8. *Николаевский В. Н.* Асимметричная механика турбулентных потоков. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
9. *Трусделл К.* Этапы развития понятия напряжения. В сб.: Проблемы механики сплошной среды (К 70-летию академика Н. И. Мусхелишвили). М., Изд-во АН СССР, 1961.
10. *Mindlin R. D.* Microstructure in linear elasticity. Arch. Ration. Mech. Analysis, 1964, vol. 16, No. 1, p. 51—78. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1964, № 4 (86)).
11. *Николаевский В. Н.* Асимметричная механика турбулентных потоков. Энергия и энтропия. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
12. *Rivlin R. S., Ericksen J. L.* Stress-deformation relations for isotropic materials. J. Rational. Mech. Analysis, 1955, vol. 4, No. 2.
13. *Wang C. C.* A new representation theorem for isotropic functions. Arch. Rational Mech. Analysis, 1970, vol. 36, No. 3.

---

УДК 532.517.4

# О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛАХ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ВИНТОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

**Н. В. Дерендяев**

(Горький)

Получен класс точных решений для характеристического функционала случайного поля скоростей винтовых движений вязкой несжимаемой жидкости.

Известное решение [1,2] уравнения в вариационных производных для характеристического функционала поля скоростей относится к случаю статистически стационарного поля скоростей в идеальной несжимаемой жидкости и представляет собой гауссовский функционал с постоянной спектральной плотностью энергии.

Для винтовых движений идеальной несжимаемой жидкости, на которые впервые указал Громека [3], скорость и вихрь скорости пропорциональны, т. е.

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \varkappa \mathbf{v} \tag{1}$$

где $\varkappa$ — псевдоскалярная постоянная с размерностью волнового числа. Позднее Стеклов показал [4], что винтовые решения Громеки удовлетворяют и уравнениям Навье — Стокса, будучи домножены на $\exp(-\nu\varkappa^2 t)$, где $\nu$ — кинематическая вязкость, $t$ — время. Винтовые поля скоростей в безграничном пространстве могут быть пространственно-периодическими или убывающими до нуля на бесконечности.

Спектральная форма уравнения (1) имеет вид

$$i\varepsilon_{jlm}\, k_l v_m(\mathbf{k}) = \varkappa v_j(\mathbf{k}) \qquad (i^2 = -1) \tag{2}$$

где $\varepsilon_{jlm}$ — тензорная плотность Леви — Чивита. Система уравнений (2) имеет ненулевое решение относительно $v_j(\mathbf{k})$ лишь при условии $\mathbf{k}^2 = \varkappa^2$. Это означает, что выражение для спектральной плотности поля скоростей $v_j(\mathbf{k})$ должно содержать множителем $\delta$-функцию $\delta(k - |\varkappa|)$. Системе (2) удовлетворяет выражение

$$v_j(k) = \left(\Delta_{jn} + i\,\frac{k_l}{\varkappa}\,\varepsilon_{jln}\right) A_n(\mathbf{k})\,\delta(k - |\varkappa|) \tag{3}$$

$$\Delta_{jn} = \delta_{jn} - k_j k_n / k^2$$

где $\delta_{jn}$ — единичный тензор, $A_n(\mathbf{k})$ — произвольное векторное поле, удовлетворяющее условию $A_n^*(\mathbf{k}) = A_n(-\mathbf{k})$, которое вытекает из требования вещественности поля скоростей. Решение (3) зависит от двух произвольных функций — компонент вектора $\mathbf{A}$, ортогональных $\mathbf{k}$, а потому является общим решением уравнения (2), пропорциональным функции $\delta(k - |\varkappa|)$. Спектральная плотность винтового поля скоростей в вязкой несжимаемой жидкости $v_j(\mathbf{k}, t)$ в соответствии с [4] получается из (3) домножением на $\exp(-\nu\varkappa^2 t)$.

Рассмотрим случайное поле скоростей в безграничной жидкости, реализациями которого являются винтовые поля. Такое поле может быть задано выражением для спектральной плотности со случайными $\mathbf{A}(\mathbf{k})$, $\varkappa$. Поле $v_j(\mathbf{k}, t)$ линейно выражается через поле $\mathbf{A}(\mathbf{k})$, а поэтому если поле $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ при фиксированном $\varkappa$ будет гауссовским, то и поле $v_j$ — условно-гауссовское при фиксированном $\varkappa$. Именно для этого случая можно в явном виде выписать характеристический функционал случайного поля $v_j(\mathbf{k}, t)$.

В самом деле, в соответствии со сказанным выше характеристический функционал поля $v_j(\mathbf{k}, t)$ представляет собой среднее по $\varkappa$ от некоторого гауссовского функционала

$$\varphi(\mathbf{z}, t) = \int d\sigma(\varkappa)\cdot\exp\Big\{i\int \langle v_j(\mathbf{k}, t)\rangle_\varkappa z_j\, d^3\mathbf{k} - \frac{1}{2}\int \langle v_l(\mathbf{k}_1, t)\, v_m(\mathbf{k}_2, t)\rangle_\varkappa z_l(\mathbf{k}_1)\, z_m(\mathbf{k}_2)\, d^3\mathbf{k}_1\, d^3\mathbf{k}_2\Big\} \tag{4}$$

Здесь $\sigma(\varkappa)$ — функция распределения параметра $\varkappa$, $\langle v_j\rangle_\varkappa$, $\langle v_l v_m\rangle_\varkappa$ — первый и второй моменты поля $v_j(\mathbf{k}, t)$ относительно условного распределения при фиксированном $\varkappa$, которые выражаются через моменты $\langle A_j\rangle_\varkappa$, $\langle A_j A_l\rangle_\varkappa$ в силу (3), $\mathbf{z}(\mathbf{k})$ — аргумент функционала, принадлежащий, например, классу финитных полей, удовлетворяющих условию $\mathbf{z}^*(\mathbf{k}) = \mathbf{z}(-\mathbf{k})$.

Характеристический функционал (4) содержит в принципе полную информацию о случайном поле $v_j(\mathbf{r}, t)$. Так, например, при подстановке в характеристический функционал в качестве аргумента выражения $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_1)\,\theta_1 + \ldots + \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_N)\,\theta_N$, где $\mathbf{r}_j$, $\theta_j$ — постоянные векторы, получается характеристическая функция $F(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ распределения скоростей частиц жидкости в фиксированных точках $\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N$ [5]. Плотность многоточечной функции распределения скоростей $f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N)$ может быть получена из $F(\theta_1, \ldots, \theta_N)$ преобразованием Фурье

$$f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_N) = \frac{1}{(2\pi)^{3N}}\int F \exp\Big(-i\sum_{j=1}^{N}\mathbf{v}_j\theta_j\Big)\, d^3\theta_1 \ldots d^3\theta_N$$

Все многоточечные функции распределения скоростей в рассматриваемом частном случае будут средними от некоторых гауссовских, так как характеристический функционал (4) является средним от гауссовских функционалов по параметру $\varkappa$. В частности, многоточечные функции распределения скоростей могут быть и гауссовскими. В последнем случае распределение $\sigma(\varkappa)$ сосредоточено в одной точке.

Если выбрать поле $\mathbf{A}(\mathbf{k})$ таким, чтобы его моменты удовлетворяли условиям

$$\begin{aligned} &\langle A_j\rangle_\varkappa \equiv 0 \\ &\langle A_l(\mathbf{k}_1) A_m(\mathbf{k}_2)\rangle_\varkappa\, \delta(k_1 - |\varkappa|)\, \delta(k_2 - |\varkappa|) = \\ &= f_{lm}(\mathbf{k}_2, \varkappa)\, \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)\, \delta(k_1 - |\varkappa|) \end{aligned} \tag{5}$$

то функционал (4) будет инвариантен относительно преобразования $\mathbf{z}(\mathbf{k}) \to e^{i\mathbf{k}\mathbf{a}}\mathbf{z}(\mathbf{k})$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор, и, следовательно, будет описывать статистически однородное поле. При этом если в формуле (5) $f_{lm}$ зависит лишь от модуля $\mathbf{k}_2$, а $\sigma(\varkappa) = \sigma(-\varkappa)$, то функционал (4) инвариантен также и относительно преобразования $\mathbf{z}(\mathbf{k}) \to L\mathbf{z}(L^{-1}\mathbf{k})$, где $L$ — произвольное вращение или отражение пространства, и описывает статистически изотропное поле скоростей [5].

Винтовые поля скоростей удовлетворяют линейному уравнению (1), а поэтому спектральный перенос энергии в случайном поле с винтовыми реализациями отсутствует. Однако характеристические функционалы, приведенные в данной работе, являются примерами точных решений уравнения Хопфа и дают некоторое представление о статистических распределениях для поля скоростей в вязкой несжимаемой жидкости, совместимых с уравнениями гидромеханики.

Автор благодарит Е. А. Новикова, сделавшего ряд ценных замечаний.

Поступила 8 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hopf E.* Statistical hydromechanics and functional calculus. J. Rational Mech. and Analysis, 1952, vol. 1, No. 1, p. 87—123.
2. *Hopf E., Titt E. W.* On certain special solutions of the Φ-equation of statistical hydrodynamics. J. Rational Mech. and Analysis., 1953, vol. 2, No. 3, p. 587—592.
3. *Громека И. С.* Собрание сочинений. М., Изд-во АН СССР, 1952.
4. *Стеклов В. А.* Один случай движения вязкой несжимаемой жидкости. Сообщ. Харьковск. матем. об-ва. Сер. 2, т. 5. Харьков, 1896.
5. *Монин А. С., Яглом А. М.* Статистическая гидромеханика, т. 2. М., «Наука», 1967.

---

УДК 539.3

# ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН В ДВУСЛОЙНОЙ СРЕДЕ КОЛЕБЛЮЩИМСЯ ШТАМПОМ

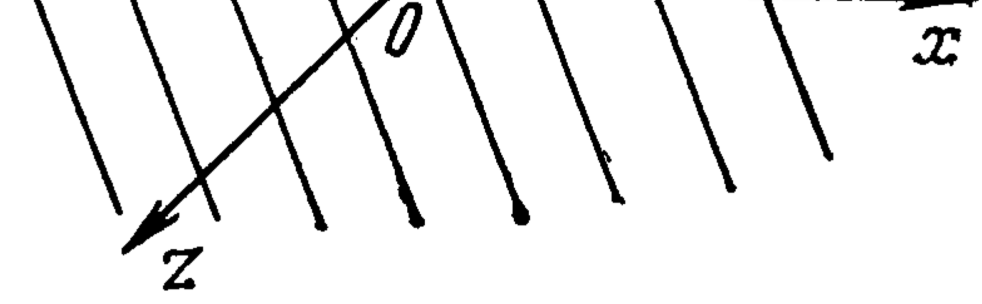
**М. Г. Селезнев**

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается антиплоская задача о возбуждении волн в двуслойной области, состоящей из упругого слоя и жестко соединенного с ним упругого полупространства, колеблющимся штампом.

На основе физического принципа предельного поглощения [1, 2] решается задача о колебании источника на поверхности и в результате выводится интегральное уравнение смешанной задачи. Решению задачи предшествовало детальное изучение дисперсионного уравнения с помощью ЭЦВМ. Строится решение контактной задачи и производится численный анализ полученных решений для конкретных значений параметров.

1. Рассматривается случай, когда к поверхности слоя толщиной $h$ в области $X \in [-A, A]$ (фиг. 1) приложены не зависящие от координаты $z$ усилия $\tau_{xy} = \operatorname{Re}[\tau(x) e^{-i\omega t}]$, а нормальные напряжения отсутствуют. Колебания предполагаются установившимися.




Фиг. 1

Тогда методом преобразований Фурье, применяя принцип предельного поглощения, придем к следующим формулам, описывающим перемещения $w(x, y, t)$ и $w_1(x, y, t)$ для слоя и для полупространства соответственно:

$$w(x, y, t) = \operatorname{Re}[W_1(x, y) e^{-i\omega t}] \tag{1.1}$$

$$W(x,y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{a} \int_{\Gamma} \frac{(\sigma + G\sigma_1) e^{\sigma y} + (\sigma - G\sigma_1) e^{-\sigma y}}{\sigma[(\sigma + G\sigma_1) e^{\sigma} - (\sigma - G\sigma_1) e^{-\sigma}]} \times$$

$$\times e^{i\alpha(\xi - x)} \tau(\xi)\, d\alpha\, d\xi$$

$$w_1(x, y, t) = \operatorname{Re}[W_1(x, y) e^{-i\omega t}] \tag{1.2}$$

$$W_1(x,y) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \int_{\Gamma} \frac{\tau(\xi) e^{\sigma_1 y} e^{i\alpha(\xi - x)} d\alpha\, d\xi}{(\sigma + G\sigma_1) e^{\sigma} - (\sigma - G\sigma_1) e^{-\sigma}}$$