Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 62—50

АЛЬТЕРНАТИВА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ СБЛИЖЕНИЯ – УКЛОНЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ИМПУЛЬСЫ УПРАВЛЕНИЙ ИГРОКОВ

Н. Н. Субботина, А. И. Субботин

(Свердловск)

Рассматривается дифференциальная игра, в которой игроки могут управлять движением системы при помощи обобщенных импульсных воздействий. Подобные задачи исследовались в работах [1–5]. В данной статье описаны позиционные процедуры управления с поводырем, в рамках которых установлены альтернативные условия разрешимости задач сближения и уклонения. Основные построения, используемые в статье, подобны экстремальной конструкции, предложенной в работах [6–8] для дифференциальных игр с геометрическими ограничениями на управления игроков.

1. Рассматривается дифференциальная игра, в которой движение конфликтно-управляемой системы описывается уравнением

$$x^{\cdot} = f(t, x) + B(t)\, U^{\cdot} + C(t)\, V^{\cdot} + x_0 \delta(t - t_0) \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор системы, функция $f(t, x)$ непрерывна по совокупности переменных и удовлетворяет условию Липшица по x, U и V-векторные управления первого и второго игроков, имеющие размерности l_1 и l_2, $B(t)$ и $C(t)$ — непрерывные матрицы-функции соответствующих размерностей, $\delta(t - t_0)$ — дельта-функция, x_0 — начальное состояние системы в момент времени $t = t_0$.

Уравнение (1.1) рассматривается на полуоси $t \geqslant t_0$ и понимается в смысле теории распределений [9]. В качестве допустимых управлений $U[t]$ и $V[t]$ выбираются функции, тождественно равные нулю при $t < t_0$ и непрерывные справа. Предполагается, что вариации допустимых управлений удовлетворяют соотношениям

$$\int_{t_0}^{\vartheta} \| dU[t] \| \leqslant \mu_0, \qquad \int_{t_0}^{\vartheta} \| dV[t] \| \leqslant \nu_0 \tag{1.2}$$

Здесь μ_0 и ν_0 — числа, задающие ресурсы управлений первого и второго игроков, $[t_0, \vartheta]$ — отрезок времени, на котором рассматривается игра, вариации управлений задаются соотношениями

$$\int_{t_0}^{\vartheta} \| dU[t] \| = \| U[t_0] \| + \sup \sum_{i=1}^{k} \| U[\tau_i] - U[\tau_{i-1}] \| \tag{1.3}$$

$$\int_{t_0}^{\vartheta} \| dV[t] \| = \| V[t_0] \| + \sup \sum_{i=1}^{k} \| V[\tau_i] - V[\tau_{i-1}] \|$$

где верхняя грань берется по всевозможным конечным разбиениям отрезка $[t_0, \vartheta]$ $(\tau_0 = t_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \ldots \leqslant \tau_k = \vartheta)$, символ $\| F \|$ означает евклидову норму вектора F. Известно [9], что для каждой пары допустимых управлений $U[t]$ и $V[t]$ существует и единственно решение системы (1.1) — функция $x[t]$ с ограниченной вариацией, непрерывная справа, тождественно равная нулю при $t < t_0$ и удовлетворяющая системе (1.1) в смысле теории распределений.

Исследуемая здесь дифференциальная игра складывается из задачи о сближении и задачи об уклонении. *Задача о сближении*, стоящая перед первым игроком, состоит в том, чтобы обеспечить попадание точки $\{t, x[t]\}$ на заданное множество M^* к некоторому заданному моменту времени $t = \vartheta$ и при этом гарантировать выполнение фазового ограничения $\{t, x[t]\} \in N^*$ вплоть до встречи точки $\{t, x[t]\}$ с множеством M^*. *Задача об уклонении*, стоящая перед вторым игроком, заключается в том, чтобы гарантировать либо уклонение точки $\{t, x[t]\}$ от встречи с множеством M^* вплоть до момента $t = \vartheta$, либо нарушение фазового ограничения $\{t, x[t]\} \in N^*$ прежде, чем точка $\{t, x[t]\}$ попадет на множество M^*.

Решения этих задач требуется найти в классе позиционных способов управления, использующих информацию лишь о реализующейся позиции игры. Здесь позицией игры, реализовавшейся к моменту времени t, называется вектор

$$p[t] = \{t, x[t-0], \mu[t-0], \nu[t-0]\}$$

где символ $s[t-0]$ означает предел слева функции $s[\tau]$ в точке $\tau = t$; величины $\mu[t]$ и $\nu[t]$ оценивают ресурсы управления, которыми располагают первый и второй игроки к моменту t, эти величины задаются соотношениями

$$\mu[t] = \mu_0 - \int_{t_0}^{t} \| dU[\tau] \|, \quad \nu[t] = \nu_0 - \int_{t_0}^{t} \| dV[\tau] \|$$

Рассматривается случай, когда множества M^* и N^* замкнуты и являются цилиндрическими в направлении осей тех координат x_j, для которых соответствующие компоненты $x_j[t]$ движений $x[t]$ могут рваться при импульсных воздействиях управлений. Доказывается, что в этом случае для любой начальной позиции игры $p_0 = \{t_0, x_0, \mu_0, \nu_0\}$ и любого числа $\vartheta \geqslant t_0$ всегда либо разрешима задача первого игрока о сближении с множеством M^* к моменту $t = \vartheta$ либо разрешима задача второго игрока об уклонении вплоть до момента $t = \vartheta$. При доказательстве используется экстремальная конструкция, аналогичная построениям из работ [6-8] и модифицированная с учетом импульсного характера управлений.

2. Введем элементы экстремальной конструкции, используемой при решении задачи о сближении. Рассмотрим следующую вспомогательную систему:

$$x^{\cdot} = f(t, x) + B(t) U_*^{\cdot} + C(t) V_*^{\cdot} + x_* \delta(t - t_0) \tag{2.1}$$

где роль начальной позиции играет вектор $p_* = \{t_*, x_*, \mu_*, \nu_*\}$. Понятия допустимых управлений и их ресурсов для этой системы получаются из соответствующих понятий для системы (1.1) заменой $p_0 = \{t_0, x_0, \mu_0, \nu_0\}$ на $p_* = \{t_*, x_*, \mu_*, \nu_*\}$. Полагаем здесь, что

$$V_*^{\cdot}(t) = v_* \delta(t - t_*) \tag{2.2}$$

где v_* — некоторый l_2-мерный вектор, удовлетворяющий условию $\| v_* \| \leqslant \leqslant \nu_*$.

Определение 2.1. Областью достижимости $G(t^*, p_*, V_*)$ системы (2.1), построенной для момента $t = t^*$ из начальной позиции p_* при фиксированном управлении $V_*(t)$ (2.2) назовем совокупность точек $p^* = \{t^*, x^*, \mu^*, \nu^*\}$ вида

$$x^* = x_* + \int_{t_*}^{t_*} f(t, x[t])\,dt + \int_{t_*-0}^{t^*} B(t)\,dU_*(t) + C(t_*)v_*$$

$$0 \leqslant \mu^* \leqslant \mu_* - \int_{t_*}^{t^*} \|dU_*(t)\|, \quad \nu^* = \nu_* - \|v_*\|$$

где $U_*(t)$ — произвольные допустимые управления системы (2.1), $x[t]$ — соответствующие решения системы (2.1).

Здесь

$$\int_{t_*-0}^{t_*} B(t)\,dU_*(t) = \lim_{\Delta \to 0} \int_{t_*-\Delta}^{t^*} B(t)\,dU_*(t), \quad \Delta > 0$$

интегралы, стоящие в этом соотношении справа, понимаются в смысле Стилтьеса. Отметим, что множество $G(t^*, p_*, V_*)$ оказывается замкнутым.

Введем в рассмотрение множества

$$M = [p = \{t, x, \mu, \nu\} : \{t, x\} \in M^*, \ \mu \geqslant 0, \ \nu \geqslant 0]$$
$$N = [p = \{t, x, \mu, \nu\} : \{t, x\} \in N^*, \ \mu \geqslant 0, \ \nu \geqslant 0]$$

Пусть D — некоторое множество в пространстве векторов $p = \{t, x, \mu, \nu\}$, символом D_τ обозначим сечение этого множества гиперплоскостью $t = \tau$.

Определение 2.2. Пусть $W^{(u)}$ — некоторое множество в пространстве векторов $p = \{t, x, \mu, \nu\}$. Будем говорить, что это множество является u-стабильным мостом в задаче о сближении, если

$$W^{(u)} \subset N, \quad W^{(u)}_\vartheta \subset M$$

и для любой точки $p_* = \{t_*, x_*, \mu_*, \nu_*\} \in W^{(u)}$, любого момента $t^* \in \in [t_*, \vartheta]$ и всякого управления V_* вида (2.2) справедливо одно из следующих двух условий (τ — некоторая точка отрезка $[t_*, t^*]$)

$$G(t^*, p_*, V_*) \cap W^{(u)} \neq \phi, \quad G(\tau, p_*, V_*) \cap M \neq \phi$$

Заметим, что в этом определении не исключается случай, когда $W^{(u)}_\vartheta = = \phi$. Можно показать, что замыкание всякого u-стабильного моста по-прежнему является u-стабильным мостом. В дальнейшем рассматриваются лишь замкнутые мосты $W^{(u)}$.

Опишем позиционный способ управления первого игрока, который доставляет решение задачи о сближении. Основу предлагаемой здесь конструкции составляет схема управления с поводырем, подобная построениям из работ [7,8].

Пусть $W^{(u)}$ — u-стабильный мост и $W_{t_0}^{(u)} \neq \phi$. Обозначим через $p_0^* = \{t_0, x_0^*, \mu_0^*, \nu_0^*\}$ точку множества $W_{t_0}^{(u)}$, ближайшую к точке $p_0 = \{t_0, x_0, \mu_0, \nu_0\}$. Выберем некоторое покрытие отрезка $[t_0, \vartheta]$ равными промежутками

$$[\tau_i, \tau_{i+1}), \ i = 0, 1, \ldots, m-1; \ \tau_0 = t_0, \ \tau_m = \vartheta, \ \tau_{i+1} = \tau_i + \Delta$$

Полагаем

$$r_1(t_0) = \begin{cases} \mu_0 - \mu_0^*, & \mu_0 > \mu_0^* \\ 0, & \mu_0 \leqslant \mu_0^* \end{cases}, \qquad r_2(t_0) = \begin{cases} \nu_0^* - \nu_0, & \nu_0^* > \nu_0 \\ 0, & \nu_0^* \leqslant \nu_0 \end{cases}$$

Определим векторы u_0 и v_0^* из условия

$$\|x_0 - x_0^* + B(t_0)u_0 - C(t_0)v_0^*\| = \min_{u,v} \|x_0 - x_0^* + B(t_0)u - C(t_0)v\| \tag{2.3}$$

при $\|u\| \leqslant r_1(t_0)$, $\|v\| \leqslant r_2(t_0)$

Управление первого игрока в системе (1.1) при $t_0 \leqslant t < t_0 + \Delta$ определим соотношением

$$U_\Delta^\cdot[t] = u_0\delta(t - t_0)$$

Это управление в паре с некоторым управлением второго игрока осуществляет движение системы (1.1) при $t_0 \leqslant t < \tau_1$.

Для построения управления $U_\Delta[t]$ при $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$ определяем точку

$$p_i^* = p^*[\tau_i] = \{\tau_i, x^*[\tau_i], \mu^*[\tau_i], \nu^*[\tau_i]\} \in$$
$$\in G(\tau_i, p_{i-1}^*, V_{i-1}^*) \cap W^{(u)}$$

полагая, что пересечение множеств здесь не пусто, а управление V_{i-1}^* задано соотношением

$$V_{i-1}^{*\cdot}(t) = v_{i-1}^*\delta(t - \tau_{i-1}) \tag{2.4}$$

Определим величины

$$r_1(\tau_i) = \min\{\mu^*[\tau_{i-1}] - \mu^*[\tau_i], \ \mu[\tau_i - 0]\}$$
$$r_2(\tau_i) = \min\{\nu[\tau_{i-1} - 0] - \nu[\tau_i - 0], \ \nu^*[\tau_i]\}$$

Векторы u_i и v_i^* найдем из условия

$$\|x[\tau_i - 0] - x^*[\tau_i] + B(\tau_i)u_i - C(\tau_i)v_i^*\| = \tag{2.5}$$
$$= \min_{u,v}\|x[\tau_i - 0] - x^*[\tau_i] + B(\tau_i)u - C(\tau_i)v\|$$
$$\text{при } \|u\| \leqslant r_1(\tau_i), \ \|v\| \leqslant r_2(\tau_i)$$

и полагаем

$$U_\Delta^\cdot[t] = u_i\delta(t - \tau_i), \quad \tau_i \leqslant t < \tau_{i+1} \tag{2.6}$$

Это управление в паре с некоторым допустимым управлением второго игрока $V[t]$ осуществляет движение системы (1.1) при $\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}$.

Если условие

(2.7) $\qquad G(\tau_i,\ p_{i-1}^*,\ V_{i-1}^*) \cap W^{(u)} \neq \phi$

выполняется при $i = 1, 2, \ldots, m-1$, то описанная выше процедура задает управление $U_\Delta[t]$ (2.5), (2.6) вплоть до последнего момента $t = \vartheta$.

Рассмотрим теперь случай, когда условие (2.7) выполняется лишь при $i = 1, 2, \ldots, j < m-1$. Тогда указанным выше способом управление $U_\Delta[t]$ определяем вплоть до момента $t = \tau_j$. Затем при $\tau_j \leqslant t \leqslant \vartheta$ управление $U_\Delta[t]$ определяем из соотношений (2.5), (2.6), полагая при этом, что при $i > j$ точки p_i^* выбираются произвольным образом из множеств $G(\tau_i, p_{i-1}^*, V_{i-1}^*)$. Заметим, что по построению $p_j^* \in W^{(u)}$, поэтому из условия

$$G(\tau_{j+1},\ p_j^*,\ V_j^*) \cap W^{(u)} = \phi$$

вытекает (см. определение 2.2) существование момента $\tau^* \in [\tau_j,\ \tau_{j+1}]$, для которого справедливо соотношение

$$G(\tau^*,\ p_j^*,\ V_j^*) \cap M \neq \phi$$

т. е. в этом случае можно говорить, что точка $\{\tau_j,\ x^*(\tau_j)\}$ находится вблизи множества M^*. Отметим также, что выбор управлений $U_\Delta[t]$ и $V^*(t)$ из условий (2.4) — (2.6) обеспечивает взаимное отслеживание движений исходной системы (1.1) и поводыря, позиции которого в моменты $t = \tau_i$ обозначались здесь через $p^*[\tau_i]$.

Движение системы (1.1), порожденное управлением $U_\Delta[t]$ (2.5), (2.6), обозначим символом $x_\Delta[t,\ p_0,\ V[\cdot],\ W^{(u)}]$, где $p_0 = \{t_0,\ x_0,\ \mu_0,\ \nu_0\}$ — исходная позиция; Δ — шаг рекуррентной процедуры, $V[t]$ $(t \geqslant t_0)$ — допустимое управление второго игрока, которое реализовалось в системе (1.1) в паре с управлением $U_\Delta[t]$; $W^{(u)}$ — u-стабильный мост, для которого построена рассматриваемая процедура управления с поводырем. Эти движения будем называть аппроксимационными. Наряду с аппроксимационными движениями введем движения, определенные предельным переходом от последовательности аппроксимационных движений.

Определение 2.3. Движением $x(t,\ p_0,\ W^{(u)})$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ системы (1.1), порожденным процедурой управления с поводырем первого игрока, назовем суммируемую функцию $x(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$, для которой существует сходящаяся к ней в метрике пространства $L[t_0,\ \vartheta]$ последовательность аппроксимационных движений

$$x_k[t] = x_{\Delta_k}[t,\ p_0^{(k)},\ V^{(k)}[\cdot],\ W^{(u)}], \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad k = 1, 2, \ldots$$

удовлетворяющая условиям

$$\Delta_k \to 0, \quad p_0^{(k)} = \{t_0,\ x_0^{(k)},\ \mu_0^{(k)},\ \nu_0^{(k)}\} \to p_0 = \{t_0,\ x_0,\ \mu_0,\ \nu_0\}$$
при $k \to \infty$

Заметим, что существование движений $x(t,\ p_0,\ W^{(u)})$, можно установить, используя теорему Хелли.

Справедливо следующее положение.

Теорема 2.1. Если исходная позиция $p_0 = \{t_0, x_0, \mu_0, \nu_0\}$ содержится на u-стабильном мосту $W^{(u)}$, то для любого движения $x(t, p_0, W^{(u)})$ точка $\{t, x(t, p_0, W^{(u)})\}$ попадает на множество M^* не позже, чем в момент $t = \vartheta$, оставаясь при этом в множестве N^* вплоть до встречи с множеством M^*.

Укажем основные моменты доказательства этой теоремы. Рассмотрим аппроксимационное движение $x_\Delta[t, p_0^{(\Delta)}, V[\cdot], W^{(u)}]$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$. Одновременно с реализацией этого движения определенным выше способом формировалось движение поводыря, т. е. выбирались точки $p_i^* = p^*[\tau_i]$, которые перемещались по мосту $W^{(u)}$ и попадали в некоторый момент $t = \tau^*$ на множество M. При этом управления $U_\Delta[t]$ и $V^*(t)$ выбирались из условий (2.4) — (2.6) так, чтобы обеспечить взаимное отслеживание движений исходной системы и движений поводыря. Таким образом доказательство этой теоремы сводится к оценке расстояния между движениями исходной системы (1.1) и поводыря. Отметим, что требуемую оценку расстояния между движениями $x_\Delta[t]$ и $x_\Delta^*[t]$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ здесь удобно проводить в метрике пространства $L[t_0, \vartheta]$, причем устанавливается, что это расстояние удовлетворяет соотношению

$$\rho(x_\Delta[\cdot], x_\Delta^*[\cdot]) \to 0 \quad \text{при } \Delta \to 0 \tag{2.8}$$

равномерно для всех рассматриваемых движений при условии, что $\| p_0^{(\Delta)} - p_0^{*(\Delta)} \| \to 0$ при $\Delta \to 0$.

Из оценки (2.8) выводится, что для тех компонент вектор-функций $x_\Delta[t]$ и $x_\Delta^*[t]$, которые не рвутся при импульсных воздействиях управлений на системы (1.1), (2.1), имеет место равномерная сходимость. Поэтому положение, сформулированное в теореме 2.1, приобретает следующее содержание: если $p_0 \in W^{(u)}$, то, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, существует такое $\Delta(\varepsilon) > 0$, что при $\Delta < \Delta(\varepsilon)$ для всякого аппроксимационного движения $x_\Delta[t] = x_\Delta[t, p_0, V[\cdot], W^{(u)}]$ точка $\{t, x_\Delta[t]\}$ попадет в ε-окрестность множества M^*, оставаясь при этом в ε-окрестности множества N^* вплоть до встречи с ε-окрестностью множества M^*.

3. Рассмотрим задачу об уклонении. При исследовании этой задачи воспользуемся конструкцией, введенной выше при решении задачи о сближении.

Определение 3.1. Областью достижимости $G(t^*, p_*, U_*)$ системы (2.1), построенной для момента $t = t^* \geqslant t_*$ из начальной позиции $p_* = \{t_*, x_*, \mu_*, \nu_*\}$ при фиксированном управлении $U_*(t)$ вида

$$U_*^{\cdot}(t) = u_*\delta(t - t_*), \quad \|u_*\| \leqslant \mu_* \tag{3.1}$$

назовем совокупность точек $p^* = \{t^*, x^*, \mu^*, \nu^*\}$ вида

$$x^* = x_* + \int_{t_*}^{t^*} f(t, x[t])\,dt + \int_{t_*-0}^{t^*} C(t)\,dV_*(t) + B(t_*)u_*$$

$$0 \leqslant \nu^* \leqslant \nu_* - \int_{t_*}^{t^*} \|dV_*(t)\|, \quad \mu^* = \mu_* - \|u_*\|$$

где $V_*^{\cdot}(t)$ — произвольные допустимые управления системы (2.1), $x[t]$ — соответствующие решения системы (2.1).

Пусть G и H — множества, определенные соотношениями

(3.2) $$G = [p = \{t, x, \mu, \nu\}\colon \{t, x\} \in G^*,\ \mu \geqslant 0,\ \nu \geqslant 0]$$
$$H = [p = \{t, x, \mu, \nu\}\colon \{t, x\} \in H^*,\ \mu \geqslant 0,\ \nu \geqslant 0]$$

где G^* и H^* — некоторые замкнутые множества, удовлетворяющие условиям

(3.3) $$G^* \cap M^* = \varnothing,\ H^* \cap N^* = \varnothing$$

Определение 3.2. Пусть $W^{(v)}$ — некоторое множество в пространстве векторов $p = \{t, x, \mu, \nu\}$. Будем говорить, что это множество является v-стабильным мостом в задаче об уклонении, если существуют множества G и H вида (3.2), (3.3), такие,что выполняется следующее условие:

$$W^{(v)} \subset G$$

и для любой точки $p_* = \{t_*, x_*, \mu_*, \nu_*\} \in W^{(v)}$, любого момента $t^* \in [t_*, \vartheta]$ и всякого управления U_* вида (3.1) справедливо одно из следующих двух соотношений (τ — некоторая точка отрезка $[t_*, t^*]$):

$$G(t^*, p_*, U_*) \cap W^{(v)} \neq \varnothing,\ G(\tau, p_*, U_*) \cap H \neq \varnothing$$

Для v-стабильного моста $W^{(v)}$ вводится] процедура управления с поводырем второго игрока, отличие которой от описанного выше способа управления первого игрока состоит лишь в замене множеств M и N множествами H и G соответственно и перемене ролями первого и второго игроков. Движения системы (1.1), порожденные этим способом управления, обозначим символом $x_\Delta[t, p_0, U[\cdot], W^{(v)}]$, где $p_0 = \{t_0, x_0, \mu_0, \nu_0\}$ — исходная позиция; Δ — шаг рекуррентной процедуры; $U[t]$ $(t \geqslant t_0)$ — допустимое управление первого игрока, которое реализовалось в системе (1.1) в паре с управлением $V_\Delta[t]$, назначаемом процедурой управления с поводырем; $W^{(v)}$ — v-стабильный мост, для которого построена эта процедура управления второго игрока. Эти движения называются аппроксимационными. Затем вводятся движения, определенные как пределы некоторых последовательностей аппроксимационных движений.

Определение 3.3. Движением $x(t, p_0, W^{(v)})$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ системы (1.1), порожденным процедурой управления с поводырем второго игрока, назовем суммируемую функцию $x(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$, для которой существует сходящаяся к ней в метрике пространства $L[t_0, \vartheta]$ последовательность аппроксимационных движений

$$x_k[t] = x_{\Delta_k}[t, p_0^{(k)}, U^{(k)}[\cdot], W^{(v)}], \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \quad k = 1, 2, \ldots$$

удовлетворяющая условиям

$$\Delta_k \to 0,\ p_0^{(k)} = \{t_0, x_0^{(k)}, \mu_0^{(k)}, \nu_0^{(k)}\} \to p_0 = \{t_0, x_0, \mu_0, \nu_0\} \quad \text{при } k \to \infty$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.1. Если исходная позиция $p_0 = \{t_0, x_0, \mu_0, \nu_0\}$ содержится на v-стабильном мосту $W^{(v)}$, то для любого движения $x(t, p_0, W^{(v)})$ точка $\{t, x(t, p_0, W^{(v)})\}$ остается во множестве G^* либо при всех $t \in [t_0, \vartheta]$, либо до момента τ^*, когда эта точка впервые попадает на множество H^*.

Множества G^* и H^* удовлетворяют соотношениям (3.2), (3.3), поэтому данная теорема устанавливает, что для движений $x(t, p_0, W^{(v)})$ выполняются условия уклонения.

Отметим, что содержание теоремы 3.1, как и теоремы 2.1, раскрывается при рассмотрении аппроксимационных движений (см. аналогичное замечание в конце п. 2).

4. Укажем некоторые свойства введенной конструкции, которые используются ниже при доказательстве альтернативы для дифференциальной игры сближения — уклонения.

Лемма 4.1. Объединение конечного числа v-стабильных мостов $W_i^{(v)}$ есть v-стабильный мост.

Справедливость этого положения устанавливается непосредственной проверкой свойств v-стабильного моста для множества

$$W^{(v)} = \bigcup_{i=1}^{k} W_i^{(v)}$$

Отметим, что множества G и H, отвечающие мосту $W^{(v)}$, получаются как объединения

$$G = \bigcup_{i=1}^{k} G_i, \quad H = \bigcup_{i=1}^{k} H_i$$

где G_i и H_i — множества, отвечающие мостам $W_i^{(v)}$.

Лемма 4.2. Для любой точки $p_* = \{t_*, x_*, \mu_*, \nu_*\}$, принадлежащей v-стабильному мосту $W^{(v)}$, существуют такая окрестность этой точки

$$S_\varepsilon(p_*) = [p = \{t_*, x, \mu, \nu\}\colon \ \|x - x_*\| \leqslant \varepsilon, \ \ |\mu - \mu_*| \leqslant \varepsilon$$
$$|\nu - \nu_*| \leqslant \varepsilon, \ \mu \geqslant 0, \ \nu \geqslant 0]$$

и такой v-стабильный мост $W_*^{(v)}$, что $S_\varepsilon(p_*) \subset W_*^{(v)}$.

При доказательстве этой леммы используется свойство полунепрерывной зависимости движений $x(t, p_*, W^{(v)})$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ от исходной позиции $p_* = \{t_*, x_*, \mu_*, \nu_*\}$. Это свойство состоит в следующем: если $p_*^{(k)} = \{t_*, x_*^{(k)}, \mu_*^{(k)}, \nu_*^{(k)}\} \to p_* = \{t_*, x_*, \mu_*, \nu_*\}$, $x(\cdot, p_*^{(k)}, W^{(v)}) \to x_*(\cdot)$ при $k \to \infty$ (здесь сходимость в метрике $L\,[t_*, \vartheta]$), то функция $x_*(t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ будет одним из движений $x(t, p_*, W^{(v)})$.

Лемма 4.3. Пусть W_0 — объединение всех возможных v-стабильных мостов, W° — дополнение к множеству W_0. Тогда множество W° есть u-стабильный мост в задаче о сближении.

Укажем основные моменты доказательства этой леммы. Покажем сначала выполнение условий

$$W^\circ \subset N, \qquad W_\vartheta^\circ \subset M \tag{4.1}$$

Всякое множество H вида (3.2), (3.3) является v-стабильным мостом. Поэтому объединение всех таких множеств, которые совпадают с дополнением к множеству N, содержится во множестве W_0, т. е. $W^\circ \subset N$. С другой стороны, для любого множества G вида (3.2), (3.3) множество G_ϑ также является v-стабильным мостом. Поэтому объединение всех таких множеств, совпадающее с дополнением к множеству M_ϑ, содержится в W_0, следовательно $W_\vartheta^\circ \subset M_\vartheta$. Таким образом, условия (4.1) доказаны.

Остается показать выполнение условия u-стабильности множества W°. Сделаем это от противного. Пусть существуют точка $p_* = \{t_*, x_*, \mu_*, \nu_*\} \in W^\circ$, момент времени

$t^* \in [t_*, \vartheta]$ и управление V_* вида (2.2) такие, что выполняются соотношения

$$G(t^*, p_*, V_*) \cap W^\circ = \varnothing \tag{4.2}$$
$$G(t, p_*, V_*) \cap M = \varnothing \quad \text{при } t_* \leqslant t \leqslant t^*$$

Из (4.3) получаем вложение $G(t^*, p_*, V_*) \subset W_0$, т. е. для каждой точки $p \in G\cdot$ $\cdot(t^*, p_*, V_*)$ можно указать содержащий ее v-стабильный мост $W^{(v)}$. В силу леммы 4.2, какова бы ни была точка $p \in G(t^*, p_*, V_*)$, существует содержащая ее окрестность $S(p)$, вложенная в некоторый v-стабильный мост $W_*^{(v)}$. Поскольку область достижимости $G(t^*, p_*, V_*)$ замкнута, то из бесконечного покрытия ее такими окрестностями $S(p)$ можно выбрать конечное покрытие $S(p_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Объединение

$$W_*^{(v)} = \bigcup_{i=1}^{k} W_{*i}^{(v)} \tag{4.3}$$

мостов $W_{*i}^{(v)}$, содержащих выделенные окрестности $S(p_i)$, снова есть v-стабильный мост, причем для него справедливо соотношение

$$W_*^{(v)} \supset G(t^*, p_*, V_*) \tag{4.4}$$

Рассмотрим теперь множество $W_{**}^{(v)} = [p = \{t, x, \mu, \nu\}$:

$$p \in G(t, p_*, V_*) \ \text{при } t_* \leqslant t < t^*; \quad p \in W_*^{(v)} \ \text{при } t^* \leqslant t \leqslant \vartheta]$$

Из соотношений (4.4) — (4.6) выводится, что множество $W_{**}^{(v)}$ является v-стабильным мостом, причем нетрудно видеть, что $p_* \in W_{**}^{(v)}$, следовательно, $p_* \in W_0$ и $p_* \notin W^0$. Полученное противоречие доказывает лемму 4.3.

Теперь нетрудно установить справедливость следующей альтернативы.

Теорема 4.1. Каковы бы ни были начальная позиция $p_0 = \{t_0, x_0, \mu_0, \nu_0\}$ и число $\vartheta \geqslant t_0$, разрешима либо задача о сближении, либо задача об уклонении.

Действительно, в силу леммы 4.3 пространство позиций $p = \{t, x, \mu, \nu\}$ $(\mu \geqslant 0, \nu \geqslant 0)$ распадается на две части: $W^{(u)} = W^\circ$ и $W_0 = \bigcup W^{(v)}$. Если $p_0 \in W^\circ$, то в силу теоремы 2.1 разрешима задача о сближении, причем ее решение доставляет процедура управления с поводырем, определенная для моста $W^\circ = W^{(u)}$. Если же $p_0 \notin W^\circ$, то $p_0 \in W_0$, т. е. точка p_0 принадлежит некоторому v-стабильному мосту $W^{(v)}$, и тогда разрешима задача об уклонении, причем решение этой задачи доставляет процедура управления с поводырем, определенная для v-стабильного моста $W^{(v)}$.

Отметим, что при реализации описанных здесь процедур управления в качестве стабильных мостов можно использовать множества, определенные операциями программного поглощения (в регулярных случаях), рекуррентными процедурами и прямыми методами (см., например, [1,3,5]).

5. Для иллюстрации предлагаемого способа управления приведем решение следующей простой задачи преследования. Пусть движения преследующего и преследуемого объектов описывается однотипными уравнениями

$$y_1^{\cdot} = y_3 + y_{01}\delta(t - t_0), \quad y_2^{\cdot} = y_4 + y_{02}\delta(t - t_0)$$
$$y_3^{\cdot} = -\alpha y_3 + U_1^{\cdot} + y_{03}\delta(t - t_0), \quad y_4^{\cdot} = -\alpha y_4 + U_2^{\cdot} + y_{04}\delta(t - t_0)$$
$$z_1^{\cdot} = z_3 + z_{01}\delta(t - t_0), \quad z_2^{\cdot} = z_4 + z_{02}\delta(t - t_0)$$
$$z_3^{\cdot} = -\alpha z_3 + V_1^{\cdot} + z_{03}\delta(t - t_0), \quad z_4^{\cdot} = -\alpha z_4 + V_2^{\cdot} + z_{04}\delta(t - t_0)$$

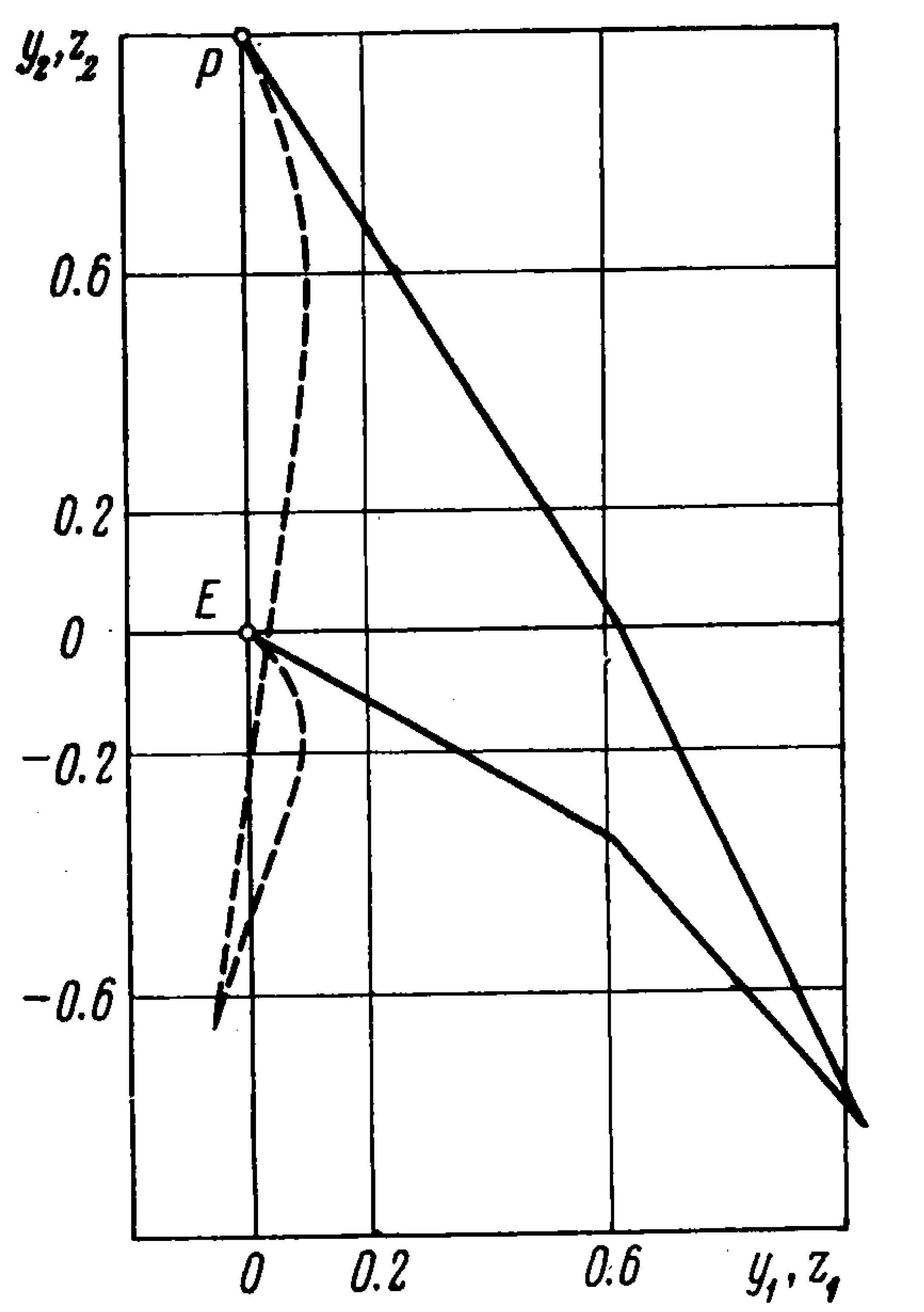
при выполнении условий (1.2) $(\mu_0 > \nu_0)$.

Требуется, используя информацию лишь о реализующейся позиции игры, построить такой способ управления U, который обеспечивает встречу объектов y и z к некоторому конечному моменту времени. Встречей объектов y и z здесь называется совпадение двух первых координат фазовых векторов y и z, т. е. выполнение равенств $y_1[t] = z_1[t]$, $y_2[t] = z_2[t]$.

Можно проверить, что множество

$$W^{(u)} = [p = \{t,\ y,\ z,\ \mu,\ \nu\} : y - z = y_0 - z_0,\ \ \mu - \nu = \mu_0 - \nu_0 \text{ при } t = t_0;\ y - z = x^\circ(t),\ \mu - \nu = \xi^\circ(t) \text{ при } t_0 < t \leqslant \vartheta^\circ]$$

является u-стабильным мостом в рассматриваемой задаче. Здесь $x^\circ(t)$, $\xi^\circ(t)$ — решение задачи об оптимальном по быстродействию переводе системы



$$x^\cdot_1 = x_3 + (y_{01} - z_{01})\,\delta(t - t_0)$$
$$x^\cdot_2 = x_4 + (y_{02} - z_{01})\,\delta(t - t_0)$$
$$x^\cdot_3 = -\alpha x_3 + W^\cdot_1 + (y_{03} - z_{03})\,\delta(t - t_0)$$
$$x^\cdot_4 = -\alpha x_4 + W^\cdot_2 + (y_{04} - z_{04})\,\delta(t - t_0)$$
$$0 \leqslant \xi(t) = \mu_0 - \nu_0 - \int_{t_0}^{\vartheta} \|dW(t)\|$$

в состояние $x_1(\vartheta^\circ) = x_2(\vartheta^\circ) = 0$.

Для указанного моста процедура управления с поводырем была реализована на ЭВМ. При этом были выбраны следующие начальные данные и параметры:

$$y_{01} = 0,\quad y_{02} = y_{03} = y_{04} = 1$$
$$z_{01} = z_{02} = z_{03} = 0,\quad z_{04} = -1$$
$$\alpha = 1,\ \mu_0 = 4.74593,\ \nu_0 = 1.16395$$
$$t_0 = 0,\quad \vartheta^\circ = 1,\quad \Delta = 0{,}001$$

На фигуре сплошными линиями изображены траектории точек y и z в случае

$$V^\cdot[t] = \{{}^1\!/_2\nu_0\delta(t),\ -{}^1\!/_2\nu_0\delta(t - {}^1\!/_2)\} = \{V_1^\cdot[t],\ V_2^\cdot[t]\}$$

Штриховыми линиями изображен процесс преследования для случая

$$V^\cdot[t] = \{-4\nu_0,\ 0\},\qquad 0 \leqslant t \leqslant {}^1\!/_4;\qquad V^\cdot[t] \equiv 0,\qquad t > {}^1\!/_4$$

При выбранных параметрах встреча осуществляется в момент $t = \vartheta^\circ = 1$, причем по первым двум координатам рассогласование между соответствующими движениями исходной системы и поводырем не превосходит величины $\varepsilon = 0{,}003$.

Поступила 26 VIII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Третьяков В. Е.* К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил. Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, № 5.
2. *Красовский Н. Н.* Об игровой встрече движений с ограничениями на импульсы. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
3. *Никольский М. С.* Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями. Дифференциальные уравнения, 1972, т. 8, № 6.
4. *Пожарицкий Г. К.* Импульсное преследование точки с ограниченной тягой. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
5. *Ухоботов В. И.* О линейных дифференциальных играх с импульсными управлениями на конечном отрезке времени. Тр. I Конференции молодых ученых факультета вычислительной математики и кибернетики. М., Изд-во МГУ, 1973.
6. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Альтернатива для игровой задачи сближения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
7. *Красовский Н. Н., Субботин, А. И.* Аппроксимация в дифференциальной игре. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
8. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения — уклонения. I—II. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 2—3.
9. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М., «Мир», 1971.