Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 62—50

АЛЬТЕРНАТИВА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЫ СБЛИЖЕНИЯ – УКЛОНЕНИЯ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА УПРАВЛЕНИЯ ИГРОКОВ

А. И. Субботин, В. Н. Ушаков

(Свердловск)

Рассматривается дифференциальная игра сближения — уклонения с интегральными ограничениями на управления игроков. Доказывается, что для этой игры справедлива альтернатива, утверждающая, что всегда разрешима либо позиционная задача о сближении, либо позиционная задача об уклонении. Указывается позиционная процедура управления с поводырем, доставляющая решение этих задач. Используемые здесь построения являются модификацией экстремальной конструкции из работ [1,2], измененной с учетом специфики дифференциальных игр с интегральными ограничениями. Данная работа примыкает также к статьям [3-7].

1. Пусть движение конфликтно-управляемой системы описывается уравнением

$$x^{\cdot} = f(t, x) + B(t, x)\, u + C(t, x)\, v \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор системы; u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно; $f(t, x)$, $B(t, x)$ и $C(t, x)$ — непрерывные вектор-функция и матрицы-функции, которые в каждой ограниченной области удовлетворяют условию Липшица по переменной x.

Отметим, что при указанных предположениях относительно правой части (1.1) при любом выборе суммируемых функций $u(t)$ и $v(t)$ существует единственное решение задачи Коши для уравнения (1.1) с начальным условием $x(t_0) = x_0$.

Предполагается, что реализации управлений игроков $u(t)$ и $v(t)$ удовлетворяют ограничениям

$$I_u(t_0, \infty) \leqslant \mu(t_0), \quad I_v(t_0, \infty) \leqslant \nu(t_0) \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем

$$I_u(a, b) = \left(\int_a^b \|u(t)\|^p dt\right)^{1/p}, \quad I_v(a, b) = \left(\int_a^b \|v(t)\|^q dt\right)^{1/p}$$

символ $\|w\|$ означает евклидову норму вектора w.

Суммируемые реализации управлений $u(t)$, $v(t)$ $(t \geqslant t_0)$, удовлетворяющие условиям (1.4), называются допустимыми.

Предполагается, что система (1.1) и ограничения (1.2) таковы, что для любых допустимых реализаций $u(t)$ и $v(t)$ $(t \geqslant t_0)$ решения упомянутой задачи Коши продолжимы до любого момента $t = T$, причем существует ограниченная область $G(T)$, в которой при любом выборе допустимых реализаций остаются решения, рассматриваемые на отрезке $[t_0, T]$.

Изменение ограничений $\mu(t)$ и $\nu(t)$ определяется израсходованными в процессе игры ресурсами управляющих воздействий игроков, т. е.

$$\mu(t_2) = \mu(t_1) - I_u(t_1, t_2), \quad \nu(t_2) = \nu(t_1) - I_v(t_1, t_2)$$

Вектор $z = (t, \mu, \nu, x)$ называется позицией игры. Отметим, что всюду в дальнейшем $\mu \geqslant 0$, $\nu \geqslant 0$. В пространстве векторов (t, x) заданы некоторые замкнутые множества M^* и N^*.

Задача о сближении, стоящая перед первым игроком, заключается в том, чтобы выбором управления u обеспечить попадание точки $(t, x(t))$ на множество M^* и выполнение фазового ограничения $(t, x(t)) \in N^*$ при $t_0 \leqslant t \leqslant \tau$, где τ — момент времени, когда впервые осуществляется условие $(t, x(t)) \in M^*$. При этом предполагается, что первому игроку известна текущая позиция игры — вектор $z(t)$.

Задача об уклонении, стоящая перед вторым игроком, заключается в том, чтобы выбором управления v обеспечить либо уклонение точки $(t, x(t))$ от встречи с множеством M^*, либо нарушение фазового ограничения $(t, x(t)) \in N^*$ прежде, чем осуществится условие $(t, x(t)) \in M^*$. При этом второй игрок располагает информацией о реализующейся позиции игры.

Задачи сближения и уклонения рассматриваются здесь для случая, когда множества M^* и N^* содержатся в замкнутой области, где $t \leqslant \vartheta$ $(\vartheta > t_0$ — момент времени, ограничивающий продолжительность игры).

Отметим, что к исследованию игры сближения — уклонения, которая складывается из этих двух задач, сводится решение не только задач преследования, но и многих дифференциальных игр (см., например, [1,2]). В данной статье приводится схема доказательства альтернативы, которая утверждает, что в игре сближения — уклонения всегда разрешима либо задача об уклонении, либо задача о сближении.

2. Опишем позиционную процедуру управления с поводырем, которая доставляет решение задачи о сближении. Предлагаемые ниже построения аналогичны конструкциям из работ [1, 2].

Введем вспомогательные понятия и обозначения.

Пусть $z_* = (t_*, \mu_*, \nu_*, x_*)$ — некоторая позиция игры, $v(t)$ $(t \geqslant t_*)$ — допустимая реализация управления второго игрока, функция, удовлетворяющая условию $I_v(t_*, \infty) \leqslant \nu_*$.

Символом $G^{(u)}(z_*, v(\cdot))$ обозначим множество точек $z = (t, \mu(t), \nu(t), x(t))$ вида

$$t \geqslant t_* 0 \leqslant \mu^p(t) \leqslant \mu_*^{\,p} - I_u(t_*, t)^p, \qquad \nu^q(t) = \nu_*^{\,q} - I_v(t_*, t)^q$$

$$x(t) = x_* + \int_{t_*}^{t} [f(\sigma, x(\sigma)) + B(\sigma, x(\sigma))u(\sigma) + C(\sigma, x(\sigma))v(\sigma)]\, d\sigma$$

где $u(\sigma)$ $(\sigma \geqslant t_*)$ — всевозможные суммируемые функции, удовлетворяющие условию $I_u(t_*, \infty) \leqslant \mu_*$.

Пусть D — некоторое множество в $(n+3)$-мерном пространстве векторов $z = (t, \mu, \nu, x)$. Символом $D_{[t_*, t^*]}$ обозначим часть этого множества, лежащую между гиперплоскостями $t = t_*$ и $t = t^*$, т. е.

$$D_{[t_*, t^*]} = \{z : z = (t, \mu, \nu, x) \in D,\ t_* \leqslant t \leqslant t^*\}$$

Сечение множества D гиперплоскостью $t = t_*$ обозначим символом D_{t_*}, т. е.

$$D_{t_*} = \{z: z = (t_*, \mu, \nu, x) \in D\}$$

Символами M и N обозначим множества в пространстве позиций z, определенные соотношениями

$$M = \{z = (t, \mu, \nu, x): (t, x) \in M^*,\ \mu \geqslant 0,\ \nu \geqslant 0\}$$
$$N = \{z = (t, \mu, \nu, x): (t, x) \in N^*,\ \mu \geqslant 0,\ \nu \geqslant 0\}$$

Определение 2.1. Пусть в пространстве позиций задано некоторое множество $W^{(u)}$. Будем называть это множество u-стабильным мостом, если $W^{(u)} \subset N$, $W^{(u)}_\vartheta \subset M$ и выполняется следующее условие: для любой точки $z_* = (t_*, \mu_*, \nu_*, x_*) \in W^{(u)}$, для любого числа $t^* > t_*$ и для любой реализации $v(t)$ $(t \geqslant t_*)$, допустимой для позиции z_*, справедливо соотношение

$$G^{(u)}(z_*, v(\cdot)) \cap (W^{(u)}_{t^*} \cup M_{[t_*, t^*]}) \neq \phi$$

Отметим, что в этом определении допускается случай $W^{(u)}_\vartheta = \varnothing$ и не предполагается замкнутость множества $W^{(u)}$, однако можно проверить, что для любого u-стабильного моста $W^{(u)}$ его замыкание также является u-стабильным мостом.

Введем в рассмотрение функции

$$u_*(z, z^*, \delta) = \begin{cases} -\dfrac{b}{\|b\|}(\mu^p - \mu^{*p})^{1/p}\delta^{-1/p} & \text{при } \mu - \mu^* > 0,\ \|b\| \neq 0 \\ 0 \quad \text{при } \mu - \mu^* \leqslant 0 \quad \text{или } \|b\| = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

$$v^*(z, z^*, \delta) = \begin{cases} \dfrac{c}{\|c\|}(\nu^{*q} - \nu^q)^{1/q}\delta^{-1/q} & \text{при } \nu^* - \nu > 0,\ \|c\| \neq 0 \\ 0 \quad \text{при } \nu^* - \nu \leqslant 0 \quad \text{или } \|c\| = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

$$u^*(z, z^*, \delta) = \begin{cases} \dfrac{b}{\|b\|}(\mu^{*p} - \mu^p)^{1/p}\delta^{-1/p} & \text{при } \mu^* - \mu > 0,\ \|b\| \neq 0 \\ 0 \quad \text{при } \mu^* - \mu \leqslant 0 \quad \text{или } \|b\| = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

$$v_*(z, z^*, \delta) = \begin{cases} -\dfrac{c}{\|c\|}(\nu^{*q} - \nu^q)^{1/q}\delta^{-1/q} & \text{при } \nu - \nu^* > 0,\ \|c\| \neq 0 \\ 0 \quad \text{при } \nu - \nu^* \leqslant 0 \quad \text{или } \|c\| = 0 \end{cases} \tag{2.4}$$

Здесь (штрих означает транспонирование)

$$z = (t_*, \mu, \nu, x),\ z^* = (t_*, \mu^*, \nu^*, x^*),\ \delta > 0,\ b' = (x - x^*)' \times$$
$$\times B(t_*, x),\ c' = (x - x_*)' C(t_*, x)$$

Функции u_* (2.1) и v^* (2.2) используются здесь при построении процедуры управления с поводырем первого игрока, функции u^* (2.3) и v_*

(2.4) применяются ниже при определении процедуры управления с поводырем второго игрока.

Отметим, что в случае, когда $\mu - \mu^* > 0$, $\| b \| \neq 0$ и $\nu - \nu^* > 0$, $\| c \| \neq 0$, функции $u_* (t) = u_* (z, z^*, \delta) = \text{const}$ и $v_* (t) = v_* (z, z^*, \delta) = \text{const}$ $(t_* \leqslant t \leqslant t_* + \delta)$ доставляют минимум функционалам

$$(2.5) \qquad (x - x^*)' B(t_*, x) \int\limits_{t_*}^{t_*+\delta} u(t)\,dt, \quad (x - x^*)' C(t_*, x) \int\limits_{t_*}^{t_*+\delta} v(t)\,dt$$

которые рассматриваются на множестве функций $u(t)$ и $v(t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant t_* + \delta)$, удовлетворяющих условиям

$$(2.6) \qquad I_u(t_*, t_* + \delta) \leqslant (\mu^p - \mu^{*p})^{1/p}, \quad I_v(t_*, t_* + \delta) \leqslant (\nu^q - \nu^{*q})^{1/q}$$

В случае, когда $\mu^* - \mu > 0$, $\| b \| \neq 0$ и $\nu^* - \nu > 0$, $\| c \| \neq 0$ функции $u^* (t) = u^* (z, z^*, \delta)$, $v^* (t) = v^* (z, z^*, \delta)$ $(t_* \leqslant t \leqslant t_* + \delta)$ доставляют максимум функционалам (2.5), которые рассматриваются на множестве функций, удовлетворяющих ограничениям (2.6), где следует переставить местами μ и μ^*, ν и ν^*.

Пусть заданы исходная позиция $z_* = (t_*, \mu_*, \nu_*, x_*)$ и мост $W^{(u)}$, причем множество $W_{t_*}^{(u)}$ непусто и замкнуто.

Определим для этого моста процедуру управления с поводырем первого игрока. Выберем точку

$$z^* (t_*) = (t_*, \mu^*, \nu^*, x^*) \in W_{t_*}^{(u)}$$

ближайшую к точке $z (t_*) = z_*$. Эта точка $z^* (t_*)$ — позиция поводыря в исходный момент времени $t = t_*$. Выберем некоторое покрытие Δ промежутка $[t_*, \vartheta)$ системой полуинтервалов $[\tau_i, \tau_{i+1})$ равной длины $\delta = \tau_{i+1} - \tau_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n, \tau_0 = t_*, \tau_N = \vartheta)$. Полагаем, что на первом промежутке $[\tau_0, \tau_1)$ движение системы (1.1) порождает постоянное управление первого игрока

$$u^{(0)} (t) = u_* (z (t_*), \ z^* (t_*), \ \delta) \ (\tau_0 \leqslant t \leqslant \tau_1)$$

в паре с некоторой допустимой реализацией $v (t)$ $(t \geqslant t_0)$ управления второго игрока. Выбор этих управлений определит позицию игры $z (\tau_1) = (\tau_1, \mu (\tau_1), \nu (\tau_1), x (\tau_1))$, которая осуществляется в момент $t = \tau_1$. Пусть

$$v^{(0)} (t) = v^* (z(t_*), z^* (t_*)) \ (\tau_0 \leqslant t < \tau_1)$$

Выберем позицию поводыря $z^* (\tau_1)$ в момент времени $t = \tau_1$ из условия

$$z^* (\tau_1) \in W_{\tau_1}^{(u)} \cap G^{(u)} (z^* (t_*), v^{(0)} (\cdot))$$

предполагая, что это пересечение непусто. Затем на следующем промежутке $[\tau_1, \tau_2)$ управление первого игрока в системе (1.1) определим соотношением

$$u^{(1)} (t) = u_* (z (\tau_1), \ z^* (\tau_1), \delta) \ (\tau_1 \leqslant t < \tau_2)$$

В результате выбора этого управления и некоторого управления $v (t)$ $(t \geqslant \tau_1)$ второго игрока в момент $t = \tau_2$ реализуется позиция игры $z (\tau_2)$.

Выберем

$$v^{(1)}(t) = v^*(z(\tau_1),\ z^*(\tau_1),\ \delta)\ (\tau_1 \leqslant t < \tau_2)$$

и позицию поводыря в момент $t = \tau_2$ определим из условия

$$z^*(\tau_2) \in W^{(u)}_{\tau_2} \cap G^{(u)}(z^*(\tau_1),\ v^{(1)}(\cdot))$$

полагая опять, что это пересечение непусто. Если на последующих промежутках $[\tau_i,\ \tau_{i+1})$ также выполняется условие

$$W^{(u)}_{\tau_{i+1}} \cap G^{(u)}_{\tau}(z^*(\tau_i),\ v^{(i)}(\cdot)) \neq \phi$$

то указанная процедура управления осуществляется вплоть до момента $t = \vartheta$.

Рассмотрим теперь случай, когда это условие не выполняется. Пусть τ_j — момент времени, когда впервые

$$W^{(u)}_{\tau_j} \cap G^{(u)}(z^*(\tau_{j-1}),\ v^{(j-1)}(\cdot)) = \phi$$

Тогда из условия $z^*(\tau_{j-1}) \in W^{(u)}$ и определения u-стабильного моста вытекает, что

$$M_{[\tau_{j-1},\tau_j]} \cap G^{(u)}(z^*(\tau_{j-1}),\quad v^{(j-1)}(\cdot)) \neq \phi$$

т. е. существует момент времени $\tau^* \in [\tau_{j-1},\ \tau_j]$, когда позицию поводыря можно определить из условия

$$z^*(\tau^*) \in M_{\tau^*} \cap G(z^*(\tau_{j-1}),\ v^{(j-1)}(\cdot))$$

Полагаем затем, что в момент $t = \tau_j$ в качестве позиции поводыря $z^*(\tau_j)$ выбрана произвольная точка $z^*(\tau_j) \in G_{\tau_j}(z^*(\tau^*),\ v^{(j-1)}(\cdot))$. Далее управления $u^{(i)}(t)$ и $v^{(i)}(t)$ $(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1},\ j \leqslant i \leqslant n-1)$ определяем соотношением

$$u^{(i)}(t) = u_*(z(\tau_i),\ z^*(\tau_i),\ \delta),\quad v^{(i)}(t) = v^*(z(\tau_i),\ z^*(\tau_i),\ \delta)$$

а позицию поводыря $z^*(\tau_{i+1})$ выбираем произвольным образом из множеств $G^{(u)}_{\tau_{i+1}}(z^*(\tau_i),\ v^{(i)}(\cdot))$.

Отметим, что построенное здесь управление первого игрока

$$u_\Delta(t) = u_*(z(\tau_i),\ z^*(\tau_i),\ \delta)\ (\tau_i \leqslant t \leqslant \tau_{i+1},\ i = 0,\ \ldots,\ n-1) \tag{2.7}$$

не нарушает ограничения $I_{u_\Delta}(t_*,\ \vartheta) \leqslant \mu_* = \mu(t_*)$.

Движение системы (1.1), которое реализуется при выборе управления с поводырем $u_\Delta(t)$ (2.7) в паре с некоторым управлением второго игрока $v(t)$ $(t \geqslant t_*)$, будем называть аппроксимационным и обозначим символом $x(t;\ t_*,\ u_\Delta(\cdot),\ v(\cdot))$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$.

Определение 2.2. Функцию $x(t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ назовем движением системы (1.1), порожденным процедурой управления с поводырем первого игрока, если существует последовательность аппроксимационных движений

$$x_k(t) = x(t;\ z_*^{(k)},\ u_{\Delta_k}(\cdot),\ v(\cdot))\ (t_* \leqslant t \leqslant \vartheta,\ k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

удовлетворяющая условиям

(2.8) $\delta^{(k)} = (\tau_{i+1}^{(k)} - \tau_i^{(k)}) \to 0, \quad z_*^{(k)} = (t_*, \mu_*^{(k)}, \nu_*^{(k)}, x_*^{(k)}) \to z_* = (t_*, \mu_*, \nu_*, x_*), \quad \max\limits_{t_* \leqslant t \leqslant \vartheta} \|x(t) - x_k(t)\| \to 0$ при $k \to \infty$

Введенные здесь движения обозначаются символом $x(t;\, z_*,\, W^{(u)})$, который указывает исходную позицию и u-стабильный мост, для которого определена процедура с поводырем. Отметим, что существование движений $x(t;\, z_*,\, W^{(u)})$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ вытекает из теоремы Арцела, поскольку аппроксимационные движения равноограничены и равностепенно непрерывны.

Основное свойство процедуры управления с поводырем формулируется следующим образом.

Теорема 2.1. Если существует u-стабильный мост $W^{(u)}$, содержащий исходную позицию игры z_*, то для любого движения $x(t;\, z_*,\, W^{(u)})$ существует момент $\tau \leqslant \vartheta$, когда впервые точка $(t,\, x(t;\, z_*,\, W^{(u)}))$ попадает на множество M^*, причем выполняются условия

$$(t,\, x(t;\, z_*,\, W^{(u)})) \in N^* \text{ при } t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$$

В основе доказательства этой теоремы лежит оценка расстояния между движением исходной системы (1.1) и движением поводыря, причем устанавливается, что выбор управлений (2.3), (2.4) обеспечивает близость между этими движениями при выборе достаточно малого шага.

3. Рассмотрим решение задачи об уклонении, опирающееся на позиционную процедуру с поводырем, и докажем альтернативу для игры сближения — уклонения.

Пусть $z_* = (t_*, \mu_*, \nu_*, x_*)$ — некоторая позиция игры, $u(\sigma)$ $(\sigma \geqslant t_*)$ — реализация управления первого игрока, допустимая для этой позиции, т. е. $u(\sigma)$ $(\sigma \geqslant t_*)$ — суммируемая функция, удовлетворяющая условию $I_u(t_*, \infty) \leqslant \mu_*$.

Символом $G^{(v)}(z_*, u(\cdot))$ обозначим множество точек $z = (t, \mu(t), \nu(t), x(t))$ вида

$$t \geqslant t_*, \quad \mu^p(t) = \mu_*^{\,p} - I_u(t_*, t)^p, \quad 0 \leqslant \nu^q(t) \leqslant \nu_*^{\,q} - I_v(t_*, t)^q$$

$$x(t) = x_* + \int\limits_{t_*}^{t} [f(\sigma, x(\sigma)) + B(\sigma, x(\sigma))u(\sigma) + C(\sigma, x(\sigma))v(\sigma)]\, d\sigma$$

где $v(\sigma)$ $(\sigma \geqslant t_*)$ — всевозможные суммируемые функции, удовлетворяющие условию $I_v(t_*, \infty) \leqslant \nu_*$.

Пусть

$$\begin{aligned} G &= \{z = (t, \mu, \nu, x)\colon (t, x) \in G^*,\ \mu \geqslant 0,\ \nu \geqslant 0\} \\ H &= \{z = (t, \mu, \nu, x)\colon (t, x) \in H^*,\ \mu \geqslant 0,\ \nu \geqslant 0\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

где G^* и H^* — некоторые замкнутые множества в пространстве векторов (t, x), удовлетворяющие условиям

$$G^* \cap M^* = \phi, \quad H^* \cap N^* = \phi \tag{3.2}$$

Определение 3.1. Пусть в пространстве векторов z задано некоторое множество $W^{(v)}$. Будем называть это множество v-стабильным мостом, если $W^{(v)} \subset G$, для любой точки $z_* = (t_*, \mu_*, \nu_*, x_*) \in W^{(v)}$, для любого числа $t^* \in (t_*, \vartheta]$ и для любого управления $u(t)$ $(t \geqslant t_*)$, допустимого для позиции z_*, справедливо соотношение

$$G^{(v)}(z_*, u(\cdot)) \cap (W_{t*}^{(u)} \cup H_{[t_*, t^*]}) \neq \phi \tag{3.3}$$

где H и G — некоторые множества (3.1), (3.2).

Определим для v-стабильного моста $W^{(v)}$ процедуру управления с поводырем второго игрока. Полагая, что $v_*(z, z^*, \delta)$ определена соотношением (2.4), будем формировать управление второго игрока в системе (1.1) следующим образом:

$$v_\Delta(t) = v_*(z(\tau_i), z^*(\tau_i), \delta)\ (\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1};\ i = 0, \ldots, n-1) \tag{3.4}$$

Здесь $z(\tau_i)$ — позиция игры, которая реализуется в момент $t = \tau_i$ при выборе управления $v_\Delta(t)$ (3.4) в паре с некоторым допустимым управлением $u(t)$ $(t_* \leqslant t < \tau_i)$ первого игрока, $z^*(\tau_i)$ — позиция поводыря в момент $t = \tau_i$.

При определении позиций поводыря используются управления

$$u^{(i)}(t) = u^*(z(\tau_i),\ z^*(\tau_i),\ \delta)$$
$$(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1} = \tau_i + \delta,\ i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

где функция $u^*(z, z^*, \delta)$ определена соотношениями (2.3).

В качестве исходной позиции поводыря $z^*(t_*)$ выбирается точка множества $W_{t_*}^{(v)}$, ближайшая к исходной позиции игры $z = (t_*, \mu_*, \nu_*, x_*)$ (предполагается, что $W_{t_*}^{(v)}$ замкнуто и непусто). Затем позиции поводыря $z^*(\tau_i)$ определяются последовательно из условия

$$z^*(\tau_i) \in G^{(v)}(z^*[(\tau_{i-1}),\ u^{(i-1)}(\cdot)) \cap W_{\tau_i}^{(v)}$$

либо вплоть до момента $\tau_N = \vartheta$, если все эти пересечения непусты, либо вплоть до момента τ_j, для которого это пересечение оказывается пустым. В момент $t = \tau_j$ позицию $z^*(\tau_j)$ определим из условия

$$z^*(\tau_j) \in G_{\tau_j}^{(v)}(z^*(\tau^*),\quad u^{(j-1)}(\cdot)),\quad z^*(\tau^*) \in$$
$$\in G_{\tau_*}^{(v)}(z^*(\tau_{j-1}),\ u^{(j-1)}(\cdot)) \cap H,\quad \tau_{j-1} \leqslant \tau^* \leqslant \tau_j$$

Существование такой точки $z^*(\tau^*)$ вытекает из условия $z^*(\tau_{j-1}) \in \in W_{\tau_{j-1}}^{(v)}$ и определения v-стабильного моста $W^{(v)}$. Затем при $j \leqslant i \leqslant n$ в качестве позиций поводыря $z^*(\tau_i)$ выбираются произвольные точки множеств $G_{\tau_i}^{(v)}(z^*(\tau_{i-1}),\ u^{(i-1)}(\cdot))$.

Отметим, что управление $v_\Delta(t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ (3.4) не нарушает ограничения $I_{v_\Delta}(t_*, \vartheta) \leqslant \nu_* = \nu(t_*)$.

Движение системы (1.1), которое реализуется при выборе управления с поводырем второго игрока $v_\Delta(t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ (3.4) в паре с некоторым допустимым управлением первого игрока $u(t)$, $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$, называется аппроксимационным и обозначается символом $x(t; z_*, u(\cdot), v_\Delta(\cdot))$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$.

Определение 3.2. Функцию $x(t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ назовем движением системы (1.1), порожденным процедурой управления с поводырем второго игрока, если существует последовательность аппроксимационных движений

$$x_k(t) = x(t;\ z_*^{(k)},\ u^{(k)}(\cdot),\ v_{\Delta_k}(\cdot)) \quad (t_* \leqslant t \leqslant \vartheta,\ k = 1, 2, \ldots)$$

удовлетворяющая условиям (2.8).

Определенные здесь движения обозначаются символом $x(t; z_*, W^{(v)})$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$. Справедливо следующее положение.

Теорема 3.1. Если существует v-стабильный мост $W^{(v)}$, содержащий исходную позицию игры z_*, то для любого движения $x(t; z_*, W^{(v)})$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ точка $(t,\ x(t;\ z_*, W^{(v)}))$ остается в области G^* либо вплоть до момента $t = \vartheta$, либо до момента времени τ^*, когда она впервые попадает на множество H^*, т. е. все движения $x(t; z_*, W^{(v)})$ уклоняются от встречи с множеством M^*.

Рассмотрим некоторые свойства решения задачи об уклонении, используемые при доказательстве альтернативы для игры сближения—уклонения.

Пусть

$$z_*^{(k)} = (t_*,\ \mu_*^{(k)},\ \nu_*^{(k)},\ x_*^{(k)}) \to z_* = (t_*,\ \mu_*,\ \nu_*,\ x_*)$$
$$x^{(k)}(t) = x(t;\ z_*^{(k)},\ W^{(v)}) \to x_*(t)\ (t_* \leqslant t \leqslant \vartheta) \quad \text{при } k \to \infty$$

тогда функция $x_*(t)$ будет одним из движений $x(t; z_*, W^{(v)})$. Это вытекает непосредственно из определения движений $x(t; z_*, W^{(v)})$. Из этого свойства полунепрерывной зависимости движений $x(t; z_*, W^{(v)})$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ от позиции z_* вытекает следующее положение.

Лемма 3.1. Если позиция $z_* = (t_*, \mu_*, \nu_*, x_*)$ принадлежит некоторому v-стабильному мосту $W^{(v)}$, то существует ε-окрестность этой позиции

$$S(z_*, \varepsilon) = \{z = (t_*, \mu, \nu, x):\ |\mu - \mu_*| \leqslant \varepsilon,\ \ \mu \geqslant 0,\ \ |\nu - \nu^*| \leqslant \varepsilon,\ \nu \geqslant 0,\ \|x - x_*\| \leqslant \varepsilon\} \tag{3.5}$$

и замкнутые множества G_ε^*, H_ε^*, удовлетворяющие условиям (3.2), такие, что для любого движения $x(t; z_\varepsilon, W^{(v)})$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$, где $z_\varepsilon \in S(z_*, \varepsilon)$, точка $(t,\ x(t; z_\varepsilon, W^{(v)}))$ будет оставаться в области G_ε^* либо при $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$ либо до момента ее первой встречи с множеством $H_\varepsilon^{\mathfrak{n}*}$ (т. е. все движения $x(t; z_\varepsilon, W^{(v)})$ уклоняются от встречи с множеством M^*).

Используя это положение, можно доказать следующее утверждение.

Лемма 3.2. Если позиция $z_* = (t_*, \mu_*, \nu_*, x_*)$ принадлежит некоторому v-стабильному мосту $W^{(v)}$, то существует v-стабильный мост $W_*^{(v)}$, содержащий не только точку z_*, но и некоторую ε-окрестность $S(z_*, \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ (3.5) этой точки.

Пусть $W_0^{(u)}$ — дополнение к множеству $W_\Sigma^{(v)}$, являющемуся объединением всех v-стабильных мостов, т. е.

$$W_\Sigma^{(v)} = \bigcup W^{(v)}$$

Справедливо следующее положение.

Теорема 3.2. Множество $W_0^{(u)}$ является u-стабильным мостом.

Укажем основные моменты доказательства этой теоремы.

Из того факта, что всякое множество H вида (3.1), (3.2) является v-стабильным мостом, следует, что объединение таких множеств, являющееся дополнением к множеству N, содержится в множестве $W_\Sigma^{(\vartheta)}$. Следовательно, верно включение

$$W_0^{(u)} \subset N$$

Покажем, что справедливо соотношение $W_{0\vartheta}^{(u)} \subset M$.

Действительно, всякое множество G, удовлетворяющее условию $G \cap M_\vartheta = \varnothing$, является v-стабильным мостом. Поэтому объединение всех таких множеств G, составляющее дополнение к множеству M_ϑ, принадлежит множеству $W_\Sigma^{(\vartheta)}$, т. е.

$$C(M_\vartheta) \subset W_{\Sigma,\vartheta}^{(v)}, \qquad W_{0\vartheta}^{(u)} = C\,(W_{\Sigma,\vartheta}^{(v)}) \subset M_\vartheta$$

что и требовалось доказать.

Остается проверить выполнение соотношения

$$G^{(u)}(z_*, v(\cdot)) \cap (W_{0t_*}^{(u)} \cup M_{[t_*,t^*]}) \neq \varPhi$$

Предположим противное. Пусть существует точка $z_* \in W_{0t_*}^{(u)}$, число $t^* \in (t_*, \vartheta]$ и управление $v(t)$ $(t \geqslant t_*)$, допустимое для позиции z_*, такие, что

(3.6) $$G_{t^*}^{(u)}(z_*, v(\cdot)) \cap W_{0t^*}^{(u)} = \varPhi$$

(3.7) $$G_{[t_*,t^*]}^{(u)}(z_*, v(\cdot)) \cap W_{0t^*}^{(u)} = \varPhi$$

Из соотношения (3.6) получаем вложение

$$G_{t^*}^{(u)}(z_*, v(\cdot)) \subset W_\Sigma^{(v)} = \bigcup W^{(v)}$$

т. е. всякая точка $z \in G_{t*}^{(u)}(z_*, v(\cdot))$ принадлежит некоторому v-стабильному мосту $W^{(v)}$. Из леммы 3.2 вытекает, что существует конечное подпокрытие $G_{t*}^{(u)}(z_*, v(\cdot))$ некоторым множеством вида

(3.8) $$W_*^{(v)} = \bigcup_{i=1}^{l} W_i^{(v)}$$

где $W_i^{(v)}$ $(i = 1, 2, \ldots, l)$ — v-стабильные мосты.

Отметим, что конечная сумма v-стабильных мостов является v-стабильным мостом, поэтому множество $W_*^{(v)}$ есть v-стабильный мост.

Рассмотрим множество

$$W_{**}^{(v)} = G_{[t_*,t^*]}(z_*, v(\cdot)) \cup W_{*[t^*,\vartheta]}^{(v)}$$

Из соотношений (3.6), (3.7) выводится, что множество $W_{**}^{(v)}$ есть v-стабильный мост. Но тогда включение $z_* \in W_{**}^{(v)} \subset W_\Sigma^{(v)}$ противоречит условию $z_* \in W_{0t_*}^{(u)}$ и определению множества $W_0^{(u)}$. Полученное противоречие доказывает теорему 3.2.

Из теорем 2.1, 3.1, 3.2 сразу вытекает справедливость следующей альтернативы.

Теорема 3.3. Для любой начальной позиции игры справедливо одно из следующих двух положений.

Либо $z_0 \in W_0^{(u)}$, и тогда задача о сближении имеет решение, которое доставляет процедура с поводырем, определенная для u-стабильного моста

$W_0^{(u)}$. В этом случае для любого движения $x(t; z_0, W_0^{(u)})$ существует момент $\tau \leqslant \vartheta$, когда впервые

$$(\tau, x(\tau; z_0, W_0^{(u)})) \in M^*$$

причем

$$(t, x(t; z_0, W_0^{(u)})) \in N^* \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant \tau$$

Либо $z_0 \in W^{(v)}$, где $W^{(v)}$ — некоторый v-стабильный мост, тогда задача об уклонении имеет решение, которое доставляет процедура с поводырем, определенная для моста $W^{(v)}$. В этом случае существуют множества G^* и H^*, удовлетворяющие условиям (3.2), такие, что для всякого движения $x(t; z_0, W^{(v)})$ будет выполнено условие

$$(t, x(t; z_0, W^{(v)})) \in G \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant \tau^*(x(\cdot))$$

где $\tau^*(x(\cdot))$ — момент времени, когда впервые

$$(t, x(t; z_0, W^{(v)})) \in H^* \cap \Pi_\vartheta \Pi_\vartheta = \{(t, x): t = \vartheta, x \in R^n\}$$

В заключение отметим, что максимальный u-стабильный мост $W_0^{(u)}$ был определен здесь формально как дополнение к объединению v-стабильных мостов. Однако возможно и другое определение моста $W_0^{(u)}$ как предела специальной последовательности множеств, определенных рекуррентной процедурой программного поглощения.

Такое определение моста $W_0^{(u)}$ аналогично конструкциям из работ [8–10]. В тех случаях, когда множество $W_0^{(u)}$ определяется одной операцией программного поглощения (см., например, [5–7]), решение задачи о сближении упрощается и его можно довести до алгоритма, реализуемого на ЭВМ. Предложенную выше позиционную процедуру управления с поводырем можно реализовать также в тех случаях, когда известно решение задачи о сближении, построенное одним из прямых методов при условии информационной дискриминации преследуемого игрока (см., например, [3, 4]).

Поступила 24 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения — уклонения I, II. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 2—3.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Альтернатива для игровой задачи сближения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
3. *Красовский Н. Н.* К задаче о преследовании в случае линейных однотипных объектов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2.
4. *Никольский М. С.* Прямой метод в линейных дифференциальных играх с общими интегральными ограничениями. Дифференциальные уравнения, 1972, т. 8, № 6.
5. *Пшеничный Б. Н., Онопчук Ю. Н.* Линейные дифференциальные игры с интегральными ограничениями. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1968, № 1.
6. *Третьяков В. Е.* Регуляризация одной задачи о преследовании. Дифференциальные уравнения, 1967, т. 3, № 1.
7. *Ушаков В. Н.* Экстремальные стратегии в дифференциальных играх с интегральными ограничениями. ПММ, 1972, т. 36, № 1.
8. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх 2. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
9. *Пшеничный Б. Н.* Структура дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2.
10. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Экстремальные стратегии в дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 2.