

**АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ СИЛ
В ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧЕ
В УСЛОВИЯХ «ЗАКОНА ЛОКАЛЬНОСТИ»**

А. И. Бунимович, В. Г. Чистилинов

(Москва)

Получено аналитическое решение задачи об определении аэродинамических сил (лобового сопротивления, подъемной и боковой силы), действующих на произвольное пространственное тело, движение которого удовлетворяет условиям закона локальности. Закон локальности предполагает, что тело выпукло и импульс, действующий на элемент поверхности, зависит только от режима обтекания и местного угла между скоростью и нормалью к поверхности. Этот закон успешно применяется во многих областях аэродинамики и динамики полета. Частными случаями закона локальности являются, например, различные модификации закона сопротивления Ньютона, законы, определяющие силовое воздействие разреженного газа на летящее со сверхзвуковой скоростью тело, воздействие на тело светового давления. В качестве примера рассматривается задача о расчете аэродинамических характеристик эллиптического конуса.

1. Рассмотрим обтекание тела в условиях закона локальности [1], т. е. будем считать, что тело выпукло и импульс, действующий на элемент поверхности, зависит только от режима обтекания и местного угла между внутренней нормалью к поверхности n и единичным вектором скорости потока v .

В рамках этой теории безразмерный импульс, отнесенный к скоростному напору $\rho V^2 / 2$ или его проекции на естественные координаты — локальное давление p и касательное напряжение τ — можно представить в форме

$$(1.1) \quad p = \sum_{k=1}^R A_k (v \cdot n)^k, \quad \tau = (v \cdot t) \sum_{k=1}^{R-1} B_k (v \cdot n)^k$$

Здесь t — орт касательной к элементу поверхности, лежащий в плоскости векторов v и n , R — степень аппроксимирующего полинома, $(A_k, B_k) = f_k(M, Re, T_w)$ — коэффициенты, зависящие от режима обтекания, которые могут быть получены на основе известных теоретических или экспериментальных представлений.

Выберем систему независимых углов α и φ , определяемую соотношениями (эта система углов использовалась в работе [1] для случая обтекания тел вращения)

$$\cos \alpha = (v \cdot i_1), \quad \operatorname{tg} \varphi = -(v \cdot i_3) / (v \cdot i_2)$$

где i_1, i_2, i_3 — орты связанной с телом системы осей. Тогда

$$(1.2) \quad v = i_1 \cos \alpha + i_2 \sin \alpha \cos \varphi - i_3 \sin \alpha \sin \varphi$$

Безразмерный коэффициент суммарной аэродинамической силы, действующей на пространственное тело, движущееся в потоке газа или света

$$(1.3) \quad c_F = c_x \mathbf{v} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k}$$

где c_x, c_y, c_z — безразмерные коэффициенты лобового сопротивления, подъемной и боковой сил соответственно, $\mathbf{v}, \mathbf{j} = \mathbf{v}_\alpha / |\mathbf{v}_\alpha|, \mathbf{k} = \pm \mathbf{v}_\varphi / |\mathbf{v}_\varphi|$ — орты скоростной системы координат.

В работе [1] были получены дифференциальные соотношения для c_F . В переменных α, φ для произвольного пространственного тела, движение которого удовлетворяет допущениям закона локальности, и произвольного вида разложения (1.1) локального импульса из соотношений работы [1], используя формулы (1.2), (1.3) и вводя «приведенный» коэффициент лобового сопротивления

$$(1.4) \quad c_x^1(\alpha, \varphi) = c_x(\alpha, \varphi) + N_R$$

получим для определения коэффициентов аэродинамических сил уравнение в частных производных второго порядка эллиптического типа (1.5) и соотношения (1.6)

$$(1.5) \quad L[c_x^1] = \csc^2 \alpha c_{x\varphi\varphi}^1 + c_{x\alpha\alpha}^1 + \operatorname{ctg} \alpha c_{x\alpha}^1 + (R+1)(R+2)c_x^1 = \\ = (R+1)\Psi_R$$

$$(1.6) \quad c_{x\alpha}^1 = (R+1)c_y, \quad c_{x\varphi}^1 = -(R+1)c_z \sin \alpha$$

Здесь

$$c_{x\delta}^1 = \partial c_x^1 / \partial \delta \quad (\delta = \alpha, \varphi), \quad \Psi_R = \Phi_R + (R+2)N_R$$

$$N_R = \frac{1}{S_R} \int_{S^*} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \left\{ \frac{R-1}{2} A_1 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + \sum_{k=1}^{R-1} \left[(A_{k+1} - \right. \right. \\ \left. \left. - B_k) \frac{R-k-1}{k+2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^{k+1} - B_k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^{k-1} \right] \right\} dS$$

$$\Phi_R = \frac{1}{S_R} \int_{S^*} \left\{ A_1 + (R-1) A_1 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2 + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{R-1} [(A_{k+1} - B_k) \{ (R-k-1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^{k+2} + (k+1)(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^k \} + \right. \\ \left. + (R+2) B_k (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^k \right\} dS$$

S_R — характерная площадь, а интегрирование проводится по площади «освещенной» поверхности S^* , определяемой условием $(\mathbf{v}\mathbf{n}) \geq 0$.

Отметим, что замена (1.4) значительно улучшает гладкость правой части уравнения для c_x , что имеет существенное значение при решении этого уравнения. Полученная система уравнений позволяет включать аэродинамические силы в общую систему динамических уравнений. Эти соотношения могут быть использованы при экспериментальных и расчетных исследованиях, так как после определения только одной из составляющих аэродинамических сил остальные составляющие легко вычислить по формулам (1.6).

Система (1.5), (1.6) дает возможность получить аналитическое решение задачи об определении аэродинамических сил, действующих на пространственные тела во всем

диапазоне углов α, φ . Это решение может быть использовано также в задачах об оптимизации и об установлении обобщенных законов подобия при обтекании тел в условиях закона локальности [2].

2. Задача определения аэродинамических характеристик произвольного пространственного тела сводится к решению уравнения (1.5). Математическую постановку задачи можно сформулировать следующим образом. Требуется найти функцию $c_x^1(\alpha, \varphi)$ на сфере единичного радиуса, непрерывную и ограниченную во всех точках сферы.

В переменных α, φ , которые являются аналогом сферической системы координат, сфера преобразуется в прямоугольник с границами $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \alpha \leq \pi$.

Естественные граничные условия — условия периодичности решения на совпадающих меридианах $\varphi = 0$ и $\varphi = 2\pi$ на сфере и условия ограниченности решения в полюсах сферы $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$ — имеют вид

$$(2.1) \quad c_x^1(\alpha, \varphi)|_{\varphi=0} = c_x^1(\alpha, \varphi)|_{\varphi=2\pi}, \quad c_{x\varphi}^1|_{\varphi=0} = c_{x\varphi}^1|_{\varphi=2\pi}, \\ |\lim_{\alpha \rightarrow 0} c_x^1(\alpha, \varphi)| < \infty, \quad |\lim_{\alpha \rightarrow \pi} c_x^1(\alpha, \varphi)| < \infty$$

Решение краевой задачи (1.5), (2.1), ищется методом разложения по собственным функциям соответствующей однородной задачи.

Уравнение для собственных значений и собственных функций оператора $L[c_x^1]$ имеет вид

$$(2.2) \quad c_{x\varphi\varphi}^1 \csc^2 \alpha + c_{x\alpha\alpha}^1 + c_{x\alpha}^1 \operatorname{ctg} \alpha + (R+1)(R+2)c_x^1 + \lambda c_x^1 = 0$$

Краевая задача (2.1), (2.2) соответствует сингулярному случаю краевой задачи для эллиптического уравнения, и граничные условия (2.1) этой задачи эквивалентны однородным граничным условиям.

Уравнение (2.2) допускает разделение переменных, поэтому решение ищется в форме $c_x^1(\alpha, \varphi) = w(\varphi)v(\alpha)$. Разделяя переменные в уравнении (2.2) и граничных условиях (2.1), получаем для функции $w(\varphi)$ задачу Штурма — Лиувилля с условием периодичности решения на концах интервала интегрирования $\varphi [0, 2\pi]$

$$w''(\varphi) + \mu w(\varphi) = 0 \\ w(\varphi)|_{\varphi=0} = w(\varphi)|_{\varphi=2\pi}, \quad w'(\varphi)|_{\varphi=0} = w'(\varphi)|_{\varphi=2\pi}$$

Собственные значения этой задачи $\mu_0 = 0, \mu_m = m^2 (m = 1, 2, \dots)$, а соответствующие им собственные функции

$$w_0(\varphi) = 1, \quad w_m(\varphi) = \begin{cases} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

образуют полную систему ортогональных функций на отрезке $\varphi [0, 2\pi]$ и ограничены на этом отрезке.

Для функции $v(\alpha)$ при каждом μ_m получаем сингулярный случай однородной краевой задачи о собственных функциях с условием ограниченно-

сти решения на концах интервала интегрирования $\alpha[0, \pi]$.

$$(2.3) \quad v''(\alpha) + \operatorname{ctg} \alpha \cdot v'(\alpha) + \left[(R+1)(R+2) + \lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \alpha} \right] v(\alpha) = 0$$

$$(2.4) \quad \left| \lim_{\alpha \rightarrow 0} v(\alpha) \right| < \infty, \quad \left| \lim_{\alpha \rightarrow \pi} v(\alpha) \right| < \infty$$

Заменой переменных $x = \cos \alpha$ уравнение (2.3) сводится к обобщенному уравнению Лежандра, решение которого существует при любых комплексных λ и m [3]. При целых положительных m решения, удовлетворяющие граничным условиям (2.4), существуют лишь при

$$(2.5) \quad \lambda_n = n(n+1) - (R+1)(R+2), \quad n = m, m+1, m+2, \dots$$

и являются «присоединенными» полиномами Лежандра m -го порядка ($P_n(x)$ — обычные полиномы Лежандра)

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}, \quad n = m, m+1, m+2, \dots$$

Таким образом, для каждого m краевая задача (2.3), (2.4) имеет собственные значения λ_n (2.5) и соответствующую им систему ортогональных собственных функций. Следовательно, вся совокупность собственных значений линейного оператора $L[c_x^1]$ при граничных условиях (2.1) есть

$$(2.6) \quad \lambda_n = n(n+1) - (R+1)(R+2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ей соответствует полная замкнутая система собственных функций $c_{x_m, n}^1$, ортогональных в области $0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$(2.7) \quad c_{x_0, n}^1 = P_n(\cos \alpha), \quad c_{x_m, n}^1 = P_n^m(\cos \alpha) \begin{cases} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\ m = 1, 2, \dots, n$$

3. Для решения неоднородного уравнения (1.5) с граничными условиями (2.1) раскладываем функцию $\Psi_R(\alpha, \varphi)$ в области $0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \alpha \leq \pi$ в сходящийся ряд Лапласа по собственным функциям (2.7), используя полноту собственных функций в этой области и достаточную гладкость функции $\Psi_R(\alpha, \varphi)$:

$$(3.1) \quad \Psi_R(\alpha, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{0, n} P_n(\cos \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (b_{m, n} \cos m\varphi + \\ + a_{m, n} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \alpha)$$

$$b_{0, n} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_R(\alpha, \varphi) P_n(\cos \alpha) \sin \alpha d\varphi d\alpha$$

$$(3.2) \quad a_{m, n} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_R(\alpha, \varphi) P_n^m(\cos \alpha) \sin m\varphi \sin \alpha d\varphi d\alpha$$

$$b_{m, n} = \frac{2n+1}{2\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Psi_R(\alpha, \varphi) P_n^m(\cos \alpha) \cos m\varphi \sin \alpha d\varphi d\alpha$$

$$m = 1, 2, \dots, n$$

Решение неоднородной задачи также ищется в виде ряда Лапласа с неопределенными коэффициентами $c_{m,n}$, $d_{m,n}$

$$(3.3) \quad c_x^1(\alpha, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{0,n} P_n(\cos \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n (c_{m,n} \cos m\varphi + d_{m,n} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \alpha)$$

Собственное значение $\lambda_{R+1} = 0$, поэтому как показано в работе [4], при произвольной правой части $\Psi_R(\alpha, \varphi)$ уравнения (1.5) решения задачи не существует.

Чтобы решение существовало, необходимо наложить дополнительное условие на функцию $\Psi_R(\alpha, \varphi)$, потребовав, чтобы коэффициенты разложения этой функции в ряд (3.2), соответствующие собственному значению λ_{R+1} , равнялись нулю, т. е.

$$(3.4) \quad b_{0,R+1} = b_{m,R+1} = a_{m,R+1} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, R+1$$

Как показал проведенный анализ функции $\Psi_R(\alpha, \varphi)$ и конкретные расчеты, функция Ψ_R для рассматриваемого класса задач удовлетворяет условию (3.4). Однако в этом случае произвольная линейная комбинация собственных функций (2.7), соответствующих собственному значению $\lambda_{R+1} = 0$, представляемая в форме

$$(3.5) \quad Y_{R+1} = k_{0,R+1} P_{R+1}(\cos \alpha) + \sum_{m=1}^{R+1} (k_{m,R+1} \cos m\varphi + H_{m,R+1} \sin m\varphi) P_{R+1}^m(\cos \alpha)$$

где $k_{0,R+1}$, $k_{m,R+1}$, $H_{m,R+1}$ — произвольные константы, также будут удовлетворять данной задаче.

Очевидно, что функция Y_{R+1} по существу является общим решением соответствующей однородной задачи (1.5), (2.1).

Решение краевой задачи (1.5), (2.1) становится неединственным и содержит в общем случае $[2(R+1) + 1]$ констант интегрирования, которые должны быть определены из физических условий конкретной задачи.

Остальные коэффициенты решения (3.3) определяются через коэффициенты (3.2) разложения функции $\Psi_R(\alpha, \varphi)$ и собственные значения λ_n по формулам

$$(3.6) \quad c_{m,n} = \frac{(R+1) b_{m,n}}{[(R+1)(R+2) - n(n+1)]}, \quad d_{m,n} = \frac{(R+1) a_{m,n}}{[(R+1)(R+2) - n(n+1)]}$$

Следовательно, окончательное решение задачи об определении коэффициента лобового сопротивления для произвольного пространственного тела, удовлетворяющего закону локальности при произвольном виде разложения локального импульса (1.1) во всем диапазоне изменения углов α и φ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \alpha \leq \pi$), будет иметь вид

$$(3.7) \quad c_x^1(\alpha, \varphi) = Y_{R+1} + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq R+1}}^{\infty} c_{0,n} P_n(\cos \alpha) + \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq R+1}}^{\infty} \sum_{m=1}^n (c_{m,n} \cos m\varphi + d_{m,n} \sin m\varphi) P_n^m(\cos \alpha)$$

Отметим, что близкое по форме решение в иной системе переменных, без общей постановки и анализа краевой задачи, выписано в работе [5] для одного частного случая (ньютоновского закона сопротивления), когда разложение (1.1) содержит лишь один отличный от нуля коэффициент $A_2 \neq 0$.

Константы интегрирования в выражении (3.7) можно искать из решения системы линейных алгебраических уравнений, которая получается из (3.7) при известных значениях левой части по расчетным или экспериментальным данным в $[2(R+1)+1]$ точках.

Как показал анализ результатов расчета конкретных тел, определение констант интегрирования по экспериментальным данным в значительной мере компенсирует неточности «метода локальности».

Дополнительные условия, связанные с симметрией течения, существенно упрощают полученное решение (3.7) и уменьшают число констант интегрирования.

4. Большинство реальных аэродинамических тел имеют одну или несколько плоскостей симметрии.

Если $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$ — плоскость симметрии обтекаемого тела, то несимметричные члены в решении (3.7) и выражениях (3.1) и (3.5) обратятся в нуль. $a_{m,n} = d_{m,n} = H_{m,n} = 0$, решение будет содержать $(R+2)$ константы интегрирования и примет вид

$$(4.1) \quad c_x^1(\alpha, \varphi) = \sum_{m=0}^{R+1} k_{m, R+1} \cos m\varphi P_{R+1}^m(\cos \alpha) + \sum_{\substack{n=0 \\ n \neq R+1}}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_{m,n} \cos m\varphi P_n^m(\cos \alpha)$$

Если плоскостью симметрии является плоскость $\varphi = \pm \pi/2$, то решение принимает вид

$$(4.2) \quad c_x^1(\alpha, \varphi) = \sum_{m=0}^{[(R+1)/2]} k_{2m, R+1} \cos 2m\varphi P_{R+1}^{2m}(\cos \alpha) + \\ + \sum_{m=0}^{[R/2]} H_{2m+1, R+1} \sin(2m+1)\varphi P_{R+1}^{2m+1}(\cos \alpha) + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{m=0}^{[n/2]} c_{2m,n} \cos 2m\varphi P_n^{2m}(\cos \alpha) + \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{[(n-1)/2]} d_{2m+1,n} \sin(2m+1)\varphi P_n^{2m+1}(\cos \alpha) \right\} \quad n \neq R+1$$

Число коэффициентов, необходимых для расчета, в решении (4.2) сокращается в два раза по сравнению с общим решением (3.7).

Число констант интегрирования ($k_{2m, R+1}$, $H_{2m+1, R+1}$) равно $(R+2)$.

Если обтекаемое тело имеет две плоскости симметрии $\varphi = 0$, π и $\varphi = \pm \pi/2$, то решение (3.7) существенно упрощается (в (4.2) будут отсутствовать вторая и четвертая суммы) и число констант интегрирования сокращается до $[1 + R/2]$.

Необходимо отметить, что изложенный общий метод построения решения (3.7) неоднородного эллиптического уравнения (1.5) с граничными условиями (2.1) не исключает возможности нахождения решения этого уравнения в иной форме в тех случаях, когда правая часть уравнения, функция $\Psi_R(\alpha, \varphi)$ имеет специальный вид, допускающий непосредственное определение частного решения $F(\alpha, \varphi)$ уравнения (1.5), удовлетворяющего условиям (2.1). В этом случае решение краевой задачи (1.5), (2.1) может быть

записано в виде

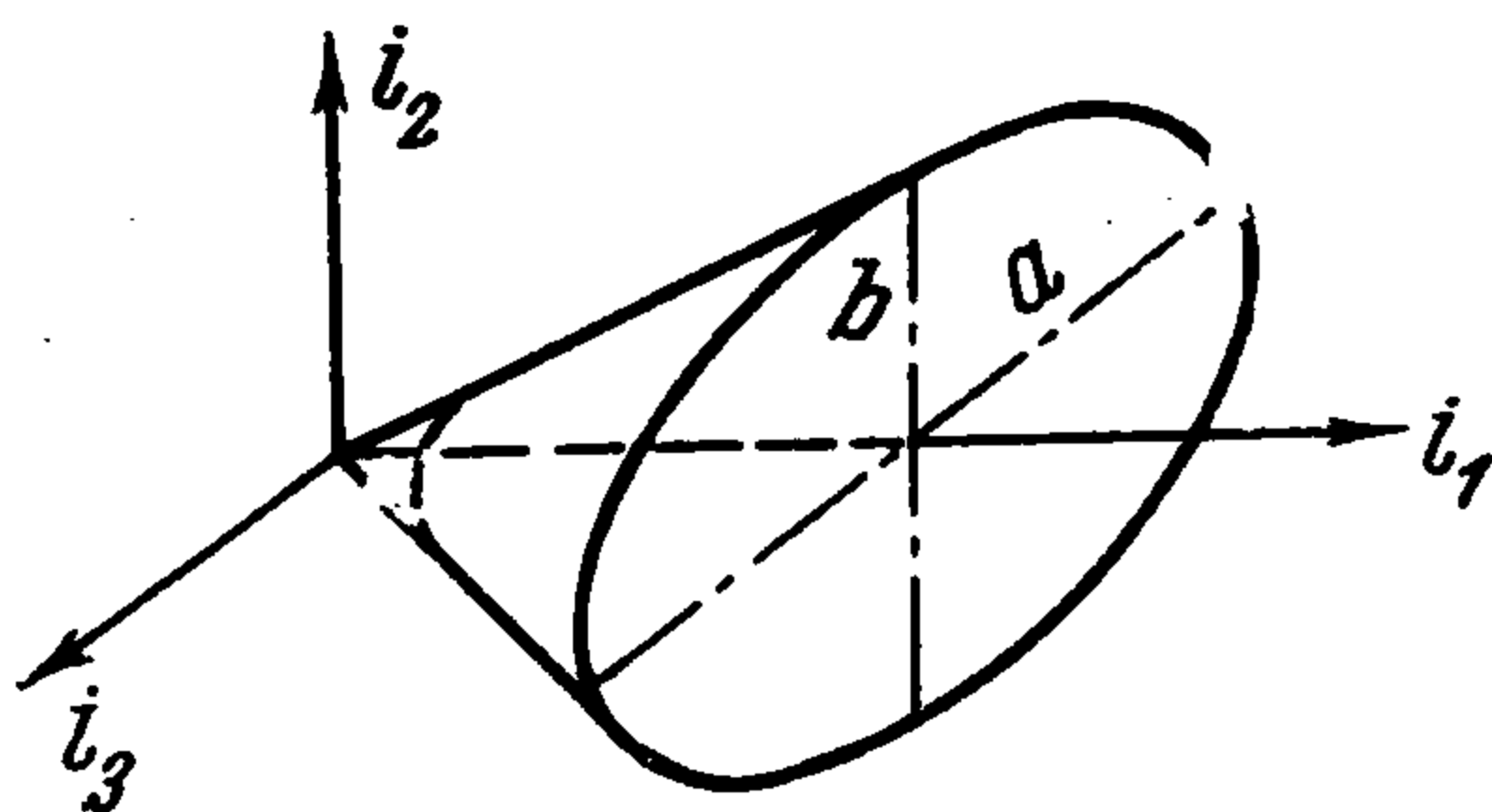
$$c_x^1(\alpha, \varphi) = Y_{R+1} + F(\alpha, \varphi)$$

5. В качестве примера определения аэродинамических характеристик пространственного тела приведем результаты расчета для эллиптического конуса (фигура).

Для упрощения расчетов рассматривался случай $R = 2$, $A_0 = A_1 = 0$. Разложение локального импульса (1.1) имеет вид

$$p = A_2 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})^2, \quad \tau = B_1 (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{t})$$

Выбор коэффициентов $A_2 = 2(2 - \sigma)$, $B_1 = 2\sigma_\tau$ (где σ , σ_τ — коэффициенты ак-



комодации соответственно нормального и касательного импульса) соответствует режиму свободно-молекулярного обтекания разреженным газом для диффузно-зеркальной схемы отражения. Выбор коэффициентов $A_2 = k$, $B_1 = 0$ соответствует гиперзвуковому ньютоновскому течению.

В диапазоне углов α , φ , при которых вся поверхность эллиптического конуса обтекается потоком, решение для «приведенного» коэффициента лобового сопротивления $c_x^1(\alpha, \varphi)$ имеет вид

$$c_x^1(\alpha, \varphi) = k_0 P_3(\cos \alpha) + k_2 \cos 2\varphi P_3^2(\cos \alpha) + \frac{3}{5}(A_2 - B_1) \cos \alpha$$

$$P_3(\cos \alpha) = \frac{1}{2}(5 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha), \quad P_3^2(\cos \alpha) = 15 \cos \alpha \sin^2 \alpha$$

Так как $N_2 = -B_1 \cos \alpha$, то в соответствии с (1.4) решение для физического коэффициента лобового сопротивления $c_x(\alpha, \varphi)$ запишется в форме

$$c_x(\alpha, \varphi) = k_0 P_3(\cos \alpha) + k_2 \cos 2\varphi P_3^2(\cos \alpha) + \frac{1}{5}(3A_2 + 2B_1) \cos \alpha$$

Константы интегрирования k_0 и k_2 определяются по известным расчетным или экспериментальным значениям $c_x^0(\alpha = 0)$ и $c_x^*(\alpha = \alpha^*, \varphi = 0)$, $P_3(\cos \alpha^*) = 0$.

$$k_0 = c_x^0 - \frac{1}{5}(3A_2 + 2B_1), \quad k_2 = \frac{c_x^* - \frac{1}{5}(3A_2 + 2B_1) \cos \alpha^*}{15 \sin^2 \alpha^* \cos \alpha^*}$$

Из соотношений (1.6) получаем решение для коэффициентов подъемной c_y и боковой c_z силы

$$c_y(\alpha, \varphi) = \frac{1}{3} c_{x_\alpha}^1 = \sin \alpha \left\{ \frac{k_0}{2} (1 - 5 \cos^2 \alpha) + \right.$$

$$\left. + 5k_2 \cos 2\varphi (\cos^2 \alpha + \cos 2\alpha) - \frac{1}{5}(A_2 - B_1) \right\}$$

$$c_z(\alpha, \varphi) = -\frac{1}{3 \sin \alpha} c_{x_\varphi}^1 = 10k_2 \sin 2\varphi \cos \alpha \sin \alpha$$

Поступила 24 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Бунимович А. И. Соотношения между силами, действующими на тело, движущееся в разреженном газе, в потоке света и в гиперзвуковом ньютоновском потоке. Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4.
2. Бунимович А. И., Дубинский А. В. Обобщенные законы подобия при обтекании тел в условиях закона локальности. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
3. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
4. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М., Изд-во АН СССР, 1948.
5. Pike J. Newtonian Aerodynamic forces from poisson's equation. AIAA Journal, 1973, vol. 11, No. 4.