

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ ПЛЕНКИ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В ПОПЕРЕЧНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В. М. Коровин

(Москва)

Получены осредненные уравнения, описывающие в длинноволновом приближении течение пленки проводящей жидкости по вертикальной стенке плоского канала при наличии поперечного электрического поля, и на базе этих уравнений исследована конвективная и абсолютная неустойчивость ламинарного течения. Установлено, что периодические возмущения усиливаются при сносе вниз по течению лишь в том случае, если их частота не превосходит критической частоты, зависящей от параметра электрогидродинамического взаимодействия и числа Вебера.

Показано, что электрическое поле оказывает дестабилизирующее влияние, обусловленное возрастанием поверхностной плотности зарядов вблизи вершин волн. В результате поверхностные силы, действующие на гребни волн со стороны электрического поля, возрастают, уменьшая тем самым стабилизирующее воздействие сил поверхностного натяжения.

Доказана абсолютная устойчивость ламинарного течения пленки в электрическом поле.

Полученный критерий конвективной неустойчивости качественно совпадает с результатами экспериментального изучения процесса пленочной конденсации пара в вертикальных конденсирующих системах при наличии поперечного электрического поля.

Экспериментальное исследование [1] процесса пленочной конденсации пара в вертикальной конденсирующей системе показывает, что при наличии поперечного электрического поля, превосходящего некоторое критическое значение, интенсивность теплообмена значительно возрастает. Увеличение теплообмена объясняется наличием электрогидродинамической неустойчивости течения жидкой пленки конденсата. С целью установления критериев устойчивости течения пленки в электрическом поле при фиксированном расходе жидкости были проведены эксперименты с пленкой, стекающей по обкладке плоского конденсатора, наклоненного под некоторым углом к горизонту, и в предельном случае малых чисел Рейнольдса $R \ll 1$ решена задача на собственные значения для уравнения Орра — Зоммерфельда [2].

1. Исходные уравнения. Рассмотрим неустановившееся течение пленки электропроводной жидкости по одной из стенок плоского канала ширины l , образованного двумя вертикальными электродами. Прямоугольная система координат выбрана таким образом, что ось x совпадает с направлением силы тяжести, а ось y перпендикулярна электродам. Жидкость занимает область $-\infty \leq x \leq +\infty$, $0 \leq y \leq h(x, t)$. Остальное пространство между электродами заполнено покоящимся непроводящим газом. К электродам приложена фиксированная разность потенциалов V_0 . В приближении электрогидродинамики рассматриваемое плоское течение описывается следующей системой уравнений [3]

$$(1.1) \quad \Delta\varphi = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}$$

Граничные условия имеют вид

$$(1.2) \quad y = 0, \quad v_x = 0, \quad v_y = 0; \quad y = l, \quad \varphi = V_0$$

$$(1.3) \quad y = h(x, t), \quad \varphi = 0, \quad v_y = \frac{\partial h}{\partial t} + v_x \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} + \\ + \frac{2h'}{1-h'^2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0, \quad p - p_a = -\frac{1+h'^2}{8\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \\ + \frac{2\rho\nu}{1+h'^2} \left[\frac{\partial v_y}{\partial y} - h' \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + h'^2 \frac{\partial v_x}{\partial x} \right] - \frac{\alpha h''}{(1+h'^2)^{3/2}}$$

Здесь φ — потенциал электрического поля, $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ — скорость, g — ускорение силы тяжести, ρ, p — плотность и давление жидкости, p_a — давление газа, ν — коэффициент кинематической вязкости, α — коэффициент поверхностного натяжения; штрих означает производную по x .

Задача (1.1) — (1.3) имеет точное решение, описывающее ламинарное течение пленки с плоской свободной поверхностью. Распределения параметров при этом имеют следующий вид:

$$(1.4) \quad \varphi = E_0(h - y), \quad E_0 = \frac{V_0}{h-l}, \quad h = \sqrt[3]{\frac{3\nu Q}{g}} \\ v_x = \frac{gh^2}{\nu} \left[\frac{y}{h} - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right], \quad v_y = 0, \quad p = p_a - \frac{E_0^2}{8\pi}$$

В дальнейшем предполагается, что расход жидкости Q не зависит от времени.

Будем считать, что течение имеет длинноволновой характер, т. е. что $\varepsilon = h/\lambda \ll 1$, $h' \lesssim \varepsilon$, где λ — характерный размер неоднородности свободной поверхности вдоль оси x . Условие существования таких течений будет выписано ниже. Оценивая порядки величин, входящих в уравнения и граничные условия, нетрудно показать, что в области течения

$$(1.5) \quad \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \Big/ \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = O(\varepsilon^2), \quad p(x, h, t) - p(x, 0, t) = O(\varepsilon^2) + O(\varepsilon^2 R^{-1})$$

а на свободной поверхности

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = O(\varepsilon^2), \quad p - p_a + \frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \alpha \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = O(\varepsilon R^{-1})$$

Здесь R — число Рейнольдса, построенное по средней толщине пленки и средней продольной скорости. Эти оценки показывают, что при $R \gtrsim 1$ давление постоянно поперек пленки и определяется силами поверхностного натяжения и распределением поверхностной плотности зарядов и что на свободной поверхности

$$(1.6) \quad y = h(x, t), \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0, \quad p - p_a = -\frac{1}{8\pi} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - \alpha \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$$

Учитывая (1.5), (1.6), уравнение движения в проекции на ось x можно записать следующим образом:

$$(1.7) \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{1}{8\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \Big|_{y=h(x,t)} + \\ + \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + g$$

С целью упрощения исследования устойчивости ламинарного течения (1.4) применим метод осреднения функций v_x, v_y , предложенный в работе [4]. Положим приближенно

$$(1.8) \quad v_x = 3u(x, t) \left\{ \frac{y}{h(x, t)} - \frac{1}{2} \left[\frac{y}{h(x, t)} \right]^2 \right\}$$

где $u(x, t)$ — средняя по сечению продольная скорость. Профиль (1.8) удовлетворяет граничным условиям (1.2), (1.6) и совпадает при стационарном ламинарном течении с точным решением (1.4). Из уравнения неразрывности легко найти распределение поперечной скорости

$$(1.9) \quad v_y = \frac{3}{2} \left(\frac{y}{h} \right)^2 \left(u \frac{\partial h}{\partial x} - h \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left(\frac{y}{h} \right)^3 \left(u \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{1}{2} h \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Подставляя (1.8), (1.9) в уравнение движения (1.7) и осредняя по толщине пленки, получаем

$$(1.10) \quad \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{u}{2h} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{9u}{10} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{3u^2}{10h} \frac{\partial h}{\partial x} = \\ = \frac{1}{8\pi\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=h(x,t)}^2 + \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \frac{3\nu u}{h^2} + g$$

Кинематическое условие (1.3) на свободной поверхности можно представить в интегральном виде

$$(1.11) \quad \partial h / \partial t + \partial u h / \partial x = 0$$

В дальнейшем при исследовании устойчивости будем исходить из уравнений (1.10), (1.11) и задачи Дирихле для уравнения Лапласа (1.1) — (1.3).

2. Конвективная неустойчивость. Предположим, что в некоторой точке x_0 на ламинарное течение накладываются непрерывно действующие бесконечно малые возмущения с заданной частотой ω , так что при $x > x_0$

$$(2.1) \quad u = u_0 + u_1, \quad h = h_0 + h_1, \quad \Phi = \Phi_0 + \Phi_1$$

где индексом единица отмечены возмущения, а индексом нуль — стационарное решение (1.4). Исследуем поведение возмущений при их распространении вниз по потоку. Сделаем замену $\eta = y - h_0$. Подставляя (2.1) в уравнения и граничные условия, получаем в линейном приближении (индекс единица в дальнейшем опускается)

$$(2.2) \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0, \quad \Phi(x, 0, t) = E_0 h, \quad \Phi(x, l, t) = 0 \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u_0 \frac{\partial h}{\partial x} + h_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{u_0}{2h_0} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{9u_0}{10} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{3u_0^2}{10h_0} \frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{E_0}{4\pi\rho} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \eta} \Big|_{\eta=0} + \\ + \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} - \frac{3\nu u}{h_0^2} + \frac{6\nu u_0 h}{h_0^3}$$

Частные решения системы (2.2) будем искать в виде бегущих волн, распространяющихся в положительном направлении оси x

$$u = A e^{i(kx - \omega t)}, \quad h = B e^{i(kx - \omega t)}, \quad \Phi = \chi(\eta) e^{i(kx - \omega t)}$$

Легко видеть, что между h и φ имеется связь $\varphi = E_0 h e^{-k\eta}$. Волновой вектор k заранее неизвестен и подлежит определению в процессе решения задачи. Введем безразмерные величины

$$c = \frac{\omega h_0}{u_0 W^{1/2}}, \quad \kappa = \frac{k h_0}{W^{1/2}}, \quad W = \frac{\rho u_0^2 h_0}{\alpha}, \quad S = \frac{E_0^2}{4\pi \rho u_0^2}$$

$$R = \frac{u_0 h_0}{\nu}, \quad q = S W^{1/2}, \quad z = R W^{1/2}$$

Здесь R — число Рейнольдса, S — параметр электрогидродинамического взаимодействия, W — число Вебера. Из условия существования нетривиального решения системы (2.2) получаем дисперсионное уравнение

$$(2.3) \quad z(\kappa^4 - q\kappa^3 - 1.2\kappa^2 + 2.4c\kappa - c^2) + 9i\kappa - 3ic = 0$$

В общем случае $\kappa(c)$ — многозначная комплексная функция, зависящая от параметров q, z . Физический смысл имеет лишь та ее ветвь $\kappa_1(c)$, для которой $\kappa_1(0) = 0$. При $\text{Im } \kappa_1 > 0$ возмущения затухают, а при $\text{Im } \kappa_1 < 0$ — усиливаются в области $x > x_0$. Если $\text{Im } \kappa_1 = 0$, то имеет место нейтральная устойчивость. Исследуем поведение $\text{Im } \kappa_1$. Отделяя в (2.3) действительную и мнимую части и исключая c , получаем

$$z\kappa_r^2(\kappa_r^2 - q\kappa_r - 3) - \kappa_i [9 + \kappa_r^2 z^2 (6.4\kappa_r^2 - 5.2q\kappa_r + 0.96)] - \kappa_i^2 \kappa_r^2 z^3 [1.78\kappa_r^4 - 2.67q\kappa_r^3 + \kappa_r^2(q^2 - 0.21) + 0.32q\kappa_r - 0.13] - \kappa_i^2 z (6\kappa_r^2 - 3q\kappa_r - 15.6) + \kappa_i^3 z^2 (14.4\kappa_r^2 - 6q\kappa_r - 7.68) + \kappa_i^4 z + \kappa_i^4 z^3 [3.56\kappa_r^3(\kappa_r - q) + \kappa_r^2(0.67q^2 - 3.41) + 1.81q\kappa_r + 0.77] - 1.6\kappa_i^5 z^2 + \kappa_i^6 z^3 [0.64 - (0.44\kappa_r - 1.1q)^2] = 0$$

$$\kappa_r = \text{Re } \kappa_1, \quad \kappa_i = \text{Im } \kappa_1$$

Из этого уравнения видно, что на плоскости κ_r, κ_i при любых конечных q, z существует кривая, имеющая в начале координат касание второго порядка с осью κ_i и пересекающая ее в точках $a_{1,2} = 0.5 [q \pm (q^2 + 12)^{1/2}]$. Обозначим эту кривую Γ . При $z \ll 1$ можно выписать в явном виде уравнение Γ на некотором конечном интервале оси κ_r , содержащем начало координат. Разлагая методом диаграммы Ньютона [5] алгебраическую функцию κ_i по возрастающим степеням z и ограничиваясь первыми членами, получаем следующие шесть разложений:

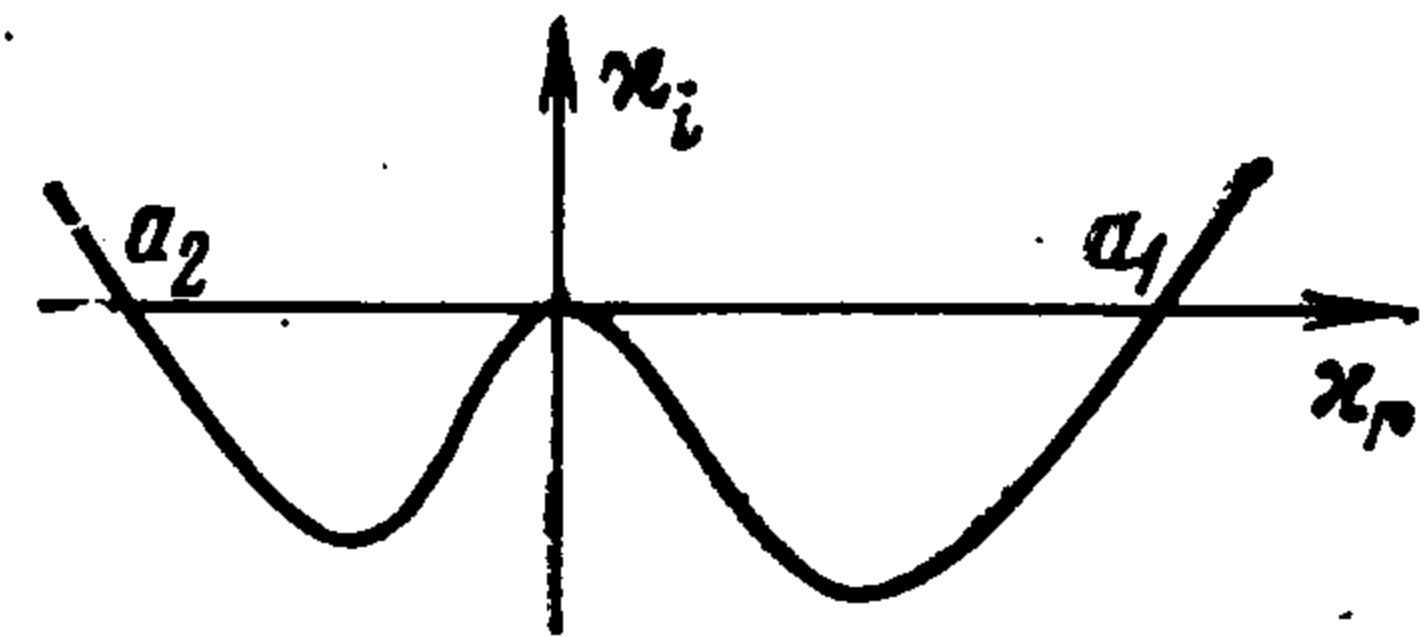
$$(2.4) \quad 9\kappa_{i1} = z\kappa_r^2(\kappa_r^2 - q\kappa_r - 3), \quad \kappa_{i2} = \sqrt[3]{\frac{9}{z}}, \quad \kappa_{i3} = \sqrt[3]{\frac{9}{z}} \frac{i\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\kappa_{i4} = -\sqrt[3]{\frac{9}{z}} \frac{i\sqrt{3}+1}{2}, \quad \kappa_{i5,6} = \frac{15}{z(12 \mp 20\kappa_r \pm 5q)}$$

Разложение κ_{i1} представляет уравнение Γ . График этой функции изображен на фигуре. Можно показать, что в точке $(a_1, 0)$ выполняется условие $c = 3\kappa_1$. В силу этого возмущения, возбуждаемые с частотой $\omega_* = 1.5 u_0 h_0^{-1} \beta$, где $\beta = SW + (S^2 W^2 + 12W)^{1/2}$, распространяются вниз по потоку с постоянной амплитудой. Выразив длину волны таких возму-

щений через параметры невозмущенного течения $\lambda = 4\pi h_0 \beta^{-1}$, получаем следующий критерий применимости системы уравнений длинноволнового приближения: $\beta \ll 4\pi$.

Из фигуры видно, что $\kappa_i < 0$ при $0 < \kappa_r < a_1$ и $\kappa_i > 0$ при $\kappa_r > a_1$. На кривой Γ функция $s(\kappa_1)$ действительна, причем s растет с удалением от начала координат вдоль Γ . Так как при любых q, z кривая Γ пересекает полуось $\kappa_r > 0$ лишь в одной точке, то при $\omega < \omega_*$ имеем $\kappa_i < 0$. Таким образом, рассматриваемое течение обладает неустойчивостью конвективного типа по отношению к возмущениям, частота которых меньше ω_* . Если же $\omega > \omega_*$, то возмущения затухают в области $x > x_0$. Из выражения для ω_* видно, что электрическое поле оказывает дестабилизирующее влияние. Физически это объясняется возрастанием поверхностной плотности зарядов вблизи вершин волн, вызванным увеличением кривизны свободной поверхности при лнаожении возмущений. В результате поверхностные силы, действующие на гребни волн со стороны поля, возрастают, уменьшая тем самым стабилизирующее воздействие сил поверхностного натяжения. Наличие волн на поверхности жидкости приводит к тому, что пробой диэлектрика, имеющего контакт с жидким электродом, наступает значительно раньше, чем пробой при наличии плоских твердых электродов [6, 7].



3. Абсолютная устойчивость. Предположим, что в момент времени $t = 0$ на конечном участке течения возникли возмущения

$$(3.1) \quad u(x, 0) = f_1(x); \quad h(x, 0) = f_2(x), \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

Считаем, что $f_1(x), f_2(x), \varphi(x, \eta, 0)$ связаны соответствующими условиями согласования. Дальнейшее развитие возмущений описывается системой (2.2) с начальными условиями (3.1). С ростом времени t возмущения могут либо неограниченно возрастать в любой фиксированной области по x , либо оставаться ограниченными. В первом случае течение называется абсолютно неустойчивым [8], во втором — абсолютно устойчивым.

Рассматриваемое течение оказывается абсолютно устойчивым¹.

Для доказательства этого утверждения каждую из величин u, h запишем с помощью интеграла Фурье по k в виде

$$(3.2) \quad \Lambda(x, t) = \sum_{j=1}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi(k) e^{i[kx - \omega_j(k)t]} dk$$

Аналогичным образом можно представить $\varphi(x, \eta, t)$, при этом подынтегральное выражение будет содержать множитель $e^{-k\eta}$. Функции $\psi(k)$ определяются начальными условиями (3.1), а $\omega_j(k)$ — однозначные ветви функции $\omega(k)$, определяемой дисперсионным уравнением (2.3). В безразмерном виде эта функция имеет вид

$$(3.3) \quad c = 1.2\kappa - 1.5iz^{-1} + \sqrt{P(\kappa)}$$

$$P(\kappa) = \kappa^4 - q\kappa^3 + 0.24\kappa^2 + 5.4iz^{-1}\kappa - 2.25z^{-2}$$

¹ Абсолютная устойчивость при $S = 0$ доказана в работе [9]. В рассматриваемой задаче метод доказательства [9] применим лишь для $z \ll 1$.

Ветви $\omega_1(k)$ и $\omega_2(k)$ будем различать по тому значению, которое они принимают в начале координат: $\omega_1(0) = 0$, $\omega_2(0) = -3\nu h_0^{-2}i$. Исследуем поведение $\text{Im } \omega_1$. Считая c комплексным, а κ действительным, отделим в (2.3) действительную и мнимую части и исключим $\text{Re } c$. В результате получаем

$$z\kappa^2 (\kappa^2 - q\kappa - 3) + c_i [3 + 1.33z^2\kappa^3 (\kappa - q) + 0.32z^2\kappa^2] + c_i^2 [5z + 0.44z^3\kappa^3 (\kappa - q) + 0.11z^3\kappa^2] + 2.67z^2c_i^3 + 0.44z^3c_i^4 = 0, \quad (c_i = \text{Im } c)$$

Видно, что на плоскости κ , c_i при любых конечных q , z имеется кривая, касающаяся оси κ в начале координат и пересекающая ее в точках a_1, a_2 . При малых z эту кривую можно представить уравнением $3c_i = z\kappa^2 (3 + q\kappa - \kappa^2)$. Отсюда следует, что $\text{Im } \omega_1(\sigma_1) = 0$, $\text{Im } \omega_1(\sigma_2) = 0$, где $\sigma_{1,2} = 0.5h_0^{-1} [SW \pm (S^2W^2 + 12W)^{1/2}]$. На бесконечных интервалах

$-\infty < k < \sigma_2$, $\sigma_1 < k < +\infty$ имеем $\text{Im } \omega_1 < 0$, так что при $t \rightarrow \infty$, $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\infty}^{\sigma_2 - \varepsilon} \psi(k) e^{i[kx - \omega_1(k)t]} dk \rightarrow \zeta, \quad \int_{\sigma_1 + \varepsilon}^{+\infty} \psi(k) e^{i[kx - \omega_1(k)t]} dk \rightarrow 0$$

Имеются также два конечных интервала $\sigma_2 < k < 0$, $0 < k < \sigma_1$, на которых $\text{Im } \omega_1 > 0$. Монохроматические компоненты спектральных разложений (3.2), соответствующие этим интервалам, растут при $t \rightarrow \infty$. При действительных k ветвь $\omega_2(k)$ лежит в нижней полуплоскости, так что второе слагаемое в (3.2) стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Докажем, что в первом слагаемом (3.2) контур интегрирования между точками действительной оси $k_2 = \sigma_2 - \varepsilon$, $k_1 = \sigma_1 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ можно сместить таким образом, что на новом контуре всюду будет выполняться условие $\text{Im } \omega_1(k) < 0$. Нетрудно показать, что для локализованных в начальный момент времени возмущений $\psi(k)$ — целая функция в комплексной плоскости k . Ввиду этого в конечной плоскости k подынтегральная функция в (3.2) не имеет других особенностей, кроме точек ветвления функции $\omega(k)$. Таким образом, поведение Λ зависит от аналитических свойств функции $c(\kappa)$.

Рассмотрим вначале случай $z \ll 1$. Кривая Γ в комплексной плоскости κ (фигура) была построена таким образом, что $\text{Im } c_1 = 0$ на Γ . Так как на интервалах действительной оси $-\infty < \kappa < a_2$, $a_1 < \kappa < +\infty$, $\text{Im } c_1 < 0$, то в силу непрерывности функции $c_1(\kappa)$ получаем, что $\text{Im } c_1 < 0$ в области, лежащей ниже кривой Γ . Точки ветвления функции $c(\kappa)$ могут находиться лишь среди нулей многочлена $P(\kappa)$. Найдем их. Разлагая функцию κ , определяемую уравнением $P(\kappa) = 0$, по возрастающим степеням z и ограничиваясь первыми двумя членами разложений, находим

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \kappa_{1,2} &= \pm \sqrt{\frac{3}{2z} + \frac{1}{4}q} - \frac{9}{10}i, \\ \kappa_{3,4} &= i \left(\pm \sqrt{\frac{3}{2z} + \frac{9}{10}} \right) + \frac{1}{4}q \end{aligned}$$

Сравнивая первое выражение (2.4) и (3.4), получаем, что при $z \ll 1$ точки ветвления функции $c(\kappa)$ не могут лежать в области G , ограниченной частью кривой Γ , находящейся в нижней полуплоскости, и куском a_2a_1 .

действительной оси комплексной плоскости κ . Покажем, что при любом $0 < z < +\infty$ точки ветвления не могут лежать на границе области G . Легко видеть, что уравнение $P(\kappa) = 0$ не имеет действительных корней. Ввиду этого точки ветвления не могут лежать на отрезке $a_2 a_1$. Не могут лежать они и на оставшейся части границы области G , так как в противном случае $\text{Im } c_1 \neq 0$ на Γ . Так как функция $c(\kappa)$ непрерывна по параметру z , $z \neq 0$, то при любом z ее точки ветвления не могут лежать и в области G .

Таким образом, в некоторой конечной односвязной области, целиком содержащей G , можно выделить однозначную ветвь $c_1(\kappa)$. Воспользовавшись интегральной теоремой Коши, контур интегрирования в первом слагаемом (3.2) можно деформировать так, чтобы на новом контуре всюду выполнялось условие $\text{Im } \omega_1 < 0$. В силу этого $\Lambda \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Так как на практике область, занятая пленкой, ограничена, то при достаточно малой начальной амплитуде возмущения покинут эту область прежде, чем произойдет срыв ламинарного течения. Таким образом, при $SW + (S^2W^2 + 12W)^{1/2} \ll 4\pi$ и $R \gtrsim 1$ рассматриваемое течение абсолютно устойчиво.

Поступила 3 VI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Velkoff H. R., Miller J. H.* Condensation of vapor on a vertical plate with a transverse electrostatic field. *Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer*, 1965, vol. 87, No. 2. (Рус. перев.: Конденсация пара на вертикальной пластине при поперечном электростатическом поле. *Теплопередача*, 1965, № 2).
2. *Lee Chung — Oh, Choi H. Y.* Electrohydrodynamic ridge instability of a thin film flowing down an inclined plate. *Trans. ASME. Ser. C. J. Heat Transfer*, 1968, vol. 90, No. 1. (Рус. перев.: Электрогидродинамическая неустойчивость тонкой пленки, стекающей по наклонной плоскости. *Теплопередача*, 1968, № 3.)
3. *Melcher J. R.* Field-coupled surface waves. Cambridge, Massachusetts, M. I. T Press, 1963.
4. *Капица П. Л.* Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. *ЖЭТФ*, 1948, т. 18, вып. 1.
5. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций М.—Л., Гостехиздат, 1948.
6. *Френкель Я.* К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме. *ЖЭТФ*, 1936, т. 6, вып. 4.
7. *Taylor G. I., McEwan A. D.* The stability of a horizontal fluid interface in a vertical field. *J. Fluid Mech.*, 1965, vol. 22, pt. 1.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
9. *Андреев А. Ф.* Об устойчивости ламинарного течения тонких слоев жидкости. *ЖЭТФ*, 1963, т. 45, вып. 3 (9).