Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ В КРИТИЧЕСКИХ СЛУЧАЯХ

А. С. Озиранер

(Москва)

Рассматривается класс функций выше первого порядка малости в уравнениях возмущенного движения, при которых задача устойчивости в критических случаях полностью решается линейным приближением. Именно, дано обобщение теоремы И. Г. Малкина об особенном случае нескольких нулевых корней на случай, когда характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни. Рассмотрены вопросы о неустойчивости.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения (1.1), где функции Y_i и X_s удовлетворяют условиям (1.2), (1.3)

$$y_i^{\bullet} = q_{i1}x_1 + \ldots + q_{in}x_n + Y_i(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad i = 1,\ldots,k \tag{1.1}$$

$$x_s^{\bullet} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad s = 1,\ldots,n$$

$$Y_i(t, 0, \mathbf{y}) \equiv X_s(t, 0, \mathbf{y}) \equiv 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{\|\mathbf{Y}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})\| + \|\mathbf{X}(t, \text{[illegible]}}{\text{[illegible]}} \underset{t \geqslant 0}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{при } \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \to 0 \tag{1.3}$$

а корни уравнения

$$\det \| p_{ij} - \lambda\delta_{ij} \| = 0 \tag{1.4}$$

имеют отрицательные действительные части.

При этих условиях справедлива теорема И. Г. Малкина [1,2]: невозмущенное движение $y_i = x_s = 0$ устойчиво по Ляпунову и экспоненциально-асимптотически x-устойчиво.

Нетрудно видеть, что устойчивость невозмущенного движения системы (1.1) носит тот же характер, что и устойчивость тривиального решения линейной системы, которая получается из (1.1) отбрасыванием функций Y_i, X_s.

Таким образом, теорема И. Г. Малкина может быть сформулирована следующим образом: если нулевое решение линейной системы (1.1) при $Y_i \equiv X_s \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову и экспоненциально-асимптотически x-устойчиво, то таким же будет характер устойчивости нулевого решения исходной системы (1.1), каковы бы ни были удовлетворяющие условиям (1.2) и (1.3) функции Y_i, X_s.

Характеристическое уравнение для линейной системы (1.1) при $Y_i \equiv X_s \equiv 0$ имеет k нулевых корней с простыми элементарными делителями и n корней с отрицательными действительными частями. В связи с этим поставим следующую задачу: сохраняется ли теорема И. Г. Малкина в случае, когда характеристическое уравнение для системы первого приближения помимо нулевых корней имеет чисто мнимые корни.

Оказывается, что ответ на этот вопрос положителен как в случае устойчивости, так и в случае неустойчивости.

2. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\mathbf{y}^{\cdot} = Q\mathbf{x} + R\mathbf{y} + \mathbf{Y}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}^{\cdot} = P\mathbf{x} + \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) \tag{2.1}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^k$, P, Q, R — постоянные матрицы соответствующих порядков. Уравнения линейного приближения для системы (2.1)

$$\mathbf{y}^{\cdot} = Q\mathbf{x} + R\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}^{\cdot} = P\mathbf{x} \tag{2.2}$$

Теорема 1. Предположим, что нулевое решение системы (2.2) устойчиво по Ляпунову и экспоненциально-асимптотически x-устойчиво. Тогда невозмущенное движение системы (2.1) устойчиво по Ляпунову и экспоненциально-асимптотически x-устойчиво при любых удовлетворяющих условиям (1.2) и (1.3) функциях $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}$.

Замечание. Как видно из формулировки теоремы, действительные части корней уравнения (1.4) отрицательны, а корни уравнения

$$\det \| R - \lambda E \| = 0 \tag{2.3}$$

могут иметь отрицательные действительные части, быть нулевыми или чисто мнимыми, причем в последних двух случаях кратным корням отвечает число групп решений, равное их кратности; между мнимыми корнями допускаются резонансные соотношения.

Доказательство [1, 2]. По свойству корней уравнения (1.4) существует определенно-положительная квадратичная форма $V(\mathbf{x})$, удовлетворяющая уравнению $\operatorname{grad} V(\mathbf{x}) \cdot P\mathbf{x} = -\|\mathbf{x}\|^2$. Сделав замену

$$\xi_s = e^{\alpha t} x_s, \quad \alpha = \text{const} > 0 \tag{2.4}$$

преобразуем вторую группу уравнений (2.1) к виду

$$\xi^{\cdot} = (P + \alpha E)\,\xi + e^{\alpha t}\mathbf{X}(t, e^{-\alpha t}\xi, \mathbf{y}) \tag{2.5}$$

где E — единичная матрица. Производная по времени от функции $V(\xi)$ в силу системы (2.5)

$$V^{\cdot}(\xi) = -\|\xi\|^2 + 2\alpha V(\xi) + e^{\alpha t} \operatorname{grad} V(\xi)\, \mathbf{X}(t, e^{-\alpha t}\xi, \mathbf{y}) \tag{2.6}$$

Выберем α столь малым, чтобы форма $-\|\xi\|^2 + 2\alpha V(\xi)$ была определенно-отрицательной. В силу (1.3) существует $\beta > 0$, такое, что производная (2.6) неположительна в области

$$t \geqslant 0, \ \|\xi\| \leqslant \beta, \ \|\mathbf{y}\| \leqslant \beta \tag{2.7}$$

Рассмотрим произвольное решение $\xi(t, \xi_0, \mathbf{y}_0)$, $\mathbf{y}(t, \xi_0, \mathbf{y}_0)$ с начальными возмущениями (при $t = 0$) из области

$$\|\xi_0\| < \delta, \quad \|\mathbf{y}_0\| < \delta, \quad \delta < \beta \tag{2.8}$$

Для этого решения условия

$$\|\xi(t, \xi_0, \mathbf{y}_0)\| \leqslant \beta, \quad \|\mathbf{y}(t, \xi_0, \mathbf{y}_0)\| \leqslant \beta \tag{2.9}$$

выполняются по крайней мере на некотором интервале $(0, T)$. При всех $t \in (0, T)$ имеем $V^{\cdot}(\xi(t, \xi_0, y_0)) \leqslant 0$, и следовательно, $V(\xi(t, \xi_0, y_0)) \leqslant V(\xi_0)$. Так как форма V определенно-положительна, то отсюда вытекает неравенство

$$(2.10) \qquad \|\xi(t, \xi_0, y_0)\| < A, \qquad t \in (0, T)$$

где A — сколь угодно мало, если δ достаточно мало. Из (2.10) в силу (2.4) следует $(x_0 = \xi_0)$

$$(2.11) \qquad \|x(t, x_0, y_0)\| < Ae^{-\alpha t}, \quad t \in (0, T)$$

Условие (1.3) и неравенство (2.11) дают оценку

$$(2.12) \qquad \|Y(t, x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0))\| < AMe^{-\alpha t}, \qquad t \in (0, T), \quad M = \text{const}$$

Функция $y(t, x_0, y_0)$, будучи решением системы линейных неоднородных уравнений

$$(2.13) \qquad y^{\cdot} = Ry + Qx(t, x_0, y_0) + Y(t, x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0))$$

может быть представлена формулой Коши [3]

$$(2.14) \qquad y(t, x_0, y_0) = U(t)y_0 + \int_0^t U(t-\tau)[Qx(\tau, x_0, y_0) + Y(\tau, x(\tau, x_0, y_0), y(\tau, x_0, y_0))]\,d\tau$$

где $U(t)$ — фундаментальная матрица решений линейной системы

$$(2.15) \qquad y^{\cdot} = Ry$$

Из устойчивости нулевого решения системы (2.2) вытекает устойчивость нулевого решения системы (2.15); но в таком случае [4]

$$(2.16) \qquad \|U(t)\| \leqslant N = \text{const при } t \geqslant 0$$

Из (2.14) на основании (2.11), (2.12) и (2.16) получаем

$$(2.17) \qquad \|y(t, x_0, y_0)\| \leqslant N\|y_0\| + (N\|Q\|A + NAM)\int_0^t e^{-\alpha\tau}\,d\tau = N\|y_0\| + AN\alpha^{-1}(\|Q\| + M)(1 - e^{-\alpha t}) < N\|y_0\| + AN\alpha^{-1}(\|Q\| + M)$$

Пусть ε — сколь угодно малое число, причем $0 < \varepsilon < \beta$. Выберем δ в (2.8) столь малым, чтобы выполнялось неравенство $A < \varepsilon$ и чтобы правая часть (2.17) была меньше ε. Из (2.10) и (2.17) вытекает, что во всем промежутке времени, в течение которого выполняются неравенства (2.9), будут выполняться неравенства

$$(2.18) \qquad \|\xi(t, \xi_0, y_0)\| < \varepsilon, \qquad \|y(t, \xi_0, y_0)\| < \varepsilon$$

Но так как $\varepsilon < \beta$, то неравенства (2.18) выполняются при всех $t \geqslant 0$. Следовательно, невозмущенное движение устойчиво относительно ξ, y, откуда в силу (2.4) вытекает требуемый результат.

Теорема 2. Предположим, что нулевое решение системы (2.2) экспоненциально-асимптотически x-устойчиво и y-неустойчиво. Тогда невозмущенное движение системы (2.1) y-неустойчиво при любых удовлетворяющих условию (1.2) функциях Y, X.

Замечания. 1) В теореме 2 условие (1.3) не используется.

2) При условиях теоремы 2 y-неустойчивость нулевого решения системы (2.2) эквивалентна существованию у уравнения (2.3) кратных корней с нулевыми действительными частями и непростыми элементарными делителями или корней с положительной действительной частью.

Доказательство. Из условий теоремы вытекает, что нулевое решение системы (2.15) неустойчиво. Следовательно, система (2.15) имеет решения $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0)$ со сколь угодно малыми $\|\mathbf{y}_0\|$, выходящие с течением времени из области $\|\mathbf{y}\| < H = \mathrm{const}$. Но тогда, в силу условия (1.2), система (2.1) имеет решения ($\mathbf{y} = \mathbf{y}(t, \mathbf{y}_0)$, $\mathbf{x} \equiv 0$) со сколь угодно малыми начальными условиями, которые с течением времени покидают область $\|\mathbf{y}\| < H$. Теорема доказана.

Из теорем 1 и 2 вытекает

Теорема 3. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид (2.1), причем действительные части корней уравнения (1.4) отрицательны, а функции Y и X удовлетворяют условиям (1.2) и (1.3). Тогда вопрос об устойчивости невозмущенного движения системы (2.1) полностью решается линейным приближением (2.2): если нулевое решение системы (2.2) устойчиво по Ляпунову, то невозмущенное движение системы (2.1) устойчиво по Ляпунову и экспоненциально-асимптотически x-устойчиво; если нулевое решение системы (2.2) y-неустойчиво, то и невозмущенное движение системы (2.1) y-неустойчиво.

3. Полученные результаты легко переносятся на задачу устойчивости относительно части переменных [5] по линейному приближению [6].

Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$\begin{aligned} &\mathbf{y}^\cdot = Q\mathbf{x} + R\mathbf{y} + Y(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{x}^\cdot = P\mathbf{x} + \mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ &\mathbf{z}^\cdot = \mathbf{Z}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \quad \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{y} \in \mathbf{R}^k, \quad \mathbf{z} \in \mathbf{R}^r \end{aligned} \tag{3.1}$$

Будем предполагать, что решения системы (3.1) z-продолжимы и что в области (3.2) выполнены условия (3.3), (3.4)

$$t \geqslant 0, \quad \|\mathbf{x}\| \leqslant h, \quad \|\mathbf{y}\| \leqslant h, \quad \|\mathbf{z}\| < \infty \tag{3.2}$$

$$\mathbf{Y}(t, 0, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv 0, \quad \mathbf{X}(t, 0, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \equiv 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{\|\mathbf{Y}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\| + \|\mathbf{X}(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})\|}{\|\mathbf{x}\|} \underset{\substack{t \geqslant 0 \\ \|\mathbf{z}\| < \infty}}{\longrightarrow} 0 \quad \text{при } \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \to 0 \tag{3.4}$$

Аналогично предыдущему доказывается

Теорема 4. Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид (3.1), причем действительные части корней уравнения (1.4) отрицательны, а функции Y и X удовлетворяют в области (3.2) условиям (3.3) и (3.4). Тогда вопрос об устойчивости относительно (x, y) невозмущенного движения системы (3.1) полностью решается линейной системой (2.2): если нулевое решение системы (2.2) устойчиво по Ляпунову, то невозмущенное движение системы (3.1) устойчиво относительно (x, y) и экспоненциально-асимптотически x-устойчиво (в целом по z_0 [7]); если нулевое решение системы (2.2) y-неустойчиво, то и невозмущенное движение системы (3.1) y-неустойчиво.

Замечание. Если заранее известна [8] равномерная по $\{t_0, x_0, y_0, z_0\}$ z-ограниченность решений системы (3.1), то теорема 4 остается в силе, если условия (3.3) и (3.4) выполнены лишь в области z-ограниченности [6].

4. *Пример 1.* Рассмотрим голономную механическую систему с $n + k$ обобщенными координатами $(q_1, \ldots, q_n, Q_1, \ldots, Q_k) = (\mathbf{q}, \mathbf{Q})$ и не зависящими от времени связями, кинетическая энергия которой T и квадратичная часть U_2 потенциальной энергии

$$T = T^{(1)}(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, \mathbf{q}^{\cdot}) + T^{(2)}(\mathbf{Q}^{\cdot}), \qquad U_2 = U_2^{(1)}(\mathbf{q}) + U_2^{(2)}(\mathbf{Q})$$

Здесь $U_2^{(1)}(\mathbf{q})$ — определенно-положительная функция. Предположим, что на систему действуют гироскопические по $\mathbf{q}^{\cdot}$ и по $\mathbf{Q}^{\cdot}$ силы, диссипативные силы с функцией Релея $f(q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot})$, которая считается определенно-положительной квадратичной формой своих аргументов, а также некоторые неконсервативные силы выше первого порядка малости, так что уравнения движения рассматриваемой системы имеют вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial T^{(1)}}{\partial q_i} = -\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial q_i} + \sum_{s=1}^{n} g_{is} q_s^{\cdot} - \frac{\partial f}{\partial q_i^{\cdot}} + F_i(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^{\cdot}), \tag{4.1}$$

$$i = 1, \ldots, n; \ g_{is} = -g_{si}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{(2)}}{\partial Q_j^{\cdot}} - \frac{\partial T^{(1)}}{\partial Q_j} = -\frac{\partial U_2^{(2)}}{\partial Q_j} + \sum_{s=1}^{k} G_{js} Q_s^{\cdot} + \Phi_j(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot}, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^{\cdot}),$$

$$j = 1, \ldots, k; \ G_{js} = -G_{sj}$$

где функции F_i и Φ_j не содержат линейных членов и удовлетворяют условию

$$F_i(0, 0, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^{\cdot}) \equiv \Phi_j(0, 0, \mathbf{Q}, \mathbf{Q}^{\cdot}) \equiv 0 \tag{4.2}$$

В уравнениях линейного приближения для системы (4.1) переменные $(\mathbf{q}, \mathbf{q}^{\cdot})$ и $(\mathbf{Q}, \mathbf{Q}^{\cdot})$ разделяются

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_0^{(1)}}{\partial q_i^{\cdot}} = -\frac{\partial U_2^{(1)}}{\partial q_i} + \sum_{s=1}^{n} g_{is} q_s^{\cdot} - \frac{\partial f}{\partial q_i^{\cdot}}, \ T_0^{(1)} = T^{(1)}(0, 0, \mathbf{q}^{\cdot}), \quad i = 1, \ldots, n \tag{4.3}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T^{(2)}}{\partial Q_j^{\cdot}} = -\frac{\partial U_2^{(2)}}{\partial Q_j} + \sum_{s=1}^{k} G_{js} Q_s^{\cdot}, \quad j = 1, \ldots, k \tag{4.4}$$

причем положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = 0$ системы (4.3) экспоненциально-асимптотически устойчиво.

На основании теоремы 3 заключаем, что если форма $U_2^{(2)}(\mathbf{Q})$ определенно-положительна, то положение равновесия $q_i = q_i^{\cdot} = Q_j = Q_j^{\cdot} = 0$ системы (4.1) устойчиво по Ляпунову и экспоненциально-асимптотически устойчиво относительно $\mathbf{q}$, $\mathbf{q}^{\cdot}$; если же $U_2^{(2)}(\mathbf{Q})$ принимает отрицательные значения и все $G_{js} = 0$, то положение равновесия $q_i = q_i^{\cdot} = Q_j = Q_j^{\cdot} = 0$ системы (4.1) неустойчиво относительно $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}^{\cdot}$.

Замечания. 1) Этот вывод остается в силе, если функция f знакопостоянна (частичная по $q_1^{\cdot}, \ldots, q_n^{\cdot}$ диссипация), но [9] положение равновесия $\mathbf{q} = \mathbf{q}^{\cdot} = 0$ системы (4.3) асимптотически устойчиво.

2) Условие (4.2) выполняется для консервативных сил, если потенциальная энергия системы имеет вид

$$U(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) = U_2^{(1)}(\mathbf{q}) + U_2^{(2)}(\mathbf{Q}) + U'(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$$

где U' — члены порядка малости выше второго, причем $\partial U' / \partial q_i \equiv \partial U' / \partial Q_j \equiv 0$ при $\mathbf{q} = 0$.

Пример 2. Рассмотрим частный случай примера 1. Пусть система приведена к нормальным координатам [10] $x_1, \ldots, x_n$, $X_1, \ldots, X_k$, а уравнения движения имеют вид

$$(4.5)\qquad x_i^{\cdot\cdot} = -\lambda_i x_i + \sum_{s=1}^{n} g_{is} x_s^{\cdot} - \frac{\partial f}{\partial x_i^{\cdot}} + F_i(\mathrm{x}, \mathrm{x}^{\cdot}, \mathrm{X}, \mathrm{X}^{\cdot}), \quad i = 1, \ldots, n; \quad g_{is} = -g_{si}$$

$$X_j^{\cdot\cdot} = -\Lambda_j X_j + \sum_{s=1}^{k} G_{js} X_s^{\cdot} + \Phi_j(\mathrm{x}, \mathrm{x}^{\cdot}, \mathrm{X}, \mathrm{X}^{\cdot}), \quad j = 1, \ldots, k; \; G_{js} = -G_{sj}$$

где $f(x_1^{\cdot}, \ldots, x_n^{\cdot})$ — определенно-положительная квадратичная форма. Предположим, что все $\lambda_i > 0$, а функции F_i и Φ_j не содержат линейных членов и удовлетворяют условию $F_i(0, 0, \mathrm{X}, \mathrm{X}^{\cdot}) \equiv \Phi_j(0, 0, \mathrm{X}, \mathrm{X}^{\cdot}) \equiv 0$. На основании теоремы 3 заключаем, что если все $\Lambda_j > 0$, то положение равновесия $x_i = x_i^{\cdot} = X_j = X_j^{\cdot} = 0$ системы (4.5) устойчиво по Ляпунову и экспоненциально-асимптотически (x, x$^{\cdot}$)-устойчиво; если существует $\Lambda_j \leqslant 0$ и все $G_{js} = 0$, то положение равновесия $x_i = x_i^{\cdot} = X_j = X_j^{\cdot} = 0$ системы (4.5) неустойчиво относительно X, X$^{\cdot}$.

Пример 3. Пример 1 распространяется на задачу устойчивости стационарных движений [11]. Предположим, что для данных значений циклических интегралов $p_\alpha = c_\alpha$ позиционные координаты q_j ($j = 1, \ldots, k$) разбиваются на две группы: $q_1, \ldots, q_m$ и $q_{m+1}, \ldots, q_k$, причем квадратичная относительно позиционных скоростей часть R_2 функции Рауса R имеет вид (4.6), а потенциальная энергия приведенной системы имеет вид (4.7)

$$(4.6)\qquad R_2 = R_2^{(1)}(q_1, \ldots, q_k, q_1^{\cdot}, \ldots, q_m^{\cdot}) + R_2^{(2)}(q_{m+1}^{\cdot}, \ldots, q_k^{\cdot})$$

$$(4.7)\qquad W = W_2^{(1)}(q_1, \ldots, q_m) + W_2^{(2)}(q_{m+1}, \ldots, q_k) + W'(q_1, \ldots, q_k)$$

Здесь $W_2^{(1)}$ и $W_2^{(2)}$ — квадратичные формы своих аргументов, первая из которых определенно-положительна, W' — члены выше второго порядка малости, $\partial W' / \partial q_i \equiv 0$ ($i = 1, \ldots, k$) при $q_1 = \ldots = q_m = 0$.

Пусть, далее на систему действуют диссипативные силы с функцией Релея $f(q_1^{\cdot}, \ldots, q_m^{\cdot})$ и некоторые неконсервативные силы выше первого порядка малости, не меняющие значений p_α, а гироскопические силы, возникающие за счет наличия в функции Рауса линейных по $q_j^{\cdot}$ членов, таковы, что уравнения движения [11] принимают вид

$$(4.8)\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial R_2^{(1)}}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial R_2^{(1)}}{\partial q_i} = -\frac{\partial W_2^{(1)}}{\partial q_i} + \sum_{s=1}^{m} g_{is} q_s^{\cdot} - \frac{\partial f}{\partial q_i^{\cdot}} + F_i, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R_2^{(2)}}{\partial q_i^{\cdot}} - \frac{\partial R_2^{(1)}}{\partial q_i} = -\frac{\partial W_2^{(2)}}{\partial q_i} + \sum_{s=m+1}^{k} g_{is} q_s^{\cdot} + F_i, \quad i = m+1, \ldots, k$$

Здесь функции F_i ($i = 1, \ldots, k$) не содержат линейных членов и $F_i \equiv 0$ ($i = 1, \ldots, k$) при $q_1 = q_1^{\cdot} = \ldots = q_m = q_m^{\cdot} = 0$.

На основании теоремы 3 заключаем, что если форма $W_2^{(2)}$ определенно-положительна, то стационарное движение ($p_\alpha = c_\alpha$, $q_j = q_j^{\cdot} = 0$) устойчиво относительно $q_1, \ldots, q_k$, $q_1^{\cdot}, \ldots, q_k^{\cdot}$ и экспоненциально-асимптотически устойчиво относительно $q_1, \ldots, q_m$, $q_1^{\cdot}, \ldots, q_m^{\cdot}$ по крайней мере для возмущений, не меняющих значений $p_\alpha = c_\alpha$; если $W_2^{(2)}$ принимает отрицательные значения, а гироскопические члены во второй группе уравнений (4.8) отсутствуют, то данное стационарное движение неустойчиво относительно $q_{m+1}, \ldots, q_k$, $q_{m+1}^{\cdot}, \ldots, q_k^{\cdot}$.

Пример 4. Рассмотрим связь полученных в п. 2 результатов с критическими случаями одной пары и нескольких пар чисто мнимых корней.

Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид

$$
\begin{aligned}
&x_s^{\cdot} = p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n + X_s(x, y, x_1, \ldots, x_n), \quad s = 1, \ldots, n \\
(4.9) \qquad &x^{\cdot} = q_{11}x_1 + \ldots + q_{1n}x_n + p_1x + q_1y + X(x, y, x_1, \ldots, x_n) \\
&y^{\cdot} = q_{21}x_1 + \ldots + q_{2n}x_n + p_2x + q_2y + Y(x, y, x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}
$$

причем корни уравнения (1.4) имеют отрицательные действительные части, уравнение

$$
\begin{vmatrix} p_1 - \lambda & q_1 \\ p_2 & q_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0
$$

имеет пару чисто мнимых корней, а X, Y и X_s — аналитические функции, разложение которых начинается членами не ниже второго порядка и которые удовлетворяют условию

$$
(4.10) \qquad X(x, y, 0, \ldots, 0) \equiv Y(x, y, 0, \ldots, 0) \equiv X_s(x, y, 0, \ldots, 0) \equiv 0
$$

Из теоремы 1 вытекает, что невозмущенное движение системы (4.9) устойчиво по Ляпунову и экспоненциально-асимптотически устойчиво относительно $x_1, \ldots, x_n$. В силу (4.10) устойчивость по x, y не является асимптотической (достаточно положить $x_{s0} = 0$, $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$); следовательно, имеем дело с особенным случаем [2] критического случая пары чисто мнимых корней.

Аналогичные выводы справедливы в критическом случае [12] нескольких пар чисто мнимых корней вне зависимости от наличия резонансных соотношений между мнимыми корнями.

Автор благодарит В. В. Румянцева за внимание к работе.

Поступила 29 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малкин И. Г.* Об устойчивости движения в смысле Ляпунова. Матем. сб., 1938, т. 3, вып. 1.
2. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
3. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
4. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
5. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
6. *Озиранер А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
7. *Румянцев В. В.* Некоторые задачи об устойчивости движения по отношению к части переменных. В сб.: Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа. М., «Наука», 1972.
8. *Озиранер А. С.* О некоторых теоремах второго метода Ляпунова. ПММ, 1972, т. 36, вып. 3.
9. *Пожарицкий Г. К.* Об асимптотической устойчивости равновесий и стационарных движений механических систем с частичной диссипацией. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
10. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М., «Наука», 1965.
11. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1967.
12. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. М., «Высшая школа», 1973.