Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ОДНОГО НУЛЕВОГО КОРНЯ

В. П. Прокопьев

(Свердловск)

Рассматривается устойчивость движения относительно части переменных в критическом случае одного нулевого корня. Получены критерии устойчивости и неустойчивости.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$dx_i/dt = X_i(x_1 \ldots, x_n), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1.1}$$

Рассмотрим вопрос об устойчивости невозмущенного движения $x_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ по отношению к $x_1, \ldots, x_m (m > 0,\ n = m + p,\ p > 0)$. Обозначим эти переменные через $y_i = x_i\ (i = 1, \ldots, m)$, остальные через $z_j = x_{m+j}\ (j = 1, \ldots, p)$ [1,2]. Пусть функции X_i представляют собой степенные ряды, расположенные по степеням y_i $(i = 1, \ldots, m)$ и z_j $(j = 1, \ldots, p)$, сходящиеся в области

$$|y_i| \leqslant h, \quad i = 1, \ldots, m, \quad |z_j| \leqslant H < \infty, \quad j = 1, \ldots, p \tag{1.2}$$

где h и H — некоторые постоянные.

Теперь уравнения возмущенного движения (1.1) имеют вид

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j + Y_i(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p), \quad i = 1, \ldots, m \tag{1.3}$$

$$\frac{dz_k}{dt} = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} y_j + \sum_{j=1}^{p} c_{kj} z_j + Z_k(y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p), \quad k = 1, \ldots, p$$

где a_{ij}, b_{kj}, c_{kj} — постоянные, Y_i и Z_k — функции переменных $y_1, \ldots, y_m$, $z_1, \ldots, z_p$, которые разлагаются в области (1.2) в ряды по степеням этих переменных, причем разложения начинаются членами не ниже второго порядка. Переменные z_j $(j = 1, \ldots, p)$ всегда ограничены (условие A), так как принадлежат области (1.2). Это условие является исходным предположением при исследовании системы (1.3).

Пусть

$$Y_i(0, \ldots, 0, z_1, \ldots, z_p) = 0, \quad |Y_i| \leqslant \sum_{j=1}^{m} h_{ij} |y_j|, \quad i = 1, \ldots, m \tag{1.4}$$

где h_{ij} — достаточно малые положительные постоянные.

Выясним условия устойчивости и неустойчивости по первому приближению относительно переменных $y_1, \ldots, y_m$ для случая, когда уравнения возмущенного движения имеют вид (1.3). Как известно [3], имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Если все корни уравнения

$$(1.5) \qquad | a_{ij} - \delta_{ij} \lambda | = 0$$

имеют отрицательные действительные части, то невозмущенное движение системы (1.3) при выполнении условия A асимптотически устойчиво по отношению к переменным $y_1, \ldots, y_m$, каковы бы ни были удовлетворяющие условия (1.4) члены высших порядков в первой группе уравнений (1.3.)

Справедливы также следующие теоремы.

Теорема 2. Если среди корней уравнения (1.5) имеется хотя бы один с положительной действительной частью, то невозмущенное движение системы (1.3) при выполнении условия A неустойчиво по отношению к переменным $y_1, \ldots, y_m$, каковы бы ни были удовлетворяющие условию (1.4) члены высших порядков в первой группе уравнений (1.3).

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму $v(y_1, \ldots, y_m)$, определяемую уравнением

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial v}{\partial y_i} \Big(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \Big) = \alpha v + \sum_{i=1}^{m} y_i^2$$

где α — некоторое положительное число. Такая форма v обязательно существует и может принимать положительные значения [4]. Составим производную этой формы по времени в силу системы уравнений (1.3)

$$\frac{dv}{dt} = \alpha v + \sum_{i=1}^{m} y_i^2 + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial v}{\partial y_i} Y_i (y_1, \ldots, y_m, z_1, \ldots, z_p)$$

Согласно условию (1.4) и лемме 3 [4], в области $v > 0$ производная dv / dt будет определенно-положительной функцией относительно переменных $y_1, \ldots, y_m$, т. е., согласно теореме из работы [5], невозмущенное движение неустойчиво относительно переменных $y_1, \ldots, y_m$.

Теорема 3. Если уравнение (1.5) не имеет корней с положительными действительными частями, но имеет корни с действительными частями, равными нулю, то члены высших порядков в первой группе уравнений (1.3) можно выбрать так, чтобы при выполнении условия A получить, по желанию, как устойчивость, так и неустойчивость относительно переменных $y_1, \ldots, y_m$.

Таким образом, все случаи, которые могут представиться при исследовании задачи устойчивости относительно переменных $y_1, \ldots, y_m$, когда уравнения возмущенного движения имеют вид (1.3), можно разбить на две категории случаи некритические, когда задача решается уравнениями первого приближения (теоремы 1 и 2), и случаи критические, когда требуется рассмотрение членов более высоких порядков (теорема 3).

Рассмотрим наиболее простой критический случай — случай одного нулевого корня.

2. Будем исследовать устойчивость невозмущенного движения относительно переменных $y_1, \ldots, y_m$ системы (1.3) в предположении, что один корень уравнения (1.5) равен нулю, а остальные имеют отрицательные действительные части, т. е. будем рассматривать критический случай одного нулевого корня при решении задачи устойчивости относительно части переменных.

Систему уравнений

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j, \qquad i = 1, \ldots, m$$

приведем к виду [4]

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m-1} p_{ij} u_j + p_i u, \quad i = 1, \ldots, m-1$$

Тогда система уравнений (1.3) будет иметь вид

$$\frac{du}{dt} = U(u, u_1, \ldots, u_{m-1}, z_1, \ldots, z_p) \tag{2.1}$$

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m-1} p_{ij} u_j + p_i u + U_i(u, u_1, \ldots, u_{m-1}, z_1, \ldots, z_p)$$

$$\frac{dz_k}{dt} = \sum_{j=1}^{m-1} b_{kj}^* u_j + b_k^* u + \sum_{j=1}^{p} c_{kj} z_j +$$
$$+ Z_k^*(u, u_1, \ldots, u_{m-1}, z_1, \ldots, z_p), \quad i = 1, \ldots, m-1; \quad k = 1, \ldots, p$$

причем для функций U и U_i $(i = 1, \ldots, m-1)$ выполняются условия типа (1.4).

Теперь рассмотрим систему уравнений

$$f_i = \sum_{j=1}^{m-1} p_{ij} u_j + p_i u + U_i(u, u_1, \ldots, u_{m-1}, z_1, \ldots, z_p) = 0 \tag{2.2}$$
$$i = 1, \ldots, m-1$$

определяющих переменные u_i как функции переменной u, а также $z_1, \ldots$ $\ldots, z_p$. Функциональный определитель по переменным $u_1, \ldots, u_{m-1}$ этой системы при $u = u_1 = \ldots = u_{m-1} = 0$ отличен от нуля [4]. Поэтому существует единственное решение системы (2.2) вида

$$w_j = u_j(u, z_1, \ldots, z_p) = A_j^{(1)}(z_1, \ldots, z_p)\, u + A_j^{(2)}(z_1, \ldots$$
$$\ldots, z_p)\, u^2 + \ldots, \quad j = 1, \ldots, m-1$$

причем коэффициенты $A_j^{(1)}(z_1, \ldots, z_p)$ будут постоянными.

Сделаем теперь в системе (2.1) преобразование переменных

$$u_j = \xi_j + w_j, \quad j = 1, \ldots, m-1$$

Получаем

$$du\,/\,dt = \bar{U}(u, \xi_1 \ldots, \xi_{m-1}, z_1, \ldots, z_p) \tag{2.3}$$

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{j=1}^{m-1} p_{ij}\xi_j + \bar{U}_i(u, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}, z_1 \ldots, z_p)$$

$$\frac{dz_k}{dt} = \sum_{j=1}^{m-1} b_{kj}^*\xi_j + b_k^* u + \sum_{j=1}^{p} c_{kj}z_j + \sum_{j=1}^{m-1} b_{kj}^* w_j +$$

$$+ Z_k^*(u, \xi_1 + w_1, \ldots, \xi_{m-1} + w_{m-1}, z_1, \ldots, z_p),$$

$$i = 1, \ldots, m-1; \quad k = 1, \ldots, p$$

Здесь

$$\bar{U}(u, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}, z_1, \ldots, z_p) = U(u, \xi_1 + w_1, \ldots, \xi_{m-1} + w_{m-1}, z_1, \ldots, z_p)$$

$$\bar{U}_i(u_1, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}, z_1, \ldots, z_p) =$$
$$= U_i(u, \xi_1 + w_1, \ldots, \xi_{m-1} + w_{m-1}, z_1, \ldots, z_p) -$$
$$- U_i(u, w_1, \ldots, w_{m-1}, z_1, \ldots, z_p) - \frac{\partial w_i}{\partial u}\frac{du}{dt} - \sum_{j=1}^{p}\frac{\partial w_i}{\partial z_j}\frac{dz_j}{dt}$$

аналитические функции переменных u, ξ_i, z_k, разложение которых начинается членами не ниже второго порядка. Так как новые переменные обращаются одновременно в нуль тогда и только тогда, когда обращаются одновременно в нуль старые переменные, то задача устойчивости по отношению к одним переменным эквивалентна задаче устойчивости по отношению к другим переменным. Поэтому можно для решения задачи рассматривать уравнения (2.3). Обозначим

$$\bar{U}^{(0)}(u, z_1, \ldots, z_p) = \bar{U}(u, 0, \ldots, 0, z_1, \ldots, z_p) =$$
$$= g(z_1, \ldots, z_p)\, u^\alpha + g_1(z_1, \ldots, z_p)\, u^{\alpha+1} + \ldots$$
$$\bar{U}_i^{(0)}(u, z_1, \ldots, z_p) = \bar{U}_i(u, 0, \ldots, 0, z_1, \ldots, z_p) =$$
$$= h(z_1, \ldots, z_p)\, u^\beta + h_1(z_1, \ldots, z_p)\, u^{\beta+1} \ldots, \; i = 1, \ldots, m-1$$

и пусть

$$\bar{U}^{(0)} \not\equiv 0, \quad \beta > \alpha, \quad g(z_1, \ldots, z_p) = g_0 + g^*(z_1, \ldots, z_p) \tag{2.4}$$

где g_0 — постоянная. Пусть также функции

$$\bar{U}(0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}, z_1, \ldots, z_p), \; \bar{U}_i(0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}, z_1, \ldots, z_p)$$
$$(i = 1, \ldots, m-1)$$

не содержат членов, линейных относительно $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ (условие B).

Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$v = \frac{1}{\alpha+1} g_0 u^{\alpha+1} - v_2$$

где $v_2 = v_2(\xi_1, \ldots, \xi_{m-1})$ — определенно-положительная квадратичная форма, такая, что

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\partial v_2}{\partial \xi_i}\left(\sum_{j=1}^{m-1} p_{ij}\xi_j\right) = -\sum_{i=1}^{m-1} \xi_i^2$$

Вычислим производную от v в силу уравнений возмущенного движения (2.3)

$$\frac{dv}{dt} = g_0 g u^{2\alpha} + g_0 g_1 u^{2\alpha+1} + \ldots + \tag{2.5}$$
$$+ g_0 u^\alpha \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i F_i(u, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}, z_1, \ldots, z_p) + \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i^2 +$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{m-1} \xi_i \xi_j F_{ij}(u, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}, z_1 \ldots, z_p) + u^\alpha \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i F_i^*(u, z_1, \ldots, z_p)$$

где в силу условий B и (1.4)

$$F_i(0, 0, \ldots, 0, z_1, \ldots, z_p) = 0, \quad F_{ij}(0, 0, \ldots, 0, z_1, \ldots, z_p) = 0$$
$$F_i^*(0, z_1, \ldots, z_p) = 0$$

причем разложение всех функций начинается с членов первого порядка.

Теперь, учитывая, что для $z_j (j = 1, \ldots, p)$ выполняется условие A, рассмотрим два случая. Первый — функция $g(z_1, \ldots, z_p)$ при любых z_j принимает только положительные значения, т. е. g_0 — положительная постоянная, а $g^*(z_1, \ldots, z_p)$ — определенно-положительная функция. Тогда dv / dt будет определенно-положительной функцией относительно переменных $u, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ и, следовательно, невозмущенное движение системы (2.3) будет неустойчиво относительно переменных $u, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ [5]. Второй случай — функция $g(z_1, \ldots, z_p)$ принимает при любых z_j только отрицательные значения. Тогда производная (2.5) будет определенно-положительной функцией по отношению к переменным $u, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ и, очевидно, при нечетном α невозмущенное движение будет асимптотически устойчиво по отношению к переменным $u, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$, а при четном α — неустойчиво [5].

Таким образом, получаем следующую теорему.

Теорема 4. Пусть уравнения возмущенного движения при исследовании устойчивости относительно части переменных в критическом случае одного нулевого корня приведены к виду (2.3). Выполнены условия A, B, (1.4) и (2.4). Тогда, если $g(z_1, \ldots, z_p)$ принимает только отрицательные значения, то при α нечетном невозмущенное движение системы (2.3) асимптотически y-устойчиво, при α четном y-неустойчиво; если $g(z_1, \ldots, z_p)$ принимает только положительные значения, то невозмущенное движение системы (2.3) y-неустойчиво.

Поступила 8 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. МГУ, 1957, № 4.
2. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
3. *Озиранер А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
4. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
5. *Румянцев В. В.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости движения по отношению к части переменных. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.