beta_0 Y x_s(t), \quad L_+(t) = 0$$

Отсюда, учитывая (2.8) с  $\chi = \chi' = 0$ , найдем, что

$$(4.1) \quad x_s(t) = x_s(t_0) \exp\{\beta_0 Y(t_0 - t)\}, \quad L_+(t) \equiv 0$$

Как показывают расчеты с использованием формул (2.7),  $\beta_0$  положительно для всех  $W_-$  и  $\kappa$ . Поэтому в согласии с (4.1) при  $Y > 0$  течение устойчиво, а при  $Y < 0$  неустойчиво. Данный вывод справедлив и для ряда других граничных условий в сечении  $x = 1$ . Так, если в сечении выхода фиксировано давление, то в согласии с (2.5) и (2.8)  $\chi = 1$ ,  $\chi' = 0$  для всех  $W_-$ . Как видно из фиг. 2, прямая  $\chi = 1$  целиком лежит в области I.

Если на выходе из канала фиксируется число Маха или расход газа, то коэффициенты отражения в (2.8) оказываются равными:  $\chi = [(\kappa - 1)M_+ - 2] / [(\kappa - 1)M_+ + 2]$ ,  $\chi' = 1 / \kappa [(\kappa - 1)M_+ + 2]$  и  $\chi = (M_+ + 1) / (M_+ - 1)$ ,  $\chi' = 1 / \kappa (1 - M_+)$  соответственно. В первом случае оба коэффициента отражения во всем диапазоне  $W_-$  по модулю меньше единицы. Поэтому кривые  $\chi = \chi(W_-)$  и  $\chi' = \chi'(W_-)$  по-прежнему попадают в области I на фиг. 2 и 3. Аналогичные зависимости для условия постоянства расхода показаны на фиг. 2 и 3 двойным штрих-пунктиром. Хотя соответствующие кривые расположены ближе к границе области I, чем в предыдущих случаях, однако и здесь для всех  $W_-$  они не выходят из нее (в том числе и при  $W_- \rightarrow 1$ , когда  $\chi \rightarrow -\infty$ , а  $\chi' \rightarrow \infty$ ). Отметим, что все сказанное выше оказалось справедливым для всех  $\kappa$  от 1.1 до  $5/3$ .

Следует подчеркнуть, что полное исследование устойчивости в двух последних случаях требует рассмотрения не отдельного, а одновременного отражения  $R$ - и  $S$ -волн. Последнее, как можно показать, сводится к анализу корней характеристического уравнения

$$(4.2) \quad pe^z + q - z(e^z - \varphi'_0 e^{kz}) + \varphi_0 z + (q'\tau / \tau') e^{kz} = 0 \quad (k = (\tau - \tau') / \tau)$$

Здесь  $\varphi'_0$  и  $q'$  получаются из  $\varphi_0$  и  $q$  после замены  $\chi$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\tau$  на  $\chi'$ ,  $\varphi'$ ,  $\psi'$  и  $\tau'$ .

Характеристическое уравнение (4.2) отвечает системе трех дифференциально-разностных уравнений с двумя запаздываниями  $\tau$  и  $\tau'$  и является более сложным, чем, например, характеристическое уравнение подобного типа, полученное в [3]. В [3] левая часть характеристического уравнения есть квазиполином без главного члена, что, как известно [15], свидетельствует о неустойчивости решения при любых значениях прочих констант, входящих в уравнение. Заметим, кстати, что в [3] данное обстоятельство замечено не было. Это привело к неверному выводу о наличии в рамках предложенной в [3] двухфронтной модели устойчивых режимов детонационного горения. Для несколько отличной двухфронтной модели детонационной волны вывод об отсутствии устойчивых режимов детонационного горения сделан в [16], а для модели, принятой в [3], — в работе [17]. В [16], как и в данной работе для (3.5), удалось получить необходимое и достаточное условие неположительности действительных частей корней соответствующего характеристического уравнения. В случае (4.2) формулировка подобных условий представляется затруднительной. Тем не менее, для фиксированных  $W_-$ ,  $Y$  и  $\kappa$  необходимый анализ можно выполнить численно при помощи « $D$ -разбиения» [18, 19].

Не останавливаясь на подробностях соответствующего анализа, который может составить предмет специального исследования, отметим следующее. В согласии с данными фиг. 2 и 3 область устойчивых режимов в плоскости  $\chi\chi'$  для  $Y > 0$  и любого фиксированного  $W_-$  занимает некоторую окрестность начала координат ( $\chi = \chi' = 0$ ). Представление о размерах этой области по осям  $\chi$  и  $\chi'$  плоскости  $\chi\chi'$  дают граничные кривые, изображенные на фиг. 2 и 3, причем при  $W_- \rightarrow 1$  соответствующие точки уходят в бесконечность. В случае, когда в сечении выхода из канала фиксируется число Маха, коэффициенты  $\chi$  и  $\chi'$ , как уже отмечалось, по модулю не превосходят единицу. Сравнение их величин с граничными значениями, взятыми с фиг. 2 и 3, показывает, что в указанных случаях вряд ли приходится ожидать неустойчивости (устойчивости) течения с замыкающим скачком в расширяющемся (сужающемся) канале. Большие значения соответствующих коэффициентов для фиксированного расхода газа не позволяют с той же степенью уверенности сделать аналогичный вывод и в этом случае.

Сделаем несколько замечаний общего характера. Во-первых, необходимо подчеркнуть ограниченность использованного в работе квазицилиндрического приближения. Поэтому не исключено, что в случае каналов, для которых условия квазицилиндричности не выполняются, сформулированные выше выводы могут нарушаться. Последнее, в частности, относится к возможной неустойчивости течения с замыкающим скачком в расширяющемся канале. Второе замечание связано с ограниченностью линейного приближения в случаях, когда его использование приводит к заключению о неустойчивости течения. Данное обстоятельство особенно существенно при околосвуковых скоростях.

Авторы благодарят Г. Г. Черного, Р. К. Тагирова, В. А. Левина и Ф. А. Слободкину за полезные обсуждения и советы, а Л. П. Фролову — за помощь в работе.

Поступила 28 V 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Цыпкина О. Э. Движение газа в каналах конечной длины при переменном противодавлении. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 3.
2. Цыпкина О. Э. Об автоколебаниях в сверхзвуковых диффузорах. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 5.
3. Черный Г. Г. Возникновение колебаний при ослаблении волн детонации. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
4. Кантровиц А. Одномерные неустановившиеся течения. В кн.: Основы газовой динамики. М. Изд-во иностр. лит., 1963, стр. 325—385.
5. Oswatitsch K. Gasdynamik. Wien, Springer-Verlag, 1952.
6. Раушенбах Б. В. Вибрационное горение. М., Физматгиз, 1961.
7. Слободкина Ф. А. Устойчивость квазиодномерных магнитогидродинамических течений. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
8. Слободкина Ф. А. Об устойчивости скачка уплотнения в магнитогазодинамических каналах. ПМТФ, 1970, № 1.
9. Глазнев В. Н. Устойчивость течения за ударной волной, расположенной в канале переменного сечения. Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1973, № 13, вып. 3.
10. Губарев А. В., Дегтярев Л. М., Фаворский А. П. Некоторые особенности сверхзвукового течения электропроводного газа в МГД-канале. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 3.
11. Mays R. A. Inlet dynamics and compressor surge. AIAA Paper, 1969, No. 484.
12. Гринь В. Т., Иванов М. Я., Крайко А. Н. Исследование динамики течения торможения идеального газа с замыкающим скачком уплотнения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 4.
13. Гринь В. Т., Иванов М. Я. К исследованию нестационарного течения в канале при внезапном изменении условий в выходном сечении. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 4.
14. Гринь В. Т., Иванов М. Я., Князева Н. Н., Корзун А. П., Крайко А. Н. К исследованию динамики течения торможения сверхзвукового потока идеального газа в каналах с продольными перегородками. Уч. зап. ЦАГИ, 1971, т. 2, № 4.
15. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М., «Мир», 1967.
16. Ларин О. Б., Левин В. А. Исследование ослабления волны детонации с двухфронтной структурой методом пограничного (ударного) слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 3.
17. Cherny G. G. Lectures on the theory of exothermic flows behind shock waves, Udine, Springer, 1973.
18. Чеботарев Н. Г., Мейман Н. Н. Проблема Раусса — Гурвица для полиномов и целых функций. Тр. Матем. ин-та, т. 26. М., Изд-во АН СССР, 1949.
19. Айзерман М. А. Лекции по теории автоматического регулирования. М., Гостехиздат, 1956.