Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 533.011.8

О ДИФФУЗИОННОМ СКОЛЬЖЕНИИ БИНАРНОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ

Б. М. Маркеев

(Москва)

На основе уравнения Больцмана исследуется задача о диффузионном скольжении бинарной газовой смеси. Функции распределения частиц, имеющих скорости, направленные к поверхности и от нее, выбираются различными. Решение кинетического уравнения для каждой из функций распределений ищется посредством разложения в ряд по полиномам Эрмита — Чебышева. Получена система уравнений переноса при произвольном законе взаимодействия между частицами газа. На основе точного решения этой системы получено выражение для скорости диффузионного скольжения, последнее обобщает известное выражение Крамерса и Кистемакера для скорости диффузионного скольжения. Показано существенное влияние закона взаимодействия частиц газа со стенкой на величину скорости скольжения.

Путем оценочных расчетов в предположении диффузионного отражения частиц от поверхности было выведено [1] известное выражение для скорости диффузионного скольжения

$$u_s = \left(\frac{M_\beta - M_\alpha}{y_\alpha M_\alpha + y_\beta M_\beta} - \frac{\sqrt{M_\beta} - \sqrt{M_\alpha}}{y_\alpha \sqrt{M_\alpha} + y_\beta \sqrt{M_\beta}}\right) D_{\alpha\beta} \frac{dy_\alpha}{dx} \tag{0.1}$$

$$M_\alpha = \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}, \quad y_\alpha = \frac{n_\alpha}{n_\alpha + n_\beta}$$

Здесь m_α — масса частиц сорта α, n_α — концентрация, $D_{\alpha\beta}$ — коэффициент взаимной диффузии. Величина диффузионной скорости, определяемая этим выражением, существенно зависит от разности молекулярных весов составляющих газов и слабо зависит от закона взаимодействия между молекулами. При помощи метода работы [1] получен [2] дополнительный член в соотношении (0.1), пропорциональный разности эффективных сечений взаимодействия частиц. Он обусловливает появление конечной скорости скольжения даже для смеси газов с одинаковыми массами молекул, если только законы взаимодействия различны.

Решение кинетического уравнения с модельным интегралом столкновений [3–5] показало, однако, что диффузионная скорость скольжения не во всей области изменения параметров подчиняется соотношению (0.1). Вопрос о границах применимости этого соотношения остается открытым.

Метод исследования диффузионного скольжения газа на основе кинетического уравнения с точным интегралом столкновений был развит в [6]. В этой работе в рамках 13-ти моментного приближения в случае диффузного отражения молекул от поверхности получено выражение для скорости диффузионного скольжения. Однако при нахождении функции распределения было использовано положение, указанное еще Максвеллом [7], о том, что вблизи поверхности функции распределения падающих на нее молекул не отличаются от распределений в объеме газа. Для случая произвольного отражения молекул от поверхности задача о диффузионном скольжении изучалась в [8], где после ряда предположений при помощи вариационного метода получена величина скорости диффузионного скольжения. Влияние кнудсеновского слоя в выражении для функции распределения учитывалось в дополнительном слагаемом к значению функции распределения в объеме газа. Однако при вычислении величины диффузионной скорости дополнительное слагаемое бралось в виде разложения по моментам во всем пространстве скоростей. При этом в отличие от [6] учитывался лишь первый момент, обусловливающий изменения импульса, и не учитывалось изменения потока импульса в кнудсеновском слое. В действительности, вследствие столкновений молекул, падающих на стенку с молекулами, отраженными от нее, объемные функции существенно искажаются, а с ними претерпевают изменения парциальные потоки импульса и импульс. Поэтому наиболее существенным результатом работы [8] следует считать обобщение результатов работы [6] на случай произвольного отражения молекул от поверхности, а основным недостатком — пренебрежение изменением потока импульса в кнудсеновском слое.

1. Рассмотрим бинарную смесь газов в поле тангенциального к стенке градиента парциальной концентрации. Начало координат поместим на поверхности, ось x направим по нормали к ней, а ось z вдоль нее.

В условиях стационарного течения функция распределения может быть определена из кинетического уравнения с введенными в правую часть граничными условиями в виде сосредоточенных источников

$$\text{(1.1)} \qquad \mathbf{v}\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f = J + v_x f(x=0)\,\delta(x)$$
$$J = \int dv_1\, d\Omega\, \sigma(w, \vartheta)\, w \{f' f_1' - f f_1\}$$

Здесь J — интеграл упругих столкновений, $w = v - v_1$ — относительная скорость сталкивающихся частиц, ϑ — угол рассеяния, $\sigma(w, \vartheta)$ — дифференциальное сечение рассеяния, $\delta(x)$ — дельта-функция. Будем различать молекулы, движущиеся к поверхности и покидающие ее, т. е. $f_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = f_\alpha^+(\mathbf{v}, \mathbf{r})$ при $v_x > 0$ и $f_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}) = f_\alpha^-(\mathbf{v}, \mathbf{r})$ при $v_x < 0$. Каждую из этих функций в области их определения представим в виде ряда по полиномам Эрмита — Чебышева

$$\text{(1.2)} \qquad f_\alpha^{\pm}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \frac{n_\alpha}{\pi^{3/2} v_{T\alpha}^3} \exp\left\{-\frac{(v - u_{\pm\alpha z})^2}{v_{T\alpha}^2}\right\}\left\{1 - 2\frac{\sigma_{\pm\alpha x z}}{2 n_\alpha T} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{m_\alpha}{T}(v_z - u_{\pm\alpha z})\, v_{\pm\alpha x} - \frac{q_{\pm\alpha z}(v_z - u_{\pm\alpha z})}{n_\alpha T}\left[1 - \frac{m_\alpha (v - u_{\pm\alpha z})^2}{5T}\right]\right\}, \quad v_{T\alpha} = \left(\frac{T}{2 m_\alpha}\right)^{1/2}$$

Здесь T — температура в энергетических единицах, $u_{\pm\alpha z}$ — средняя скорость, $q_{\pm\alpha z}$ — поток тепла, $v_{T\alpha}$ — тепловая скорость частиц, $\sigma_{\pm\alpha x z}$ — тензор вязких напряжений. Уравнения переноса для величин $u_{\pm\alpha z}$, $\sigma_{\pm\alpha x z}$, $q_{\pm\alpha z}$ можно представить в следующем виде (см. приложение 1):

$$\text{(1.3)} \qquad \nabla_x n_\alpha T - \nabla_x \sigma_{\alpha x z}^{+} = R_{\alpha z} - \sigma_{0\alpha x z}^{+}\delta(x) + n_{0\alpha} T \delta(x)$$
$$^2/_5 \nabla_x q_{\alpha z}^{+} + p_\alpha \nabla_x u_{\alpha z}^{+} = R_{\alpha x z} + [^2/_5 q_{0\alpha z}^{+} + p_\alpha u_{0\alpha z}^{+}]\,\delta(x)$$
$$-\,^2/_5 \nabla_x \sigma_{\alpha x z}^{+} = R_{\alpha z k k} - \,^2/_5 \sigma_{0\alpha x z}^{+}\delta(x)$$
$$\nabla_x \sigma_{\alpha x z}^{-} = \nu_{\alpha\beta}^{(1)} n_\alpha m_\alpha u_{\alpha z}^{-} + \frac{\nu_{\alpha\beta}^{(2)}}{v_{T\alpha}^2} q_{\alpha z}^{-} + \sigma_{0\alpha x z}^{-}\delta(x)$$
$$^2/_5 \nabla_x q_\alpha^{-} + n_\alpha T \nabla_x u_{\alpha z}^{-} = \sigma_{\alpha x z}\nu_{\alpha\beta}^{(3)} + [^2/_5 q_{0\alpha z}^{-} + p_\alpha u_{0\alpha z}^{-}]\,\delta(x)$$
$$\frac{T}{m_\alpha}\nabla_x \sigma_{\alpha x z}^{-} = \frac{1}{2} n_\alpha m_\alpha v_{T\alpha}^2 \nu_{\alpha\beta}^{(4)} u_{\alpha z}^{-} + \nu_{\alpha\alpha}^{(5)} q_{\alpha z}^{-} + \frac{T}{m_\alpha}\sigma_{0\alpha x z}^{-}\delta(x)$$
$$u_{\alpha z}^{\pm} = {}^1/_2 (u_{\alpha z} \pm u_{-\alpha z}), \quad \sigma_{\alpha x z}^{\pm} = {}^1/_2(\sigma_{\alpha x z} \pm \sigma_{-\alpha x z}), \quad q_{\alpha z}^{\pm} = {}^1/_2 (q_{\alpha z} \pm q_{-\alpha z})$$

Система уравнений переноса (1.3), в отличие от [6,7], описывает поведение бинарной смеси газа с учетом разрывности функции распределения, обусловленной влиянием поверхности на систему. В разложении (1.2), как это следует из симметрии задачи, метода получения системы (1.3) и ее вида, необходим учет лишь $u_{\alpha z}^{\pm}$, $\sigma_{\alpha xz}^{\pm}$, $q_{\alpha z}^{\pm}$, так как прочие представляют собой величины более высокого порядка по параметру $M = u_{\alpha z} T^{1/2} m^{-1/2} \ll 1$. В задаче также можно пренебречь изменением температуры за счет джоулевого нагрева в кнудсеновском слое при $M \ll 1$.

При получении (1.3) использовалось разложение функции распределения возле парциальных максвелловских значений. Последнее обстоятельство определяет при наличии вязкого переноса импульса, как показано в [9], более детальное описание поведения смеси газа. На расстояниях от поверхности больших длины свободного пробега величины $u_{\alpha z}^{+}$, $\sigma_{\alpha xz}^{+}$, $q_{\alpha z}^{+}$ благодаря столкновениям между частицами переходят в соответствующие значения $u_{\alpha z}$, $\sigma_{\alpha xz}$, $q_{\alpha z}$, характеризующие смесь в объеме. Величины $u_{\alpha z}^{-}$, $\sigma_{\alpha xz}^{-}$, $q_{\alpha z}^{-}$, обусловливающие разрывность функций распределений при удалении от поверхности, как это будет показано ниже, стремятся к нулю, так что функция распределения и ее производные становятся непрерывными в пространстве скоростей. Поэтому система (1.3) на больших расстояниях от поверхности переходит в соответствующую систему уравнений 13-ти моментного приближения [10].

Следует подчеркнуть, что метод, использованный для получения системы (1.3), обладает большей гибкостью по сравнению с методом, использованным в [11], так как функция распределения не обладает разрывом вдали от поверхности. Анализ системы (1.3) и сравнение решения этой системы с известными решениями в случае обычного и теплового скольжений простого газа показали хорошую точность метода, используемого в данной работе [12].

Аналитические выражения коэффициентов $R_{\alpha z}$, $R_{\alpha xz}$, $R_{\alpha zkk}$, $\nu_{\alpha\beta}^{(1)}$, $\nu_{\alpha\beta}^{(2)}$, $\nu_{\alpha\beta}^{(3)}$, $\nu_{\alpha\beta}^{(4)}$, $\nu_{\alpha\alpha}^{(5)}$, полученные через интегралы Чепмена — Каулинга, приводятся в приложении 1.

2. Задача о диффузионном скольжении, таким образом, сводится к решению системы (1.3). Используя двухстороннее преобразование Лапласа, получим следующее решение этой системы:

$$u_{\alpha z}^{-} = (\nu_{\alpha\beta}^{(3)}\mu_{\alpha}^{*})^{-1} [{}^{2}/_{5} q_{0\alpha z}^{-} + p_{\alpha} u_{0\alpha z}^{-}] \operatorname{ch} \lambda_{\alpha}^{-1} x + \sigma_{0\alpha xz}^{-} \lambda_{\alpha} \mu_{\alpha}^{*-1} x \tag{2.1}$$

$$u_0 = \rho^{-1} (\rho_{\alpha} u_{\alpha}^{+} + \rho_{\beta} u_{\beta}^{+}) = \mu^{-1} \{\mu_{\alpha} u_{0\alpha}^{+} + \mu_{\beta} u_{0\beta}^{+} - (\omega_{\alpha} - \omega_{\beta})(u_{0\alpha}^{+} - u_{0\beta}^{+})\} + (\sigma_{0\alpha xz}^{+} + \sigma_{0\beta xz}^{+}) x + a (u_{\alpha}^{+} - u_{\beta}^{+}) \tag{2.2}$$

$$(u_{\alpha}^{+} - u_{\beta}^{-}) = \frac{D_{\alpha\beta}}{y_{\alpha} y_{\beta}} \{a_{n\alpha} \nabla y_{\alpha} (-1 + \operatorname{ch} \lambda^{-1} x) + (u_{0\alpha}^{+} - u_{0\beta}^{+}) \operatorname{ch} \lambda^{-1} x + (p\mu\lambda)^{-1} (\mu_{\beta} \sigma_{0\alpha xz}^{+} - \mu_{\alpha} \sigma_{0\beta xz}^{+}) \operatorname{sh} \lambda^{-1} x \tag{2.3}$$

$$a = \mu^{-1} [(\mu_{\beta} \rho_{\alpha} - \mu_{\alpha} \rho_{\beta}) \rho^{-1} + (\omega_{\alpha} - \omega_{\beta})]$$

Здесь $u_{0\pm\alpha z}$, $\sigma_{0\pm\alpha xz}$, $q_{0\pm\alpha z}$ — граничные значения скорости, тензора вязких напряжений и потока тепла соответственно. Выражения для величин λ_{α}, μ_{α}^{*}, λ, ω_{α}, $a_{n\alpha}$ приводятся в приложении 2.

Пусть вдали от поверхности система достигает стационарного состояния, характеризующегося скоростью диффузионного скольжения газа относительно поверхности. Видно, что граничные значения $u_{0\pm z}$, $\sigma_{0\pm\alpha xz}$, $q_{0\pm\alpha z}$ связаны между собой тремя условиями. Первое условие выражает требование экспоненциального спадания возмущения, вызванного поверхностью, и имеет вид

$$(2.4)\qquad \frac{D_{\alpha\beta}}{y_\alpha y_\beta} a_{n\alpha}\nabla y_\alpha + (u_\alpha^+ - u_\beta^+) + (p\lambda\mu)^{-1}(\mu_\beta\sigma_{0\alpha xz}^+ - \mu_\alpha\sigma_{0\beta xz}^+) = 0$$

Второе условие определяется отсутствием градиента скорости в объеме газа

$$(2.5)\qquad (\nabla_x u_0)_\infty = \mu^{-1}(\sigma_{0\alpha xz}^+ + \sigma_{0\beta xz}^+) = 0$$

И, наконец, последнее условие, выражающее граничную парциальную вязкость через граничную парциальную скорость, вытекает из закона частичного отражения молекул от поверхности [1]

$$(2.6)\qquad \begin{aligned} &\sigma_{0\alpha xz}^+ = W_\alpha^{-1}\{u_{y\alpha} + u_{00} + (u_{0\alpha z}^- - u_{0\beta z}^+)(\gamma_\alpha + \rho_\beta\rho^{-1})\\ &W_\alpha^{-1} = n_\alpha T(\nu_{\alpha\beta}^{(3)}\lambda_\alpha)^{-1}\varepsilon_\alpha^2(2-\varepsilon_\alpha)^{-2}, \qquad \gamma_\alpha = \gamma(M_\beta - M_\alpha)\\ &\gamma = {}^2/_5(n^2 m_{\alpha\beta}\,|\,b\,|)^{-1}\{{}^2/_5\xi_{\alpha\beta}^2(n^2 m_{\alpha\beta})^{-1} + \xi_{\alpha\beta}b_{\alpha\beta} -\\ &- {}^4/_{25}n_\alpha n_\beta(n[D_{\alpha\beta}]_1)^{-1}\xi_{\alpha\beta}n^{-2}\}\\ &u_{y\alpha} = {}^4/_{25}T^{-2}y_\alpha\nabla y_\alpha(b_{\beta\beta} + b_{\alpha\beta}), \qquad u_{00} = \rho^{-1}(\rho_\alpha u_{0\alpha}^+ + \rho_\beta u_{0\beta}^+) \end{aligned}$$

Величины $\xi_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ приводятся в приложении 1.

Теперь, когда приведены соотношения (2.4) — (2.6), связывающие граничные значения $\sigma_{0\alpha xz}^\pm$, $u_{0\alpha z}^\pm$, $q_{0\alpha}^\pm$, можно, используя эти соотношения, получить из (2.2) (при $x \to \infty$) диффузионную скорость скольжения. Имеем

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} &u = u_{0\infty} = -W_\alpha W_\beta(W_\alpha + W_\beta)^{-1}(u_{y\alpha}W_\alpha^{-1} + u_{y\beta}W_\beta^{-1}) +\\ &+ [(\alpha - a)(u_{y\alpha} - u_{y\beta}) - aD_{\alpha\beta}(y_\alpha y_\beta)^{-1}a_{n\alpha}\nabla y_\alpha](1 + \Delta_*^{-1})^{-1} -\\ &- \alpha D_{\alpha\beta}(y_\alpha y_\beta)^{-1}a_{n\alpha}\nabla y_\alpha(1 + \Delta_*)^{-1}\\ &\Delta_* = D_{\alpha\beta}(y_\alpha y_\beta)^{-1}(\lambda p)^{-1}(W_\alpha + W_\beta)^{-1}, \quad \alpha = -\{\gamma_\alpha +\\ &+ \rho^{-1}(\rho_\beta W_\alpha^{-1} - \rho_\alpha W_\beta^{-1})(W_\alpha^{-1} + W_\beta^{-1})^{-1}\} \end{aligned}$$

3. Соотношение (2.7) представляет собой наиболее общее выражение для величины диффузионной скорости, известное в литературе (см., например, [1–5]). Оно обобщает соответствующие выражения работ [1–5] на случай произвольного взаимодействия частиц как между собой, так и с поверхностью. Причем слагаемые в (2.7) вносят различный вклад в выражение для диффузионной скорости.

Для того чтобы проиллюстрировать этот факт, обратимся к рассмотренной ранее системе (1.3). Действительно, учет производной от потока тепла во втором уравнении (1.3) при получении уравнений переноса методом моментов соответствует полному второму приближению в методе Чепмена — Энскога [13]. С другой стороны, наличие в четвертом уравнении (1.3) производной от тензора вязких напряжений соответствует третьему приближе-

---

[1] Если обозначим через ε_α парциальный коэффициент аккомодации, то закон частичного отражения молекул от стенки имеет вид

$$f_\alpha^+(v_0, 0, z) = \varepsilon_\alpha f_\alpha^0(v, z) + (1 - \varepsilon_\alpha) f_\alpha^-(-v_x, v_y, v_z, 0, z)$$

где f_α — парциальная максвелловская функция распределения.

нию. Первые два члена в (2.7), как это следует из вывода, обусловлены учетом в четвертом уравнении (1.3) производной от тензора вязких напряжений и должны появляться только в третьем приближении метода Чепмена — Энскога. Последнее же слагаемое не исчезает и во втором приближении. Поэтому исследование этого слагаемого представляет наибольший интерес. Представим его в следующем виде

$$\gamma_\alpha D_{\alpha\beta} a_{n\alpha} (\nabla y_\alpha)(y_\alpha y_\beta)^{-1}(1 + \Delta_*)^{-1} + u_s \tag{3.1}$$

В (3.1) только u_s соответствует второму приближению метода Чепмена — Энскога, в то время как первый член в этом приближении отсутствует. Следовательно, во втором приближении диффузионную скорость скольжения можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}u = u_s = \sqrt{W_\alpha{}^* W_\beta{}^*}\, A\, \{(W_\alpha^{*-1} - W_\beta^{*-1}) \sqrt{M_\alpha M_\beta}\, (y_\alpha M_\alpha + y_\beta M_\beta)^{-1} + \\ + {}^1\!/_2 (W_\alpha^{*-1} + W_\beta^{*-1}) [(M_\beta - M_\alpha)(y_\alpha M_\alpha + y_\beta M_\beta)^{-1} - \\ - \delta (\sqrt{M_\beta} - \sqrt{M_\alpha})(y_\alpha \sqrt{M_\alpha} + y_\beta \sqrt{M_\beta})^{-1}]\} (D_{\alpha\beta} a_{n\alpha} \nabla y_\alpha)(1 + \Delta_*)^{-1} \\ A = \sqrt{W_\alpha{}^* W_\beta{}^*}\, (\sqrt{M_\alpha} + \sqrt{M_\beta}) [2 (y_\alpha \sqrt{M_\alpha} W_\alpha{}^* + y_\beta \sqrt{M_\beta} W_\beta{}^*)]^{-1} \\ W_\alpha^{-1} = y_\alpha \sqrt{M_\alpha}\, W_\alpha^{*-1} \\ \delta^{-1} = 1 - \sqrt{M_\alpha M_\beta} (\sqrt{M_\beta} - \sqrt{M_\alpha})(y_\beta - y_\alpha)(y_\alpha \sqrt{M_\alpha} + y_\beta \sqrt{M_\beta})\end{gathered} \tag{3.2}$$

Выражение (3.2) по структуре аналогично выражению для диффузионной скорости, полученному в [1,2]. Действительно, если положить $A = a_{n\alpha} = \delta = 1$ и $W_\alpha{}^* = W_\beta{}^*$, получим известное выражение Крамерса — Кистемакера (0.1). Максимальное отклонение $a_{n\alpha}$ и δ от единицы не превышает 10%. Величина A близка к единице в области параметров, где $y_\alpha = y_\beta$ и $M_\alpha \approx M_\beta$. Наличие в (3.2) коэффициента Δ_* обусловлено учетом динамики столкновений частиц со стенкой и между собой.

Условие $W_\alpha{}^* \approx W_\beta{}^*$ для произвольного взаимодействия частиц между собой и с поверхностью выполняется приближенно. С его учетом выражение (3.2) при $y_\alpha \ll y_\beta$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}u_s = A \delta^* \sigma_u D_{\alpha\beta} \nabla y_\alpha, \qquad A = \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{M_\alpha}{M_\beta}\right)^{1/2}\right] \\ \delta^* = \left[1 + (y_\alpha M_\alpha + y_\beta M_\beta) \frac{1 - \delta}{\sqrt{M_\alpha M_\beta}}\right] (1 + \Delta^*)^{-1} a_{n\alpha}, \\ \sigma_u = \rho^{-1} n \left[1 - \left(\frac{M_\alpha}{M_\beta}\right)^{1/2}\right] \left(\frac{M_\alpha}{M_\beta}\right)^{1/2}\end{gathered} \tag{3.3}$$

Соотношение (3.3) для диффузионной скорости при $y_\alpha y_\beta^{-1} \ll 1$ отличается от соответствующего выражения работы [5], полученного на основе кинетического уравнения с модельным интегралом столкновений, коэффициентом $A\ \delta^+$, который равен единице во всей области изменения параметров.

Для сравнения с результатами [8] выпишем значение σ_u, полученное в работе [8] на основе уравнения Больцмана

$$\sigma_u = \frac{1}{2}\left[1 - 2\frac{M_\alpha}{M_\beta} + \sqrt{\frac{M_\alpha}{M_\beta}}\right]$$

Таким образом, формула работы [8] отличается от (3.3) не только отсутствием коэффициента $A\delta^*$, но и значением σ_u. Последнее обусловлено тем, что в [8] при исследовании диффузионного скольжения бинарной смеси в отличие от [5] и данной работы пренебрегалось изменением вязкого переноса импульса поперек кнудсеновского слоя.

Рассмотрим смесь газов с близкими массами и законами взаимодействия между молекулами. Тогда в выражении (3.2) величина $W_\alpha^{*-1} - W_\beta^{*-1}$ имеет следующий вид:

$$(W_\alpha^{*-1} - W_\beta^{*-1}) = W^{*-1}\{[B(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)(\sigma_\alpha + \sigma_\beta)^{-1} + \tag{3.4}$$
$$+ \frac{1}{2}[\varepsilon_\alpha^2(2-\varepsilon_\alpha)^{-2} + \varepsilon_\beta^2(2-\varepsilon_\beta)^{-2}]\ C(M_\beta - M_\alpha) -$$
$$- [\varepsilon_\beta^2(2-\varepsilon_\beta)^{-2} - \varepsilon_\alpha^2(2-\varepsilon_\alpha)^{-2}]\}$$
$$W_\alpha^* = W_\beta^* = W^* \text{ при } m_\alpha = m_\beta,\ \sigma_\alpha = \sigma_\beta,\ \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = 1$$

Здесь σ_α — поперечное сечение молекулы, а выражения для B и C приводятся в приложении 3. Таким образом, первое слагаемое в (3.2) для диффузионной скорости с учетом (3.4) является следствием различия законов взаимодействия для частиц разных сортов. В частном случае диффузного отражения молекул от стенки соответствующий член был получен Броком [2]. Наличие в (3.4) второго слагаемого обусловлен последовательным учетом динамики столкновений частиц между собой. Наибольший интерес представляет третье слагаемое в (3.4), которое определяется различием законов взаимодействий частиц с поверхностью. Оно обусловливает появление конечной скорости диффузионного скольжения бинарной смеси газов из механически эквивалентных молекул, но с разными законами взаимодействия со стенкой.

Следует отметить, что соотношение (2.7), представляющее собой общее выражение для величины диффузионного скольжения, представляет собой один из основных результатов данной работы. Оно получено на основе решения уравнения Больцмана и отличается от соответствующего соотношения работы [8] последовательным учетом динамики столкновений частиц в кнудсеновском слое и, в частности, учетом потока импульса в кнудсеновском слое. Во втором приближении величина диффузионного скольжения обобщает выражения работ [1-5] на случай произвольного взаимодействия частиц как между собой, так и с поверхностью. В соответствующей области параметров, как это было показано выше, формула (3.2) переходит в результаты [1, 2].

Как уже отмечалось, учет градиента потока тепла во втором уравнении (1.3) при получении уравнений переноса (1.3) соответствует полному второму приближению в методе Чепмена — Энскога, а учет производной от тензора вязких напряжений в четвертом уравнении (1.3) — третьему приближению. Система (1.3) характеризуется двумя масштабами длины: гидродинамическим масштабом, соответствующим градиентам макроскопических величин, приложенным вдоль поверхности, и масштабом, определяемым спаданием влияния стенки, который пропорционален длине свободного пробега. Благодаря тому, что уравнения переноса (1.3) представляет собой линейную систему относительно неизвестных функций, можно утверждать [14], что вклад последующих приближений, соответствующих градиентам гидродинамических величин вдоль поверхности, будет мал по сравнению с учтенными членами. Однако последнего нельзя сказать относительно градиентов величин $u_{\pm\alpha z}$, $\sigma_{\pm\alpha xz}$, $q_{\pm\alpha z}$ поперек кнудсеновского слоя, так как отношение длины свободного пробега к характерному масштабу изменения этих величин не мало. Поэтому вследствие аппроксимации функций распределения конечным числом членов роль градиентов указанных величин поперек кнудсеновского слоя в последующих приближениях остается неясной. Это — основной недостаток метода моментов. По-видимому, один из эффективных путей его устранения заключается в анализе граничных условий скольжения на основе метода сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений [15].

В заключение автор благодарит В. В. Струминского за интерес к работе.

Приложение 1. Подставляя функции распределения (1.2) в кинетическое уравнение (1.1) и используя теорию интегралов, зависящих от параметров [16], после простых, но громоздких вычислений приходим к системе уравнений переноса (1.3). При этом величины $\nu_{\alpha\beta}^{(1)}$, $\nu_{\alpha\beta}^{(2)}$, $\nu_{\alpha\beta}^{(3)}$, $\nu_{\alpha\beta}^{(4)}$, $\nu_{\alpha\alpha}^{(5)}$, $R_{\alpha z}$, $R_{\alpha xz}$, $R_{\alpha zkk}$ выражаются посредством следующих соотношений:

$$\nu_{\alpha\beta}^{(1)} = \nu^{(1)} + \delta\nu^{(1)} + \delta\nu_{\alpha}^{(1)}(M_\beta - M_\alpha), \qquad \delta\nu_{\alpha}^{(1)} = \Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)} + 2\Omega_{\alpha\beta}^{*(1,1)}$$

$$\nu^{(1)} = \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} [\Omega_{\alpha\alpha}^{(1,1)} + \Omega_{\beta\alpha}^{(1,1)} + 2(\Omega_{\alpha\alpha}^{*(1,1)} + \Omega_{\beta\alpha}^{*(1,1)})]$$

$$\delta\nu^{(1)} = \sum_{\substack{\alpha,\beta \\ \alpha\neq\beta}} [\Omega_{\alpha\alpha}^{(1,1)} - \Omega_{\beta\alpha}^{(1,1)} + 2(\Omega_{\alpha\alpha}^{*(1,1)} - \Omega_{\beta\alpha}^{(1,1)})]$$

$$\nu_{\alpha\beta}^{(2)} = -8\{{}^1/_4(3\Omega_{\alpha\alpha}^{*(0,0)} - 2\Omega_{\alpha\alpha}^{*(0,1)}) - M_\alpha M_\beta(3\Omega_{\alpha\beta}^{*(0,0)} - 2\Omega_{\alpha\beta}^{*(0,1)})\} +$$
$$+ 2\{(\Omega_{\alpha\alpha}^{(1,1)} + 2\Omega_{\alpha\alpha}^{*(1,1)}) - 2/5(\Omega_{\alpha\alpha}^{(1,2)} + 2\Omega_{\alpha\alpha}^{*(1,2)})\} +$$
$$+ 8M_\beta^2\{(\Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)} + 2\Omega_{\alpha\beta}^{*(1,1)}) - {}^2/_5(\Omega_{\alpha\beta}^{(1,2)} + 2\Omega_{\alpha\beta}^{*(1,2)}\}$$

$$\nu_{\alpha\beta}^{(3)} = \nu^{(3)} + \delta\nu^{(3)} + \delta\nu_{\alpha}^{(3)}(M_\beta - M_\alpha) + \delta\nu_{*}^{(3)}(M_\beta - M_\alpha)^2$$

$$\nu^{(3)} = \sum_{\alpha,\beta}\left\{2\left[\frac{3}{4}\Omega_{\alpha\beta}^{*(0,0)} - \frac{1}{10}\Omega_{\alpha\beta}^{*(0,2)}\right] + \right.$$
$$\left. + [\Omega_{\beta\alpha}^{(1,1)} + 2\Omega_{\beta\alpha}^{*(1,1)}] + \frac{3}{10}[\Omega_{\beta\alpha}^{(2,2)} + 2\Omega_{\beta\alpha}^{*(2,2)}]\right\}$$

$$\delta\nu^{(3)} = \sum_{\alpha,\beta}\left\{\left[\frac{3}{2}(\Omega_{\alpha\alpha}^{*(0,0)} - \Omega_{\beta\alpha}^{*(0,0)}) - \frac{1}{10}(\Omega_{\alpha\alpha}^{*(0,2)} - \Omega_{\beta\alpha}^{*(0,2)})\right] + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{10}[(\Omega_{\alpha\alpha}^{(2,2)} + 2\Omega_{\alpha\alpha}^{*(2,2)}) - (\Omega_{\beta\alpha}^{(2,2)} + 2\Omega_{\beta\alpha}^{*(2,2)})]\right\}$$

$$\delta\nu_{\alpha}^{(3)} = -4\{({}^3/_2\Omega_{\alpha\beta}^{*(0,0)} + {}^1/_5\Omega_{\alpha\beta}^{*(0,2)}) - {}^3/_{10}(\Omega_{\alpha\beta}^{(2,2)} + 2\Omega_{\alpha\beta}^{*(2,2)})\}$$

$$\delta\nu_{*}^{(3)} = 4({}^3/_4\Omega_{\alpha\beta}^{*(0,0)} - {}^1/_{10}\Omega_{\alpha\beta}^{*(0,2)}) - 2(\Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)} + 2\Omega_{\alpha\beta}^{*(1,1)}) + {}^3/_5(\Omega_{\alpha\beta}^{(2,2)} + 2\Omega_{\alpha\beta}^{*(2,2)})$$

$$\nu_{\alpha\beta}^{(4)} = [{}^5/_2(\Omega_{\alpha\alpha}^{(1,1)} + 2\Omega_{\alpha\alpha}^{*(1,1)}) + (\Omega_{\alpha\alpha}^{(1,2)} + 2\Omega_{\alpha\alpha}^{(1,2)})] +$$
$$+ 4M_\beta[{}^5/_2 M_\alpha(\Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)} + 2\Omega_{\alpha\beta}^{*(1,1)}) + M_\beta(\Omega_{\alpha\beta}^{(1,2)} + 2\Omega_{\alpha\beta}^{*(1,2)})]$$

$$\nu_{\alpha\alpha}^{(5)} = 2[(\Omega_{\alpha\alpha}^{(3,4)} + \Omega_{\alpha\beta}^{(3,4)}) - (\Omega_{\alpha\alpha}^{*(3,3)} + \Omega_{\alpha\beta}^{*(3,3)}) - {}^5/_4\nu_{\alpha\beta}^{(2)}]$$

$$R_{\alpha z}=\sum_\beta\left\{B_{\alpha\beta}^{(1)}(u_\alpha{}^+-u_\beta{}^+)_z+B_{\alpha\beta}^{(2)}\left[\frac{q_{\alpha z}^+}{m_\alpha p_\alpha}-\frac{q_{\beta z}^+}{m_\beta p_\beta}\right]\right\}$$

$$R_{\alpha xz}=-\sum_\beta\left\{B_{\alpha\beta}^{(3)}\frac{\sigma_{\alpha xz}^+}{n_\alpha}+B_{\alpha\beta}^{(4)}\frac{\sigma_{\beta xz}^+}{n_\beta}\right\}$$

$$R_{\alpha zkk}=\frac{T}{m_\alpha}\sum_\beta\left\{\frac{5}{2m_\alpha}B_{\alpha\beta}^{(2)}(u_\alpha{}^+-u_\beta{}^+)_z+B_{\alpha\beta}^{(5)}\frac{q_{\alpha z}^+}{p_\alpha}+B_{\alpha\beta}^{(6)}\frac{q_{\beta z}^+}{p_\beta}\right\}$$

Здесь использованы следующие обозначения ($m_{\alpha\beta}$ — приведенная масса):

$$B_{\alpha\beta}^{(1)}=-\frac{n_\alpha n_\beta T}{n\,[D_{\alpha\beta}]_1},\qquad B_{\alpha\beta}^{(2)}=-T\xi_{\alpha\beta}$$

$$B_{\alpha\alpha}^{(3)}+B_{\alpha\beta}^{(3)}+B_{\alpha\alpha}^{(4)}=\frac{p^2}{T}a_{\alpha\alpha},\qquad B_{\alpha\beta}^{(4)}=\frac{p^2}{T}a_{\alpha\beta}\quad(\alpha\neq\beta)$$

$$B_{\alpha\alpha}^{(5)}+B_{\alpha\beta}^{(5)}+B_{\alpha\alpha}^{(6)}=-\frac{5}{2}\frac{p^2}{T}b_{\alpha\alpha},\qquad B_{\alpha\beta}^{(6)}=-\frac{5}{2}\frac{p^2}{T}b_{\alpha\beta}\quad(\alpha\neq\beta)$$

$$[D_{\alpha\beta}]_1=\frac{n_\beta T}{n m_{\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)}},\qquad \xi_{\alpha\beta}=\frac{1}{T}\frac{n_\alpha n_\beta T}{n\,[D_{\alpha\beta}]_1}m_{\alpha\beta}\left[\frac{6}{5}C_{\alpha\beta}-1\right]$$

$$a_{\alpha\beta}=-2y_\alpha y_\beta\{(m_\alpha+m_\beta)\,n\,[D_{\alpha\beta}]_1\}^{-1}(1-{}^3/_5A_{\alpha\beta})$$

$$a_{\alpha\alpha}=\frac{y_\alpha{}^2}{[\mu_{\alpha\alpha}]_1}+\sum_{\beta\neq\alpha}2y_\alpha y_\beta\{(m_\alpha+m_\beta)\,n\,[D_{\alpha\beta}]_1\}^{-1}\left(1+\frac{3}{5}\frac{m_\beta}{m_\alpha}A_{\alpha\beta}\right)$$

$$b_{\alpha\beta}=-\frac{4}{25}\left(\frac{T}{p}\frac{m_{\alpha\beta}^2}{m_\alpha m_\beta}\right)\frac{y_\alpha y_\beta}{[D_{\alpha\beta}]_1}\left\{\frac{55}{4}-3B_{\alpha\beta}-4A_{\alpha\beta}\right\}$$

$$b_{\alpha\alpha}=\frac{y_\alpha{}^2}{[\eta_{\alpha\alpha}]_1}+\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{4}{25}\left(\frac{T}{p}\frac{m_{\alpha\beta}^2}{m_\alpha m_\beta}\right)\frac{y_\alpha y_\beta}{[D_{\alpha\beta}]_1}\times$$

$$\times\left\{\frac{15}{2}\frac{m_\alpha}{m_\beta}+\frac{25}{4}\frac{m_\beta}{m_\alpha}-3\frac{m_\beta}{m_\alpha}B_{\alpha\beta}+4A_{\alpha\beta}\right\}$$

$$A_{\alpha\beta}=\Omega_{\alpha\beta}^{(2,2)}(\Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)})^{-1},\qquad B_{\alpha\beta}=(5\Omega_{\alpha\beta}^{(1,2)}-\Omega_{\alpha\beta}^{(1,3)})(3\Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)})^{-1}$$

$$C_{\alpha\beta}=\Omega_{\alpha\beta}^{(1,2)}(3\Omega_{\alpha\beta}^{(1,1)})^{-1}$$

$$[\mu_{\alpha\alpha}]_1=\frac{10}{3}\frac{n_\alpha T}{\Omega_{\alpha\alpha}^{(1,1)}},\qquad v_{\alpha\beta}=(v_{T\alpha}^2+v_{T\beta}^2)^{1/2},\qquad [\eta_{\alpha\alpha}]_1=\frac{25}{2}\frac{n_\alpha T}{m_\alpha\Omega_{\alpha\alpha}^{(2,2)}}$$

$$\Omega_{\alpha\beta}^{(l,s)}=\frac{8}{3\sqrt{\pi}}n_\beta v_{\alpha\beta}\int dg\,d\Omega\sigma(w,\vartheta)(1-\cos^l\vartheta)\,g^{2s+3}e^{-g^2}$$

$$\Omega_{\alpha\beta}^{*(l,s)}=\frac{4}{3\sqrt{\pi}}n_\beta v_{\alpha\beta}\int dg\,d\Omega\sigma(w,\vartheta)\cos^l\vartheta g^{2s+3}e^{-g^2}$$

Приложение 2. При нахождении решения (2.1)—(2.3), используя соотношения приложения 1, вводим следующие обозначения:

$$\lambda_\alpha^{-2}=\frac{n_\alpha m_\alpha}{\mu_\alpha{}^*}\left(\nu_{\alpha\beta}^{(1)}-\frac{1}{2}\nu_{\alpha\beta}^{(2)}S_\alpha\right),\qquad \mu_\alpha{}^*=\frac{n_\alpha T}{\nu_{\alpha\beta}^{(3)}}\left(1-\frac{2}{5}S_\alpha\right)$$

$$S_\alpha=(\nu_{\alpha\beta}^{(4)}-\nu_{\alpha\beta}^{(1)})(\nu_{\alpha\alpha}^{(5)}-{}^1/_2\nu_{\alpha\beta}^{(2)})^{-1}$$

$$\lambda^2=(\lambda_{\alpha\alpha}^2\lambda_{\beta\beta}^2-\lambda_{\alpha\beta}^2\lambda_{\beta\alpha}^2)(\lambda_{\alpha\alpha}^2+\lambda_{\beta\beta}^2+\lambda_{\alpha\beta}^2+\lambda_{\beta\alpha}^2)^{-1}$$

$$\lambda_{\alpha\alpha}^2=-\frac{nD_{\alpha\beta}\omega_\alpha}{n_\alpha n_\beta T},\qquad \lambda_{\alpha\beta}^2=\frac{(\omega_\alpha+\mu_{\alpha\beta})\,nD_{\alpha\beta}}{n_\alpha n_\beta T},\qquad \mu_{\alpha\beta}=y_\alpha y_\beta\frac{|a|_{\beta\alpha}}{|a|}$$

$$\omega_\alpha=\frac{2}{5}\left(\frac{T}{p}\right)^2\sum_\delta\frac{\mu_{\alpha\delta}}{y_\delta}\left\{\frac{1}{m_\alpha}\xi_{\alpha\beta}^*\frac{\overset{*}{\eta}_{\delta\alpha}}{y_\alpha}-\frac{1}{m_\beta}\xi_{\beta\alpha}^*\frac{\overset{*}{\eta}_{\delta\beta}}{y_\beta}\right\}$$

$$\eta^*_{\alpha\beta} = y_\alpha y_\beta \,|\, b^* \,|_{\beta\alpha} \,/\, |\, b^* \,|, \qquad D_{\alpha\beta} = [D_{\alpha\beta}]_1 \,(1 - \Delta_{\alpha\beta})^{-1}$$

$$a_{n\alpha} = 1 + \frac{2}{5}\left(\frac{T}{p}\right)^2 \xi_{\alpha\beta}\left[\frac{|\,b\,|_{\alpha\alpha}}{m_\alpha \,|\,b\,|} + \frac{|\,b\,|_{\beta\beta}}{m_\beta \,|\,b\,|} - \frac{|\,b\,|_{\alpha\beta}}{m_\beta \,|\,b\,|} - \frac{|\,b\,|_{\beta\alpha}}{m_\alpha \,|\,b\,|}\right]$$

$$\Delta_{\alpha\beta} = \frac{n\,[D_{\alpha\beta}]_1}{n_\alpha n_\beta T}\left(\frac{T}{p}\right)^2 \xi_{\alpha\beta}\left[\frac{T}{m_\alpha}\xi^*_{\alpha\beta}\left(\frac{|\,b^*\,|_{\alpha\alpha}}{m_\alpha \,|\,b^*\,|} - \frac{|\,b^*\,|_{\alpha\beta}}{m_\beta \,|\,b^*\,|}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{T}{m_\beta}\xi^*_{\beta\alpha}\left(\frac{|\,b^*\,|_{\beta\beta}}{m_\beta \,|\,b^*\,|} - \frac{|\,b^*\,|}{m_\beta \,|\,b^*\,|}\right)\right)$$

$$\xi^*_{\alpha\beta} = \xi_{\alpha\beta} - \frac{2}{5}\,\frac{m_\alpha}{T}\,\frac{n_\alpha n_\beta T}{n\,[D_{\alpha\beta}]_1}, \qquad b^*_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta} + b^{(1)}_{\alpha\beta}$$

$$b^{(1)}_{\alpha\alpha} = -\frac{2}{5}\sum_{\beta\neq\alpha}\frac{\xi_{\alpha\beta}}{n^2 m_\alpha}, \qquad b^{(1)}_{\alpha\beta} = \frac{2}{5}\,\frac{\xi_{\alpha\beta}}{m_\beta n^2} \quad \text{при } \alpha \neq \beta$$

Приложение 3. При исследовании во втором приближении величины диффузионного скольжения для бинарной смеси с механически эквивалентными молекулами необходимы выражения для величин B и C, которые определяются следующими соотношениями:

$$B = \left(\frac{\delta\nu^{(1)}}{\nu^{(1)}} - \frac{\delta\nu^{(4)}}{\nu^{(4)}}\right)\frac{\Omega^{(2,2)}_{\alpha\alpha} + \Omega^{(2,2)}_{\alpha\beta}}{\Omega^{(2,2)}_{\alpha\alpha} - \Omega^{(2,2)}_{\alpha\beta}},$$

$$C = \frac{1}{2}\left[\frac{\delta\nu^{(1)}_\alpha + \delta\nu^{(1)}_\beta}{\nu^{(1)}} - \frac{\delta\nu^{(4)}_\alpha + \delta\nu^{(4)}_\beta}{\nu^{(4)}}\right]$$

Для вычисления диффузионной скорости бинарной смеси механически эквивалентных молекул в третьем приближении необходимо знание следующих величин:

$$u_{y\alpha} + u_{y\beta} = (u_{y\alpha} - u_{y\beta})\,\frac{\sigma_\alpha - \sigma_\beta}{\sigma_\alpha + \sigma_\beta}, \qquad u_{y\alpha} - u_{y\beta} = \frac{4}{25}\,\frac{y_\alpha y_\beta \nabla \mathcal{Y}_\alpha}{T\,|\,b\,|\,[\eta]_1}$$

Поступила 18 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kramers H. A., Kistemaker J.* On the slip of a diffusing gas mixtures along a wall. Physica, 1943, vol. 10, No. 8.
2. *Brock J. R.* Forces an aerosols in gas mixtures. J. Colloid Sci., 1963, vol. 18, No. 6, p. 489—501.
3. *Яламов Ю. И., Ивченко И. Н., Дерягин Б. В.* Расчет скорости диффузионного скольжения бинарной газовой смеси. Докл. АН СССР, 1968, т. 180, № 2.
4. *Ивченко И. Н., Яламов Ю. И.* О диффузионном скольжении бинарной газовой смеси. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 4.
5. *Жаров, В. А.* Определение скорости скольжения для бинарной смеси газов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
6. *Кучеров Р. Я., Рикенглаз Л. Э.* Скольжение и температурный скачок на границе газовой смеси. ЖЭТФ, 1959, т. 36, вып. 16.
7. *Maxwell J. C.* On stresses in rarified gases arising from inequalities of temperature. Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1879, vol. 170, ptl.
8. *Loyalka S. K.* Velocity slip coefficient and the diffusion slip velocity for multicomponent gas mixture. Phys. Fluids, 1971, vol. 14, No. 12, p. 2599—2604.
9. *Маркеев Б. М.* К вопросу о вязком переносе импульса в газовой смеси. Ж. техн. физ., 1974, № 7.
10. *Kolodner I.* Moment description on gas mixtures. New York University, 1957.
11. *Баканов С. П., Дерягин Б. В.* К вопросу о состоянии газа, движущегося вблизи твердой поверхности. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 1.
12. *Маркеев Б. М.* Об одном методе исследования скольжения газа вдоль твердой поверхности. Ж. техн. физ., 1974, № 5.
13. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
14. *Foch J., Ulenbeck G., Losa M.* Theory of sound propagation in mixtures of monoatomic gases. Phys. Fluids, 1972, vol. 15, No. 7.
15. *Darrozés J.* Les glissements d'un gaz parfait sur les parois dans un écoulement de Couette. Recher. Aaerospat., 1967, N° 119, p. 13—23.
16. *Владимиров Б. С.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1971.