

ление о статистических распределениях для поля скоростей в вязкой несжимаемой жидкости, совместимых с уравнениями гидромеханики.

Автор благодарит Е. А. Новикова, сделавшего ряд ценных замечаний.

Поступила 8 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Hopf E. Statistical hydromechanics and functional calculus. J. Rational Mech. and Analysis, 1952, vol. 1, No. 1, p. 87—123.
2. Hopf E., Titt E. W. On certain special solutions of the Φ -equation of statistical hydrodynamics. J. Rational Mech. and Analysis., 1953, vol. 2, No. 3, p. 587—592.
3. Громека И. С. Собрание сочинений. М., Изд-во АН СССР, 1952.
4. Стеклов В. А. Один случай движения вязкой несжимаемой жидкости. Сообщ. Харьковск. матем. об-ва. Сер. 2, т. 5. Харьков, 1896.
5. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, т. 2. М., «Наука», 1967.

УДК 539.3.

ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН В ДВУСЛОЙНОЙ СРЕДЕ
КОЛЕБЛЮЩИМся ШТАМПОМ

М. Г. Селезнев

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается антиплоская задача о возбуждении волн в двуслойной области, состоящей из упругого слоя и жестко соединенного с ним упругого полупространства, колеблющимся штампом.

На основе физического принципа предельного поглощения [1, 2] решается задача о колебании источника на поверхности и в результате выводится интегральное уравнение смешанной задачи. Решению задачи предшествовало детальное изучение дисперсионного уравнения с помощью ЭЦВМ. Строится решение контактной задачи и производится численный анализ полученных решений для конкретных значений параметров.

1. Рассматривается случай, когда к поверхности слоя толщиной h в области $X \in [-A, A]$ (фиг. 1) приложены не зависящие от координаты z усилия $\tau_{xy} = \text{Re} [\tau(x) e^{-i\omega t}]$, а нормальные напряжения отсутствуют. Колебания предполагаются установившимися.

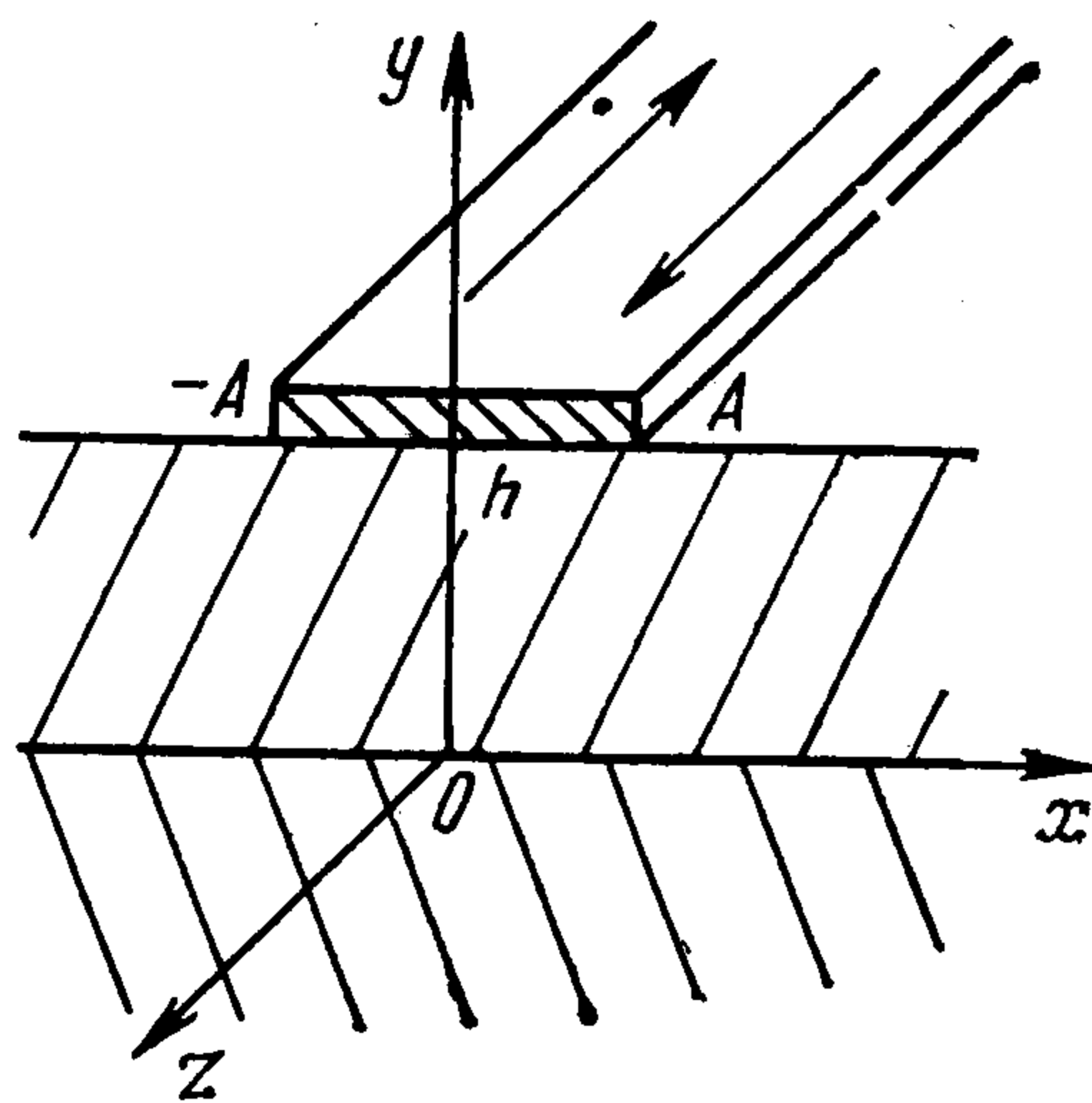
Тогда методом преобразований Фурье, применяя принцип предельного поглощения, придем к следующим формулам, описывающим перемещения $w(x, y, t)$ и $w_1(x, y, t)$ для слоя и для полупространства соответственно:

$$(1.1) \quad w(x, y, t) = \text{Re} [W_1(x, y) e^{-i\omega t}]$$

$$W(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \int_{\Gamma} \frac{(\sigma + G\sigma_1) e^{\sigma y} + (\sigma - G\sigma_1) e^{-\sigma y}}{\sigma [(\sigma + G\sigma_1) e^{\sigma} - (\sigma - G\sigma_1) e^{-\sigma}]} \times \\ \times e^{i\alpha(\xi - x)} \tau(\xi) d\alpha d\xi$$

$$(1.2) \quad w_1(x, y, t) = \text{Re} [W_1(x, y) e^{-i\omega t}]$$

$$W_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \int_{\Gamma} \frac{\tau(\xi) e^{\sigma_1 y} e^{i\alpha(\xi - x)} d\alpha d\xi}{(\sigma + G\sigma_1) e^{\sigma} - (\sigma - G\sigma_1) e^{-\sigma}}$$



Фиг. 1

Здесь

$$\sigma = \sqrt{\alpha^2 - \varepsilon^2 \kappa_1^2}, \quad \sigma_1 = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_1^2}, \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{G\rho}{\rho_1}}, \quad G = \frac{G_0}{G_1}$$

$$x = \frac{X}{h}, \quad y = \frac{Y}{h}, \quad z = \frac{Z}{h}, \quad \alpha = \beta h, \quad \xi = \frac{\gamma}{h}, \quad a = \frac{A}{h}$$

Контур Γ совпадает с вещественной осью, если подынтегральная функция не имеет нулей и полюсов на вещественной оси. В противном случае контур Γ отклоняется от вещественной оси, обходя, как правило, положительные особенности подынтегральной функции снизу, а отрицательные — сверху.

Положив $y = 1$ в выражении (1.1), получим перемещения поверхности слоя, которые можно записать в виде

$$(1.3) \quad w_0(x, t) = \operatorname{Re} [W_0(x) e^{-i\omega t}], \quad W_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a k(x - \xi) \tau(\xi) d\xi$$

$$k(x - \xi) = \int_{\Gamma} K(\alpha) e^{i\alpha(x - \xi)} d\alpha, \quad K(\alpha) = \frac{\sigma \operatorname{ch} \sigma + G\sigma_1 \operatorname{sh} \sigma}{\sigma [\sigma \operatorname{sh} \sigma + G\sigma_1 \operatorname{ch} \sigma]}$$

Анализ подынтегральной функции показал, что характер волн существенно зависит от соотношений между параметрами, характеризующими свойства материалов. При некоторых соотношениях волны вообще не возникают.

Очевидно, что при $\varepsilon < 1$ подынтегральная функция (1.1) не имеет вещественных нулей, т. е. волна возникнуть не может. В этом случае можно сказать, что слой является более «жестким», чем полупространство. В случае $\varepsilon > 1$ на вещественной оси появляются нули и полюсы подынтегральной функции. Число их растет с ростом ω .

Поведение нейтральных кривых позволяет при любой частоте сразу указать фазовые скорости и число волн, возникающих на поверхности слоя в данном случае.

2. В случае смешанной задачи выражение (1.3) является интегральным уравнением для определения контактных напряжений. Для решения интегрального уравнения вводим аппроксимацию функции $K(\alpha)$ при $\kappa_1 = 2$, $\varepsilon = 1.4$. При этом функция $K(\alpha)$ имеет полюс $z_1 = 2.513$ и нуль $\zeta_1 = 2.005$. Аппроксимирующая функция — полином с комплексными коэффициентами. Погрешность аппроксимации не превышает 10%, причем при $\alpha > 4$ практически равна нулю.

Аппроксимирующую функцию можно записать в виде

$$(2.1) \quad K(\alpha) \approx \frac{H(\alpha)(\alpha^2 - \zeta_1^2)}{\sqrt{\alpha^2 + 100}(\alpha^2 - z_1^2)}$$

$$H(\alpha) = \frac{(\alpha^2 - \alpha_1^2)(\alpha^2 - \alpha_2^2)(\alpha^2 - \alpha_3^2)(\alpha^2 - \alpha_4^2)}{(\alpha^2 + 25)^4}$$

$$\alpha_1 = 1.838 + 1.149i, \quad \alpha_2 = -0.1173 + 9.754i, \quad \alpha_3 = -3.769 + 6.539i$$

$$\alpha_4 = 3.471 + 6.823i$$

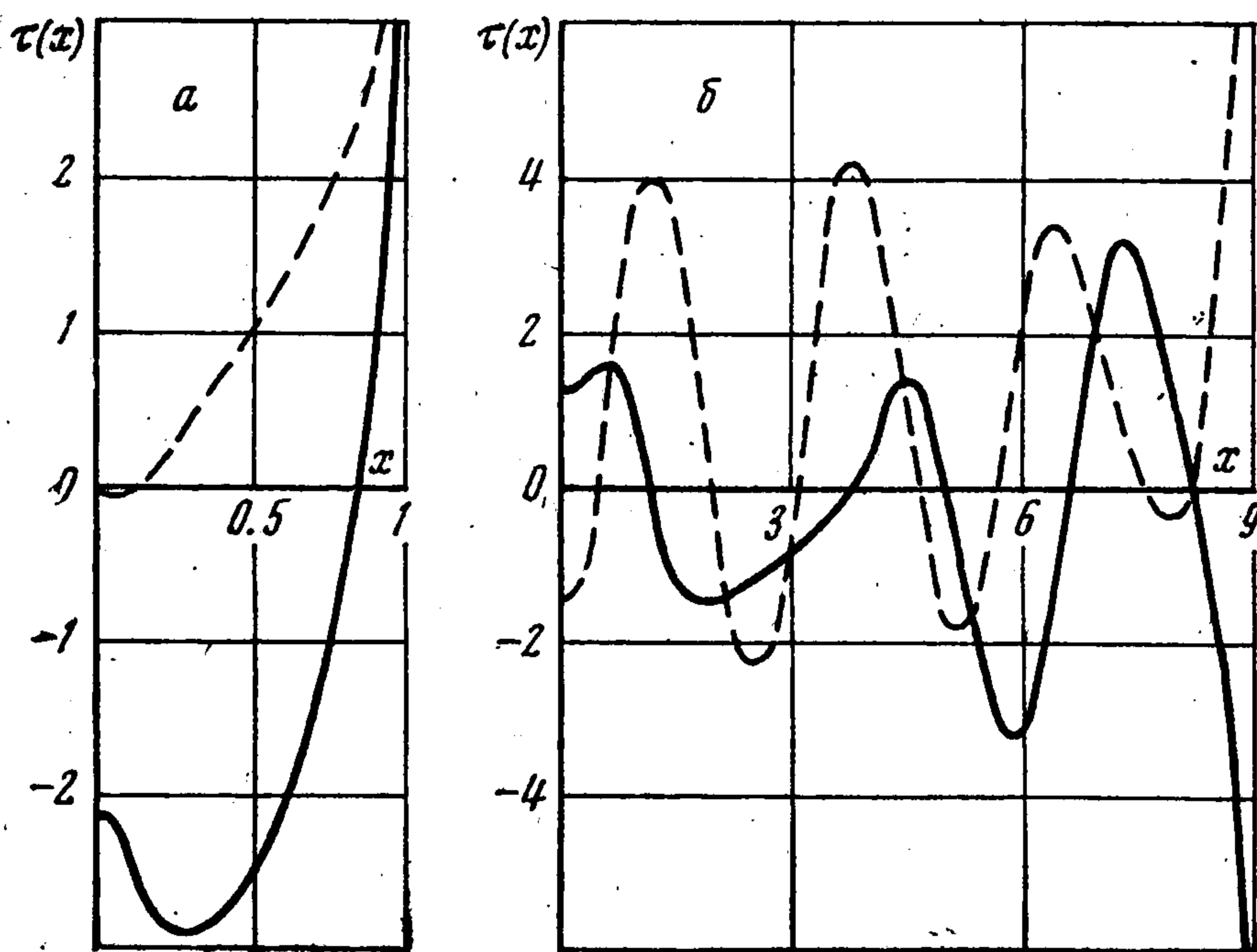
Правомерность аппроксимации можно обосновать так же, как в работе [3].

Функция $K(\alpha)$ допускает факторизацию относительно контура Γ [1]

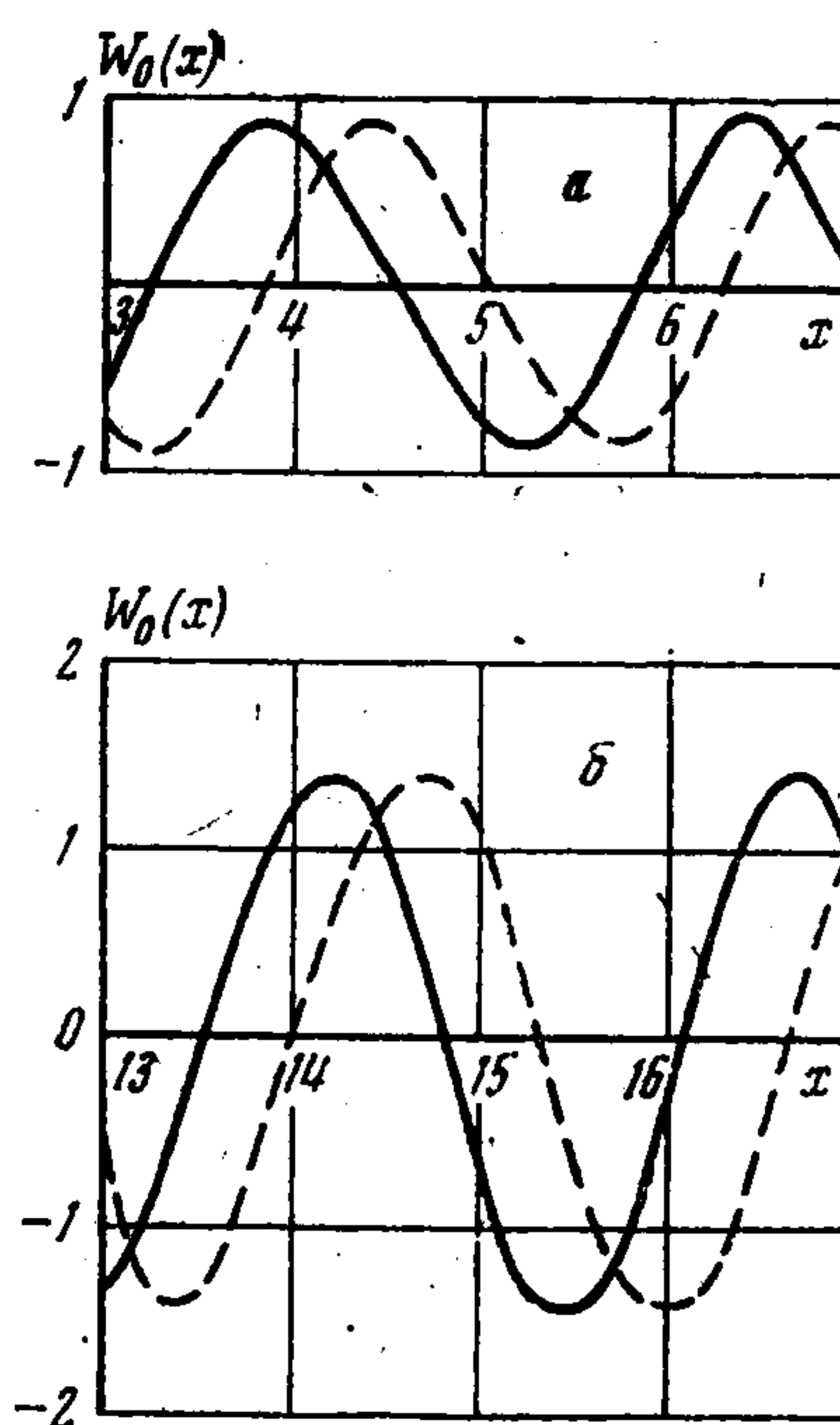
$$K(\alpha) = K_+(\alpha) K_-(\alpha)$$

$$(2.2) \quad K_{\pm}(\alpha) = \frac{(\alpha \pm 2.007)(\alpha \pm \alpha_1)(\alpha \pm \alpha_2)(\alpha \pm \alpha_3)(\alpha \pm \alpha_4)}{(\alpha \pm 2.513) \sqrt{10 \mp i\alpha} (\alpha \pm 5i)^4}$$

Представив функцию $K(\alpha)$ в таком виде, можно непосредственно использовать метод работы [2] для построения решения интегрального уравнения (1.3), а также для нахождения перемещений поверхности слоя вне штампа.



Фиг. 2



Фиг. 3

Не нарушая общности, положим $W_0(x) = e^{inx}$. Вещественные полюсы функции $K_+(\alpha)$ обозначим через $-z_k, k = 1, 2, \dots, m$, вещественные нули $-\zeta_i, i = 1, 2, \dots, n$. Все они отрицательные. Тогда решение уравнения (1.3) в общем случае может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \tau(x) = & -\frac{e^{inx}}{K(\eta)} + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{\exp[-iu(a+x) - i\eta] du}{K_+(u)K_+(\eta)(u+\eta)} - \\ & - \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty-ic}^{\infty-ic} \frac{\exp[iu(a-x) + i\eta] du}{K_-(u)K_-(\eta)(u+\eta)} + \sum_{k=1}^n \left\langle \frac{2i \exp[2ai\zeta_k + i\eta a]}{K'_-(\zeta_k)(\eta + \zeta_k)} + \right. \\ & + \sum_{p=1}^n r_k [A_{kp}^+ \alpha^+(-\zeta_p) + A_{kp}^- \alpha^-(-\zeta_p)] \left\{ \frac{i \exp[-i\zeta_k(a+x)]}{2K_+(\zeta_k)} + \right. \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty+ic}^{\infty+ic} \frac{\exp[-iu(a+x)] du}{K_+(u)(u-\zeta_k)} \left. \right\} - \frac{2i \exp[2ai\zeta_k - i\eta a]}{K'_-(\zeta_k)(\eta - \zeta_k)} - \\ & - \sum_{p=1}^n r_k [A_{kp}^+ \alpha^+(-\zeta_p) - A_{kp}^- \alpha^-(-\zeta_p)] \left\{ -\frac{i \exp[-i\zeta_k(a-x)]}{2K_+(\zeta_k)} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty-ic}^{\infty-ic} \frac{\exp[iu(a-x)] du}{K_-(u)(u+\zeta_k)} \right\} \rangle, \quad |x| < a \end{aligned}$$

Здесь A_{kp}^\pm — элементы обратной матрицы Δ^\pm

$$\Delta^\pm = \begin{vmatrix} 1 \pm \frac{K_+(\zeta_1) e^{2ai\zeta_1}}{K'_+(-\zeta_1)(\zeta_1 + \zeta_1)} & \dots & \pm \frac{K_+(\zeta_n) e^{2ai\zeta_n}}{K'_+(-\zeta_n)(\zeta_1 + \zeta_n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \pm \frac{K_+(\zeta_1) e^{2ai\zeta_1}}{K'_+(-\zeta_1)(\zeta_n + \zeta_1)} & \dots & 1 \pm \frac{K_+(\zeta_n) e^{2ai\zeta_n}}{K'_+(-\zeta_n)(\zeta_n + \zeta_n)} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha^\pm(\zeta) = & i \sum_{k=1}^n \frac{\exp(2ai\zeta_k)}{K'_-(\zeta_k)(\zeta - \zeta_k)} \left[\frac{e^{-ina}}{\zeta_k - \eta} \pm \frac{e^{ina}}{\zeta_k + \eta} \right] - \\ & - \frac{i}{K_-(\zeta)} \left(\frac{e^{ina}}{\zeta - \eta} \pm \frac{e^{-ina}}{\zeta + \eta} \right) + i \left(\frac{e^{ina}}{(\zeta - \eta)K_-(\eta)} \pm \frac{e^{-ina}}{(\zeta + \eta)K_+(\eta)} \right) \end{aligned}$$

Выражение для $W_0(x)$ имеет вид

$$W_0(x) \approx \sum_{r=1}^m \frac{i}{2 [K_{-1}^{-1}(z_r)]'} [X^+(z_r) + X^-(z_r)] e^{iz_r(x-a)}, \quad x > 2a$$

$$W_0(x) \approx \sum_{r=1}^m \frac{i}{2 [K_{-1}^{-1}(z_r)]'} [X^+(z_r) + X^-(z_r)] e^{-iz_r(x-a)}, \quad x < -2a$$

$$\begin{aligned} X^+(\mp \zeta) \pm X^-(\mp \zeta) &= \pm 2i \sum_{k=1}^n \frac{\exp(2ai\zeta_k \mp i\eta a)}{K_{-1}'(+\zeta_k) (\zeta_k \pm \zeta) (\eta \mp \zeta_k)} \pm \\ &\pm 2i \frac{\exp(\pm i\eta a)}{\zeta \pm \eta} \left(\frac{1}{K_{\pm}(\zeta)} - \frac{1}{K_{\mp}(\eta)} \right) + \\ &+ \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^n \frac{K_+(\zeta_k) \exp(2ai\zeta_k)}{K_{+1}'(-\zeta_k) (\zeta \pm \zeta_k)} [A_{kp}^{\mp} \alpha^{\mp}(-\zeta_p) \mp A_{kp}^{\pm} \alpha^{\pm}(-\zeta_p)] \end{aligned}$$

Значения функций $\tau(x)$ и $W_0(x)$ для аппроксимации (2.1), (2.2) просчитаны на ЭВМ для разных a, η . На фиг. 2 приведены графики действительной (сплошная линия) и мнимой (пунктирная линия) частей $\tau(x)$ для случая жесткого плоского штампа при $a = 1, \eta = 0$ (а), и $a = 9, \eta = 0$ (б).

На фиг. 3 приведены графики действительной и мнимой частей $W_0(x)$ при $a = 1, \eta = 0$ (а) и при $a = 6, \eta = 0$ (б).

Автор благодарит В. А. Бабешко и И. И. Воровича за ценные советы и внимание к работе.

Поступила 17 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1972.
2. Бабешко В. А. К теории динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 3.
3. Бабешко В. А. Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.

Технический редактор З. В. Филиппова

Сдано в набор 23/I-1975 г. Т-01990 Подписано к печати 26/III-1975 г. Тираж 2870 экз.
Зак. 1649 Формат бумаги 70×108^{1/16} Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6,0 Уч.-изд. л. 15,5

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10