

**НОВЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ
В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА
ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ**

В. В. Козлов

(Москва)

Теория рождения периодических решений в канонических системах дифференциальных уравнений, близких к интегрируемым, была разработана Пуанкаре для целей небесной механики. В данной работе устанавливается применимость этих результатов к классической задаче о движении тяжелого твердого тела с закрепленной точкой. Тем самым удается существенно расширить класс периодических решений, известных в этой задаче.

1. Возмущение равномерных вращений. Функция Гамильтона рассматриваемой задачи имеет вид

$$(1.1) \quad F = F_0 + \mu F_1$$

Здесь F_0 — живая сила, μF_1 — потенциальная энергия системы (выделенный постоянный множитель μ — это произведение веса тела на расстояние от центра тяжести до точки закрепления). Канонические уравнения с гамильтонианом (1.1) имеют циклический интеграл — интеграл площадей; фиксируя его постоянную, сведем рассматриваемую задачу к системе с двумя степенями свободы, которую будем называть приведенной.

Когда $\mu = 0$, будем иметь случай Эйлера — Пуансо. В этой невозмущенной задаче существуют частные изолированные периодические решения — равномерные вращения вокруг главных осей эллипсоида инерции. Выясним, будут ли уравнения с функцией Гамильтона (1.1) допускать периодические решения, если $\mu \neq 0$, но очень мало.

Случай несимметричного твердого тела. Теорема 1. Периодические решения невозмущенной приведенной задачи — невертикальные постоянные вращения вокруг главных осей инерции — не исчезают при добавлении возмущения, а при малых μ переходят в периодические решения возмущенной задачи, аналитически зависящие от малого параметра μ и постоянной энергии.

Следовательно, на почти всех трехмерных уровнях энергии приведенная возмущенная система имеет шесть периодических решений при малых значениях μ .

Так как будут рассматриваться невертикальные равномерные вращения невозмущенной задачи, то для доказательства этого утверждения можно перейти к каноническим переменным Депри (l, g, h, L, G, H) [1]. Функция (1.1), записанная в этих координатах, не содержит угловой пе-

ременной h . Следовательно, H — первый интеграл канонических уравнений (интеграл площадей); понижение порядка системы достигается фиксированием его постоянной. Пусть A, B, C — главные центральные моменты инерции твердого тела. Будем считать, что $A > B > C$. Гамильтониан задачи Эйлера — Пуансо в переменных Депри имеет вид

$$F_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^2 l}{A} + \frac{\cos^2 l}{B} \right) (G^2 - L^2) + \frac{L^2}{2C}$$

Рассмотрим вращения вокруг меньшей оси инерции (с периодом T)

$$(1.2) \quad L = 0, \quad G = G_0, \quad l = \frac{\pi}{2}, \quad g = \frac{G_0}{A} t + g_0, \quad T = \frac{2\pi A}{G_0}$$

Применяя метод малого параметра, обозначим отклонения от периодического решения (1.2) при $\mu = 0$ соответственно через L_1, G_1, l_1 и g_1 . Тогда линейные уравнения

$$(1.3) \quad L_1 \dot{} = \frac{B-A}{AB} G_0^2 l_1, \quad G_1 \dot{} = 0, \quad l_1 \dot{} = \frac{A-C}{AC} L_1, \quad g_1 \dot{} = \frac{G_1}{A}$$

суть уравнения в вариациях для порождающего решения. Они легко интегрируются

$$\begin{aligned} G_1 &= G_{1,0}, \quad g_1 = \frac{G_{1,0}}{A} t + g_{1,0}, \quad L_1 = A_1 \sin \omega t + B_1 \cos \omega t \\ l_1 &= A_2 \sin \omega t + B_2 \cos \omega t, \quad \omega^2 = \frac{(A-B)(A-C)}{BC} \left(\frac{G_0}{A} \right)^2 > 0 \\ B_1 &= L_{1,0}, \quad B_2 = l_{1,0}, \quad A_1 = \frac{B-A}{AB} \frac{G_0^2}{\omega} l_{1,0}, \quad A_2 = \frac{A-C}{AC} \frac{L_{1,0}}{\omega} \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\frac{A_1 A_2}{l_{1,0} L_{1,0}} = \frac{(B-A)(A-C)}{A^2 BC} \left(\frac{G_0}{\omega} \right)^2 = -1$$

Матрица монодромии уравнений (1.3)

$$X(T) = \begin{vmatrix} \cos(\omega T) & 0 & \frac{A_1}{l_{1,0}} \sin(\omega T) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{A_2}{L_{1,0}} \sin(\omega T) & 0 & \cos(\omega T) & 0 \\ 0 & \frac{2\pi}{G_0} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Согласно модификации метода малого параметра Пуанкаре, предложенной в [2], надо образовать матрицу $Y(T) = X(T) - E$ и убедиться в том, что ранг этой матрицы равен трем. Можно показать, что это условие выполнено, следовательно, у системы с гамильтонианом (1.1) существуют периодические решения, аналитически зависящие от μ , период которых мало отличается от T .

Вычеркивая из матрицы $Y(T)$ последний столбец и вторую строку, получим матрицу, определитель которой равен

$$4\pi G_0^{-1} [\cos(\omega T) - 1]$$

Для того чтобы этот определитель был отличен от нуля, нужно потребовать выполнения условия $\omega T \neq 2\pi k$ (k — целое число) или, что то же самое

$$[(A - B)(A - C) / (BC)]^{1/2} \neq k$$

Покажем, что это неравенство справедливо всегда. Действительно, в противном случае

$$A = B + C + (k^2 - 1)BC / A$$

При $k \neq 0$ последнее соотношение противоречит неравенству треугольника $A < B + C$, а при $k = 0$ легко вытекает из условия $A > B > C$. Таким образом, ранг матрицы Y действительно равен трем.

Установим, что найденные периодические решения возмущенной задачи аналитически зависят от постоянной энергии. Для этого составим следующую матрицу пятого порядка

$$Z = \begin{vmatrix} Y, & \varphi \\ \psi, & 0 \end{vmatrix}$$

где φ — вектор-столбец правой части невозмущенной системы уравнений, а ψ — строка $(\partial F_0 / \partial L, \partial F_0 / \partial G, \partial F_0 / \partial l, \partial F_0 / \partial g)$, в которые подставлено решение (1.2) при $t = T$. Можно показать, что ранг матрицы Z равен четырем, поэтому [2] найденные решения аналитически зависят от постоянной интеграла энергии.

Действительно, вычеркивая из Z последний столбец и вторую строку, получим матрицу, определитель которой равен

$$-(G_0 / A)^2 [\cos(\omega T) - 1]$$

Как было показано выше, эта величина никогда в нуль не обращается.

Для равномерных вращений вокруг большей и средней осей инерции теорема доказывается точно так же (с тем лишь отличием, что в случае средней оси решение уравнений (1.3) выражается не в тригонометрических, а в гиперболических функциях времени).

Случай динамической симметрии. Теорема 2. Если $A = B \neq C$, то два периодических решения невозмущенной приведенной задачи — не вертикальные постоянные вращения вокруг оси симметрии в противоположных направлениях — не исчезают при добавлении возмущения, а переходят при малых μ в периодические решения возмущенной задачи, аналитически зависящие от параметра μ и постоянной интеграла энергии.

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1.

З а м е ч а н и я. 1°. Случай $A = B = C$ не рассматривается, ибо он относится к числу интегрируемых.

2°. В рассматриваемой задаче известен ряд частных случаев интегрируемости [3]. В основном, это периодические решения, выраженные в конечном виде через известные функции. Некоторые из них (например, решения Бобылева — Стеклова) при малых значениях параметра μ представляют собой частные случаи периодических решений, существование которых доказывается теоремами 1 и 2.

2. Рождение изолированных периодических решений из семейств периодических решений задачи Эйлера — Пуансо. Доказательство теорем 1 и 2 не опиралось на конкретный вид возмущающей функции, а использовало лишь ее инвариантность относительно вертикальных вращений и аналитичность. Укажем множество новых периодических решений, существование которых тесно связано со свойствами всей функции Гамильтона рассматриваемой задачи.

Случай несимметричного твердого тела. Будем считать, что $A > B > C$. В приведенной задаче Эйлера — Пуансо обычным способом введем переменные действие — угол (см. [4])

$$(2.1) \quad I_2 = G, \quad I_1(F_0, I_2) = \frac{1}{2\pi} \oint \sqrt{\frac{2F_0 - I_2^2 f(x)}{C^{-1} - f(x)}} dx \\ f(x) = A^{-1} \sin^2 x + B^{-1} \cos^2 x$$

Канонические координаты, сопряженные с I_1 и I_2 , обозначим через φ_1 и φ_2 . В действительном движении переменные L и G связаны неравенствами $G \geq 0$, $|L| \leq G$, поэтому область возможных значений I_1 и I_2 есть $\Delta = \{I_1, I_2: I_2 \geq 0, |I_1| \leq I_2\}$. В канонических переменных действие — угол функция Гамильтона F_0 зависит только от I_1 и I_2 : $F_0 = F_0(I_1, I_2)$.

Используя формулу (2.1), легко получить, что линии уровня функции $2F_0(I_1, I_2) / I_2^2$ в координатах «действие» суть прямые линии, проходящие через начало координат. Заметим, что прямые $I_1 = 0$, $|I_1| = I_2$ (лежащие в Δ) отвечают равномерным вращениям твердого тела соответственно вокруг большей и меньшей осей инерции. Вращениям вокруг средней оси соответствуют точки из Δ , расположенные на двух прямых $2F_0 / I_2^2 = 1/B$.

С помощью формулы (2.1) доказываются следующие утверждения.

Лемма 1. Функция $F_0(I_1, I_2)$ непрерывна в Δ и аналитична в области

$$\Delta_A = \Delta \setminus (\{I_1 = 0\} \cup \{2F_0 / I_2^2 = 1/B\} \cup \{|I_1| = I_2\})$$

Лемма 2. Гессиан $|\partial^2 F_0 / \partial I_i \partial I_j|$ ($i, j = 1, 2$) сохраняет знак в каждой из четырех связных подобластей области Δ_A (ср. с [5]).

Рассмотрим геометрическое представление Пуансо. Когда на эллипсоиде инерции точки касания (полюс) сделает один полный оборот, тело повернется вокруг оси постоянного момента на некоторый угол $\alpha = \alpha(2F_0 / I_2^2; A, B, C)$. Положим $\omega_i = \partial F_0 / \partial I_i$, $\omega_i = \omega_i(I_1, I_2)$, ($i = 1, 2$) (частоты задачи Эйлера — Пуансо).

Лемма 3. (См. [4], § 86)

$$\omega_2 / \omega_1 = (2\pi)^{-1} \alpha(2F_0 / I_2^2; A, B, C)$$

Лемма 4. Функция $\alpha(x; A, B, C)$ — аналитическая на $(1/A, 1/C) \setminus \{1/B\}$, причем $\alpha \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $x \rightarrow 1/B$ (ср. с [5]).

Интеграл площадей будет удобно обозначить через I_3 . Разложение возмущающей функции $F_1(I_1, I_2, I_3, \varphi_1, \varphi_2)$ в двойной ряд Фурье по переменным φ_1 и φ_2 имеет следующий вид ([6], § 86):

$$(2.2) \quad F_1 = \sum B_{m,1} e^{i(m\varphi_1 + \varphi_2)} + \sum B_{m,-1} e^{i(m\varphi_1 - \varphi_2)} + \sum B_{m,0} e^{im\varphi_2}$$

Здесь $V_{m,1}$, $V_{m,-1}$, $V_{m,0}$ — функции от I_1 , I_2 , I_3 , аналитические при фиксированном I_3 в области Δ_A . Обозначим через x_0 , y_0 , z_0 координаты центра тяжести тела в главных осях инерции.

Теорема 3. Пусть $I_2 \neq 0$, $I_2 \neq |I_3|$. Рассмотрим множество инвариантных торов приведенной задачи Эйлера — Пуансо с числами вращения

$$(2\pi)^{-1}\alpha (2F_0^*/I_2^2; A, B, C) = k$$

(k — целое число). Если $z_0 = 0$, то k нечетно, если $x_0^2 + y_0^2 = 0$, то k четно, если, наконец, $z_0 \neq 0$ и $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$, то k — любое целое число.

Для любого несимметричного тела существует $N(A, B, C)$, такое, что при $k > N$ из семейства периодических решений, лежащих на каждом из этих торов, рождаются при возмущении, по крайней мере, два изолированных периодических решения, существующих при достаточно малых μ и аналитически зависящих от этого параметра. При этом одно из них устойчиво по первому приближению, а другое неустойчиво.

Используя лемму 4, получим, что существует бесконечно много инвариантных торов задачи Эйлера — Пуансо с рациональными числами вращения, на которых рождаются, по крайней мере, два изолированных периодических решения возмущенной задачи.

Доказательство. Пусть для $I = (I_1, I_2) = I^\circ \in \Delta_A$ частоты невозмущенной задачи Эйлера — Пуансо ω_1 , ω_2 соизмеримы. Тогда функция $F_1(I^\circ, \omega_1 t, \omega_2 t + \lambda)$ периодична по t . Обозначим через $\bar{F}_1(I^\circ, \lambda)$ ее временное среднее. Для того чтобы на торе $I = I^\circ$ рождались пары изолированных периодических решений, достаточно проверить выполнение следующих условий ([6], § 42, 79): 1) гессиан $|\partial^2 F_0 / \partial I^2| \neq 0$ для $I = I^\circ$, 2) $\partial^2 \bar{F}_1 / \partial \lambda^2 \neq 0$, когда $\partial \bar{F}_1 / \partial \lambda = 0$ ($I = I^\circ$), 3) квадратичная форма

$$\omega_1^2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial I_2^2} - 2\omega_1 \omega_2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial I_1 \partial I_2} + \omega_2^2 \frac{\partial^2 F_0}{\partial I_1^2} \neq 0$$

когда $I = I^\circ$.

Условие 1) выполнено во всей области Δ_A (лемма 2). Условие 3) означает геометрически, что линия уровня функции $F_0(I_1, I_2)$ не имеет перегиба в точке $(I_1, I_2) = I^\circ$. Используя формулу (2.1), можно доказать, что это условие выполнено всюду в Δ_A .

Более точно разложение (2.2) можно записать так (см. [4]):

$$(2.3) \quad F_1 = (\sin \delta \sin \varphi_2, \sin \delta \cos \varphi_2, \cos \delta) (s_{ij}) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$\cos \delta = \frac{I_3}{I_2}, \quad \alpha = \frac{x_0}{r}, \quad \beta = \frac{y_0}{r}, \quad \gamma = \frac{z_0}{r}, \quad r = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$$

Здесь элементы квадратной матрицы (s_{ij}) третьего порядка не зависят от φ_2 ; разложения s_{ij} в ряды Фурье по φ_1 выписаны в [4].

Ограничимся случаем, когда $x_0^2 + y_0^2 = 0$, а $z_0 \neq 0$ (другие случаи, указанные в теореме, рассматриваются аналогично). Тогда F_1 , соглас-

но (2.3) и [4], запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \gamma (s_{13} \sin \delta \sin \varphi_2 + s_{23} \sin \delta \cos \varphi_2 + s_{33} \cos \delta) = \\
 &= \gamma \frac{2\pi}{K} \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \Lambda^2}} \left\{ \sin \delta \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-q^n (1 - q^{2n}) \operatorname{ch} \sigma \sin 2n \varphi_1 \sin \varphi_2}{1 - 2q^{2n} \operatorname{ch} 2\sigma + q^{4n}} + \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{q^n (1 + q^{2n}) \operatorname{sh} \sigma \cos 2n \varphi_1 \cos \varphi_2}{1 - 2q^{2n} \operatorname{ch} 2\sigma + q^{4n}} - \frac{1}{4 \operatorname{sh} \sigma} \right] + \\
 &+ \left. \cos \delta \left(\frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1 + q^{2n}} \cos 2n \varphi_1 \right) \right\} \\
 \kappa^2 &= \frac{C(A-B)}{A(B-C)}, \quad \Lambda^2 = \kappa^2 \frac{2CF_0 - I_2^2}{I_2^2 - 2AF_0}, \quad q = \exp\left(\frac{-\pi K'}{K}\right) \\
 K' &= K(\sqrt{1 - \Lambda^2}), \quad \sigma = \frac{\pi}{2K} F\left(\operatorname{arctg} \frac{\kappa}{\Lambda}, \sqrt{1 - \Lambda^2}\right)
 \end{aligned}$$

Здесь $K(\Lambda)$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем Λ , F — эллиптический интеграл первого рода.

Положим $\varphi_1 = \omega_1 t$, $\varphi_2 = \omega_2 t + \lambda$, $\omega_2 / \omega_1 = 2n$ (n — натуральное число). Тогда

$$\bar{F}_1 = \gamma \frac{2\pi}{K} \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 + \Lambda^2}} \sin \delta \frac{q^n [(1 + q^{2n}) \operatorname{sh} \sigma - (1 - q^{2n}) \operatorname{ch} \sigma]}{1 - 2q^{2n} \operatorname{ch} 2\sigma + q^{4n}} \frac{\cos \lambda}{2}$$

Так как $\sin \delta \neq 0$ (в противном случае $|I_3| = I_2$), то условие 2) теоремы Пуанкаре нарушается только в том случае, если

$$(2.4) \quad (1 - q^{2n}) \operatorname{ch} \sigma - (1 + q^{2n}) \operatorname{sh} \sigma = 0$$

Когда $n \rightarrow \infty$, то, согласно леммам 3 и 4, функция $2F_0 / I_2^2$ стремится к $1/B$; при этом, очевидно, $\Lambda \rightarrow C/A (< 1)$. Так как Λ — непрерывная функция от $2F_0 / I_2^2$ в некоторой окрестности точки $1/B$, то существует номер $N_1(A, B, C)$, такой, что при $\omega_2 / \omega_1 = 2n > N_1$ справедливы неравенства

$$0 < \Lambda_1 < \Lambda < \Lambda_2 < 1, \quad \Lambda_i = \text{const}, \quad i = 1, 2$$

При этом, очевидно, $|\sigma| < \sigma_0$ и $|q| < q_0 < 1$ (числа Λ_1 , Λ_2 , σ_0 и q_0 в конечном счете зависят только от A, B, C). Следовательно, существует номер $N(A, B, C)$ ($N > N_1$), такой, что при $\omega_2 / \omega_1 = 2n > N$ равенство (2.4) не может выполняться.

Случай динамической симметрии. Можно показать, что в переменных Депри функция Гамильтона (1.1) в случае $A = B$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{1}{2A} G^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) L^2 + P \left[x_0 \left(\frac{H}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G} \right)^2} \sin l + \right. \right. \\
 &+ \left. \frac{L}{G} \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G} \right)^2} \sin l \cos g + \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G} \right)^2} \cos l \sin g \right) + \\
 &+ \left. z_0 \left(\frac{LH}{G^2} - \sqrt{1 - \left(\frac{L}{G} \right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{H}{G} \right)^2} \cos g \right) \right]
 \end{aligned}$$

где $(x_0, 0, z_0)$ — координаты центра тяжести в главных осях инерции, P — вес тела. Отметим, что эти переменные являются переменными дей-

ствие — угол интегрируемой задачи Эйлера — Пуансо в симметричном случае.

Теорема 4. Пусть $x_0 \neq 0$ и $A = B > 2C$. Тогда на двумерных инвариантных торах

$$\frac{G}{A} = \pm \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) L, \quad G \neq 0, \quad G \neq |H|$$

приведенной задачи Эйлера — Пуансо рождаются пары изолированных периодических решений возмущенной системы при малых μ . Они аналитически зависят от μ , и одно из решений каждой пары устойчиво в первом приближении, а другое неустойчиво.

Это утверждение доказывается так же, как теорема 3.

Замечание. С помощью конструкции, предложенной в [7], можно доказать, что при добавлении возмущения исчезают не все периодические решения, лежащие на любом инвариантном торе задачи Эйлера — Пуансо с рациональным числом вращения, а при малых μ остаются, по крайней мере, два. Неизвестно, правда, будут ли они изолированными и аналитически зависеть от μ .

3. Несуществование дополнительного аналитического интеграла уравнений движения несимметричного твердого тела. Рождение большого числа невырожденных периодических решений уравнений движения несимметричного тела несовместимо с интегрируемостью этой задачи. С помощью теоремы 3 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 5. Канонические уравнения движения несимметричного тяжелого твердого тела с функцией Гамильтона (1.1) не имеют третьего аналитического и аналитически зависящего от параметра μ интеграла, независимого от классических, и находящегося в инволюции с интегралом площадей.

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть такой интеграл существует. Тогда в силу предположения об инволюции существует дополнительный независимый интеграл приведенной канонической системы уравнений; обозначим его $\Phi = \Phi_0 + \mu \Phi_1 + \dots$.

Можно показать, что функции F_0 и Φ_0 зависимы во всех точках двумерных инвариантных торов задачи Эйлера — Пуансо, о которых идет речь в теореме 3 (эти торы будем называть резонансными).

Действительно, периодические решения $\Gamma(\mu)$, рождающиеся из состава периодических решений, расположенных на произвольном резонансном торе T_0^2 задачи Эйлера — Пуансо, не вырождены, поэтому, как доказано в [6], функции F и Φ зависимы во всех точках $\Gamma(\mu)$. Устремим μ к нулю. Периодическое решение $\Gamma(\mu)$ перейдет в периодическое решение $\Gamma(0)$ невозмущенной задачи, лежащее на T_0^2 , а функции F и Φ перейдут соответственно в F_0 и Φ_0 . По непрерывности функции F_0 и Φ_0 будут зависимы во всех точках траектории периодического решения $\Gamma(0)$. В некоторой окрестности тора T_0^2 , на котором лежит $\Gamma(0)$, введем переменные действие — угол задачи Эйлера — Пуансо: $(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2)$. Тогда F_0 и Φ_0 будут зависеть только от I_1 и I_2 (последняя — в силу невырожденности приведенной задачи Эйлера — Пуансо). Так как функции F_0 и Φ_0 зависимы на $\Gamma(0)$, то матрица Якоби $\partial(F_0, \Phi_0) / \partial(I, \varphi)$ имеет ранг единицу, когда $(I, \varphi) \in \Gamma(0)$. В частности, в этих точках $\partial(F_0, \Phi_0) / \partial(I_1, I_2) = 0$. Однако исходная матрица Якоби не зависит от φ ; значит ее ранг равен единице во всех

точках тора T_0^2 , и, следовательно, функции F_0 и Φ_0 на нем зависимы. Доказано, таким образом, что функции F_0 и Φ_0 зависимы на множестве всех резонансных торов приведенной задачи Эйлера — Пуансо.

Нетрудно показать, что множество всех резонансных торов обладает следующим ключевым свойством: если аналитическая функция f обращается на нем в нуль, то $f \equiv 0$ во всем фазовом пространстве.

Принимая во внимание аналитичность функций F_0 и Φ_0 , получим, что они зависимы во всем фазовом пространстве, т. е. просто функционально зависимы. В то же время можно показать, что если существует дополнительный независимый интеграл Φ , то существует такой аналитический интеграл Φ' , что функции F_0 и Φ_0' независимы (см. [6], § 81). Полученное противоречие доказывает справедливость теоремы.

Замечание. Основная идея проделанных рассуждений содержится в первом доказательстве Пуанкаре общей теоремы о неинтегрируемости канонических уравнений, близких к интегрируемым ([8], § 22). Но, как было замечено самим Пуанкаре, его общая теорема неприменима к рассматриваемой задаче ([6], § 86). Успех приведенного выше доказательства состоит в использовании ключевого свойства множества резонансных торов невозмущенной задачи.

Автор благодарит В. И. Арнольда и Ю. А. Архангельского за внимание и советы.

Поступила 26 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Денри А. Изучение свободного вращения твердого тела около неподвижной точки с помощью фазовой плоскости. Механика. Сб. перев., 1968, № 2.
2. Зигель К. Л. Лекции по небесной механике. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
3. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. М., Гостехиздат, 1953.
4. Садов Ю. А. Переменные действие — угол в задаче Эйлера — Пуансо. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
5. Арнольд В. И. Доказательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Успехи матем. наук, 1963, т. 18, № 5.
6. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. Избранные труды, т. 1. М., «Наука», 1971.
7. Arnold V. I., Avez A. Problemes ergodiques de la mecanique classique. Paris, Guathier — Villars, 1967.
8. Пуанкаре А. О проблеме трех тел и об уравнениях динамики. Избранные труды, т. 2. М., «Наука», 1972.