7. *Чефи Н.* Проблема бифуркации для дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа. Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям, т. 1. Киев, Изд. Ин-та математики АН УССР, 1970.
8. *Стрыгин В. В.* Бифуркация автоколебаний в системах функциональных уравнений. Тр. матем. фак. Воронежск. ун-та, 1971, вып. 4.
9. *Стрыгин В. В.* Бифуркация малых автоколебаний сингулярно возмущенных систем запаздывающего типа. Тр. НИИ матем. Воронежск. ун-та, 1972, вып. 5.
10. *Неймарк Ю. И., Фишмен Л. З.* Структура фазового пространства квазилинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа. Изв. вузов. Радиофизика, 1972, т. 15. № 11.
11. *Колесов Ю. С.* Расчет автоколебаний нелинейных дифференциальных уравнений с последействием, ответвляющихся от нулевого состояния равновесия. Вестн. Ярославск. ун-та, 1973, № 2.
12. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.

УДК 532.5

ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ И ОСРЕДНЕНИЕ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

В. Н. Николаевский

(Москва)

При переходе от уравнений движения, справедливых в микромасштабе, к макроуравнениям, описывающим движение сложных сред (таких, как турбулизованная жидкость, упругая среда с микродефектами, суспензии газовых пузырьков или твердых частиц в жидкости и т. п.), возникает проблема определения среднего напряжения и других макропеременных. В монографии [1] вводилось среднее по объему значение тензора напряжений и именно эта величина использовалась в определяющих связях для подсчета эйнштейновской вязкости суспензий. Кроме того, при конкретных вычислениях этих средних по объему значений использовалось некоторое эффективное представление через интегралы по поверхностям [1]. В дальнейшем Бэтчелор [2], а вслед за ним и некоторые другие авторы [3], предполагая эквивалентность осреднения по объему и поверхностям, использовали именно эти средние по объему значения в качестве напряжений в макроуравнениях движения. Отсюда, в частности, непосредственно следует обязательная симметричность тензора макронапряжений в указанных выше случаях.

В данной работе показано, что осреднение по объему тензора микронапряжений и микропотока импульсов согласно правилу [1] определяет лишь некоторую симметричную часть полного тензора макронапряжений. Для простого случая вязкой жидкости, неоднородно движущейся на микроуровне, этот средний по объему тензор линейно связан со средними скоростями деформаций. Более того, именно представление, использованное в работе [1], позволяет выявить существенное в общем случае различие между средними по объему и по поверхностям напряжениями.

Метод интегрирования по объему микроуравнений [4–6] естественно приводит к появлению в макроуравнениях напряжений, средних по дифференциальным макроплощадкам. Существенно, что при этом тензор макронапряжений, вообще говоря, несимметричен, хотя в микромасштабе уравнения движения соответствуют симметричной континуальной механике. Именно это соображение позволило развить континуальные уравнения движения суспензии, отражающие эффект неравновесного собственного вращения взвешенных частиц [7], а случаю турбулизованной жидкости с анизотропией вихревого характера поставить в соответствие ненулевую антисимметричную часть напряжений Рейнольдса [8].

1. Выделим два масштаба исследования сложных течений — микромасштаб и макромасштаб, и, считая, что континуальные уравнения для микромасштаба известны, будем искать континуальные макроуравнения. А именно, пусть в каждом дифференциальном микроэлементе $dV = dx_1dx_2dx_3$ выполнены уравнения баланса массы и импульса

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_j}{\partial x_j} = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \rho u_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + F_i \tag{1.2}$$

где ρ — плотность, u_i — локальная скорость, σ_{ij} — тензор микронапряжений, F_i — массовая сила. В том случае, если микротензор σ_{ij} несимметричен, уравнения (1.1) и (1.2) необходимо дополнить уравнением баланса моментов количества движения. Здесь, однако, ограничимся рассмотрением случая симметричного микронапряжения, линейно связанного с тензором скоростей деформации (A_{ijkl} — тензор коэффициентов вязкости)

$$\sigma_{ij} \equiv \sigma_{ji} = {}^1/_2 A_{ijkl} (\partial u_k / \partial x_l + \partial u_l / \partial x_k) - p\delta_{ij} \tag{1.3}$$

Умножение уравнения (1.2) на координату x_k приводит к соотношению

$$\sigma_{ik} - \rho u_i u_k = -\frac{\partial \rho u_i x_k}{\partial t} - \frac{\partial \rho u_i u_j x_k}{\partial x_j} + \frac{\partial \sigma_{ij} x_k}{\partial x_j} + F_i x_k \tag{1.4}$$

позволяющему [1,2] непосредственно выразить тензор потока импульса. Если соотношение (1.4) умножить на альтернирующий тензор ε_{lik} Леви — Чивита, то оно переходит в уравнение баланса момента количества движения

$$\frac{\partial \varepsilon_{lik} \rho u_i x_k}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_{lik} \rho u_i x_k u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial \varepsilon_{lik} \sigma_{ij} x_k}{\partial x_j} + \varepsilon_{lik} F_i x_k \tag{1.5}$$

Здесь учтено условие симметрии микропотока импульса $\varepsilon_{lik} (\sigma_{ik} - \rho u_i u_k) = 0$.

Проинтегрировав уравнения (1.1) — (1.5) по объему V, в случае непрерывных полей переменных можно применить теорему Остроградского—Гаусса

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV + \int_S \rho u_j dS_j = 0 \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_i \, dV + \int_S \rho u_i u_j dS_j = \int_S \sigma_{ij} dS_j + \int_V F_i \, dV$$

$$\int_V \sigma_{ij} \, dV = \frac{1}{2} A_{ijkl} \int_V \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) dV - \int_V p\delta_{ij} dV$$

$$\int_V (\rho u_i u_j - \sigma_{ik}) \, dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho u_i x_k \, dV + \int_S \rho u_i u_j x_k dS_j - \int_S \sigma_{ij} x_k dS_j - \int_S F_i x_k dV$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varepsilon_{lik} \rho u_i x_k \, dV + \int_S \varepsilon_{lik} \rho u_i x_k u_j dS_j = \int_S \varepsilon_{lik} \sigma_{ij} x_k dS_j + \int_V \varepsilon_{lik} F_i x_k dV$$

причем

$$\varepsilon_{lik} \int_V \sigma_{ik} \, dV = \varepsilon_{lik} \int_V \rho u_i u_k \, dV = 0$$

а поверхностный интеграл берется по всей поверхности S объема V. В отсутствие инерционных и массовых сил четвертое соотношение (1.6) совпадает с представлением Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица ([1], стр. 637), связывающее средний по объему тензор напряжений и интеграл от поверхностных усилий.

2. Пусть V — элементарный макрообъем $V = \Delta X_1 \Delta X_2 \Delta X_3$, где X_i — макрокоординаты центра масс объема V. Если теперь разделить уравнения (1.5) на объем V,

то они перейдут в осредненные уравнения

$$\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial t}+\frac{\partial\langle\rho u_j\rangle_j}{\partial X_j}=0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial\langle\rho u_i\rangle}{\partial t}+\frac{\partial\langle\rho u_i u_j\rangle_j}{\partial X_j}=\frac{\partial\langle\sigma_{ij}\rangle_j}{\partial X_j}+\langle F_i\rangle \tag{2.2}$$

$$\langle\sigma_{ij}\rangle=\frac{A_{ijkl}}{2}\left(\frac{\partial\langle u_k\rangle_l}{\partial X_l}+\frac{\partial\langle u_l\rangle_k}{\partial X_k}\right)-\langle p\delta_{ij}\rangle \tag{2.3}$$

$$\langle\rho u_i u_k\rangle-\langle\sigma_{ik}\rangle=\frac{\partial\langle\rho u_i x_k\rangle}{\partial t}+\frac{\partial\langle\rho u_i u_j x_k\rangle_j}{\partial X_j}-\frac{\partial\langle\sigma_{ij}x_k\rangle_j}{\partial X_j}-\langle F_i x_k\rangle \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial\langle\varepsilon_{lik}\rho u_i x_k\rangle}{\partial t}+\frac{\partial\langle\varepsilon_{lik}\rho u_i x_k u_j\rangle_j}{\partial X_j}=\frac{\partial\langle\varepsilon_{lik}\sigma_{ij}x_k\rangle_j}{\partial X_j}+\langle\varepsilon_{lik}F_i x_k\rangle \tag{2.5}$$

причем

$$\varepsilon_{lik}\langle\sigma_{ik}\rangle=\varepsilon_{lik}\langle\rho u_i u_k\rangle=0$$

а смысл символов осреднения иллюстрируется следующим образом:

$$\langle\sigma_{ij}\rangle=\frac{1}{V}\int_V\sigma_{ij}\,dV,\quad \langle\sigma_{ij}\rangle_j=\frac{\Delta X_j}{\Delta X_1\Delta X_2\Delta X_3}\int_S\sigma_{ij}n_j\,dS,\quad dS_j=n_j\,dS$$

где S_j — площадь грани объема $V=\Delta X_1\Delta X_2\Delta X_3$ с нормалью n_j.

Если умножить теперь уравнение (2.2) на X_k, то получим

$$\langle\rho u_i u_k\rangle_k-\langle\sigma_{ik}\rangle_k=\frac{\partial\langle\rho u_i X_k\rangle}{\partial t}+\frac{\partial\langle\rho u_i u_j X_k\rangle_j}{\partial X_j}-\frac{\partial\langle\sigma_{ij}X_k\rangle_j}{\partial X_j}-\langle F_i X_k\rangle \tag{2.6}$$

Вычитание этого результата из (2.4) определяет разницу

$$\langle\sigma_{ik}\rangle_k-\langle\rho u_i u_k\rangle_k=\langle\sigma_{ik}\rangle-\langle\rho u_i u_k\rangle+\frac{\partial\langle\rho u_i\xi_k\rangle}{\partial t}+\frac{\partial\langle\rho u_i u_j\xi_k\rangle_j}{\partial X_j}-\langle F_i\xi_k\rangle-\frac{\partial\langle\sigma_{ij}\xi_k\rangle_j}{\partial X_j} \tag{2.7}$$

между средними значениями потока импульса — по объему и по поверхности. Здесь $\xi_k=x_k-X_k$ — координата относительно центра масс объема V.

Если же умножить (2.7) на тензор ε_{lik}, то результатом будет уравнение внутреннего момента количества движения в объеме V

$$\varepsilon_{lik}\langle\sigma_{ik}-\rho u_i u_k\rangle_k=\frac{\partial\langle\varepsilon_{lik}\rho u_i\xi_k\rangle}{\partial t}+\frac{\partial\langle\varepsilon_{lik}\rho u_i u_j\xi_k\rangle_j}{\partial X_j}-\frac{\partial\langle\varepsilon_{lik}\sigma_{ij}\xi_k\rangle_j}{\partial X_j}-\langle\varepsilon_{lik}F_i\xi_k\rangle \tag{2.8}$$

Таким образом, в осредненном уравнении импульса фигурирует тензор макронапряжений $\langle\sigma_{ij}\rangle_j$, средний по поверхности, в согласии с исходными представлениями Коши [9]. Средний по объему тензор напряжений $\langle\sigma_{ij}\rangle$, согласно уравнению (2.7), вообще говоря, составляет лишь часть от среднего по поверхности $\langle\sigma_{ij}\rangle_j$ и не может быть использован непосредственно в уравнении баланса количества движения (2.2). Антисимметричная часть макротензора $\langle\sigma_{ij}\rangle_j$ входит, как и следовало ожидать, в баланс внутреннего момента количества движения.

3. Весьма важным элементом составления макроуравнений движения является вычисление связи макронапряжения $\langle\sigma_{ij}\rangle_j$ с полем средних скоростей $U_i(X_j,\ t)$. Мгновенная средняя скорость в эйлеровом макрообъеме V вводится [8] как среднемас-

совая и относится к центру масс с координатами X_i

(3.1) $\langle\rho\rangle U_i = \langle\rho u_i\rangle$

(3.2) $\langle\rho\rangle X_i = \langle\rho x_i\rangle, \quad \langle\rho\xi_i\rangle = 0$

Тогда поле локальных скоростей $u_i(x_j, t)$ и поле средних скоростей $U_i(x_j, t)$ в объеме представим в виде

$$u_i(x_j, t) = U_i(x_j, t) + v_i(x_j, t)$$
$$U_i(x_j, t) = U_i(X_j, t) + (\partial U_i / \partial X_j)(x_j - X_j)$$

где v_i — скорость пульсации в микроточке x_i.

Согласно (3.1), имеем $\langle\rho v_i\rangle = 0$. Если, кроме того, положить $\langle v_i\rangle_j = 0$, т. е. принять гипотезу о совпадении результатов объемного и поверхностного осреднения для векторных величин $\langle u_i\rangle_j = U_i$, то соотношение (2.3) принимает вид

(3.3) $$\langle\sigma_{ij}\rangle = \frac{A_{ijkl}}{2}\left(\frac{\partial U_k}{\partial X_l} + \frac{\partial U_l}{\partial X_k}\right) - \langle p\rangle\,\delta_{ij}$$

Таким образом, среднее по объему напряжение есть та часть макронапряжения $\langle\sigma_{ij}\rangle_j$, которая соответствует вязким напряжениям, определяемым средним полем скоростей.

С другой стороны, локальное значение напряжения представимо также в виде

$$\sigma_{ij} = \langle\sigma_{ij}\rangle + \frac{1}{2} A_{ijkl}\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \frac{\partial v_l}{\partial x_k}\right) - (p - \langle p\rangle)\delta_{ij}$$

Поэтому девиаторная часть макронапряжения $\langle\sigma_{ij}\rangle_j$ отличается от среднего по объему за счет ненулевых градиентов скоростей пульсаций на гранях объема V. Уравнение (2.7) в силу равенства (3.3) дает также и другое представление для макронапряжений

(3.4) $$\langle\sigma_{ij}\rangle_j - \langle\rho u_i u_j\rangle_j = \frac{A_{ijkl}}{2}\left(\frac{\partial U_k}{\partial X_l} + \frac{\partial U_l}{\partial X_k}\right) - \langle p\rangle\,\delta_{ij} + \Sigma_{ij}$$

$$\Sigma_{ij} = -\langle\rho u_i u_j\rangle + \frac{\partial}{\partial t}\langle\rho u_i \xi_j\rangle + \frac{\partial}{\partial X_k}\langle\rho u_i u_k \xi_j\rangle_k - \frac{\partial}{\partial X_k}\langle\sigma_{ik}\xi_j\rangle_k - \langle F_i\xi_j\rangle$$

причем в дополнительном тензоре Σ_{ij} можно выделить отдельно симметричную и антисимметричную части. Если считать, что микродвижение в объеме V известно, то соотношение (3.4) позволяет вычислить макронапряжения через поверхностные величины (интегралы). Нетрудно видеть, что представление (3.4) существенно отличается от расчетного представления Бэтчелора [2] (если применить последнее для рассматриваемого случая движения однородной жидкости, возмущенного на микроуровне).

4. Укажем теперь принятую интерпретацию макровеличин, фигурирующих в уравнениях баланса (2.1) — (2.5)

$$\langle\rho u_j\rangle_j = \langle\rho\rangle U_j, \quad \langle\rho u_i u_j\rangle_j = -R_{ij} + \langle\rho\rangle U_i U_j, \quad R_{ij} = -\langle\rho v_i v_j\rangle_j \neq -\langle\rho v_i v_j\rangle$$
$$\langle e_{lik}\rho u_i \xi_k\rangle = M_l, \quad \langle e_{lik}\,\rho u_i u_j \xi_k\rangle_j = -\mu_{lj} + M_l U_j$$

где R_{ij} — рейнольдсовы турбулентные напряжения, M_l — внутренний угловой момент, μ_{lj} — турбулентные моментные напряжения. Что касается величин

$$T_{in} = \langle e_{ijk}\,\sigma_{jn}\,\xi_k\rangle_n$$

то их можно интерпретировать как вязкие моментные напряжения, обусловленные пульсациями вязких напряжений на соответствующих гранях объема V.

Введем также обозначения

$$\langle F_i\xi_k\rangle = \Phi_{ik}, \quad \langle\sigma_{ij}\xi_k\rangle_j = \Pi_{ijk}$$
$$\langle\rho u_i\xi_k\rangle = \psi_{ik}, \quad \langle\rho u_i u_j \xi_k\rangle_j = -\mu_{ijk} + \psi_{ik} U_j$$

где, в согласии с представлениями Миндлина [10], Φ_{ik} — двойная массовая сила, ψ_{ik} — собственная дисторсия, Π_{ijk} — вязкие двойные напряжения, μ_{ijk} — турбулентные двойные напряжения.

Теперь соотношение (3.4) принимает вид

$$\langle\sigma_{ij}\rangle_j + R_{ij} = \frac{1}{2} A_{ijkl}\left(\frac{\partial U_k}{\partial X_l} + \frac{\partial U_l}{\partial X_k}\right) - \langle p\rangle \delta_{ij} -$$
$$- \langle\rho v_i v_j\rangle + \frac{\partial\psi_{ij}}{\partial t} + U_l \frac{\partial\psi_{ij}}{\partial X_l} + \frac{\partial\mu_{ilj}}{\partial X_l} - \frac{\partial\Pi_{ilj}}{\partial X_l} - \Phi_{ij}$$

В частном случае отсутствия инерционных и массовых сил получаем

$$\frac{1}{2} A_{ijkl}\left(\frac{\partial U_k}{\partial X_l} + \frac{\partial U_l}{\partial X_k}\right) - \langle p\rangle \delta_{ij} = \frac{\partial\Pi_{ilj}}{\partial X_l} + \langle\sigma_{ij}\rangle_j$$

а это означает, что представление среднего по объему напряжения через поверхностный интеграл ([1], стр. 637) сводится к его равенству сумме макронапряжения и макродивергенции от двойного напряжения. Лишь в отсутствие двойного напряжения (а также инерционных и массовых эффектов) средние по объему и поверхностям напряжения равны между собой. В общем случае они различаются и не только на антисимметричную часть.

Замыкающие связи введенных здесь макротензоров с соответствующими кинематическими макропеременными имеют вид тензорных соотношений. При этом такие величины, как моментные и двойные напряжения, отличны от нуля, если имеются дополнительные [1] кинематические степени свободы (поля) помимо средней поступательной скорости U_i. Выделение подобных величин в случае турбулентной жидкости было дано в работах [8,11]. Характер замыкающих изотропных связей разбирался в работе [12] для симметричных тензоров, а в работе [13] для асимметричных.

Если же принять гипотезу о равенстве средних напряжений по объему и по поверхностям и принять тем самым условие обращения в нуль антисимметричных составляющих тензоров макронапряжений, это будет соответствовать более частному типу замыкающих связей (движений в микромасштабе).

Автор признателен Р. И. Нигматулину за обсуждение результатов.

Поступила 7 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. Изд. 2. М., Гостехиздат, 1953.
2. *Batchelor G. K.* The stress system in a suspension of forcefree particles. J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, pt 3, p. 545—570.
3. *Буевич Ю. А., Марков В. Г.* Континуальная механика монодисперсных суспензий. Интегральные и дифференциальные законы сохранения. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
4. *Nikolaevskii V. N.* Transfer phenomema in fluid-saturated porous media. In: Irreversible aspects of continuum mechanics and Transfer of physical characteristics in moving fluids. Proc. IUTAM Symp. Vienna, 1966. Wien—New York, Springer Verlag, 1968, p. 250—258.
5. *Eringen A. C.* Mechanics of micromorphic continua. In: Mechanics of generalized continua. Proc. IUTAM Symp., Stuttgart, 1967. Berlin— Heidelberg — New York, Springer Verlag, 1968, p. 18—35.
6. *Николаевский В. Н., Басниев К. С., Горбунов А. Т., Зотов Г. А.* Механика насыщенных пористых сред. М., «Недра», 1970.
7. *Афанасьев Е. Ф., Николаевский В. Н.* К построению асимметричной гидродинамики суспензий с вращающимися твердыми частицами. В сб.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. (К 60-летию академика Л. И. Седова) М., «Наука», 1969.

[1] Иногда (см. [10]) дополнительные динамические и кинематические переменные в обобщенной континуальной механике называют микропеременными. Следует иметь в виду, что эти микропеременные (в отличие от упоминаемых в данной заметке) являются уже средними величинами.

8. *Николаевский В. Н.* Асимметричная механика турбулентных потоков. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
9. *Трусделл К.* Этапы развития понятия напряжения. В сб.: Проблемы механики сплошной среды (К 70-летию академика Н. И. Мусхелишвили). М., Изд-во АН СССР, 1961.
10. *Mindlin R. D.* Microstructure in linear elasticity. Arch. Ration. Mech. Analysis, 1964, vol. 16, No. 1, p. 51—78. (Рус. перев.: Механика. Сб. перев., 1964, № 4 (86)).
11. *Николаевский В. Н.* Асимметричная механика турбулентных потоков. Энергия и энтропия. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
12. *Rivlin R. S., Ericksen J. L.* Stress-deformation relations for isotropic materials. J. Rational. Mech. Analysis, 1955, vol. 4, No. 2.
13. *Wang C. C.* A new representation theorem for isotropic functions. Arch. Rational Mech. Analysis, 1970, vol. 36, No. 3.

УДК 532.517.4

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛАХ СЛУЧАЙНОГО ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ВИНТОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Н. В. Дерендяев

(Горький)

Получен класс точных решений для характеристического функционала случайного поля скоростей винтовых движений вязкой несжимаемой жидкости.

Известное решение [1,2] уравнения в вариационных производных для характеристического функционала поля скоростей относится к случаю статистически стационарного поля скоростей в идеальной несжимаемой жидкости и представляет собой гауссовский функционал с постоянной спектральной плотностью энергии.

Для винтовых движений идеальной несжимаемой жидкости, на которые впервые указал Громека [3], скорость и вихрь скорости пропорциональны, т. е.

$$\text{rot } \mathbf{v} = \varkappa \mathbf{v} \tag{1}$$

где $\varkappa$ — псевдоскалярная постоянная с размерностью волнового числа. Позднее Стеклов показал [4], что винтовые решения Громеки удовлетворяют и уравнениям Навье — Стокса, будучи домножены на $\exp(-\nu\varkappa^2 t)$, где ν — кинематическая вязкость, t — время. Винтовые поля скоростей в безграничном пространстве могут быть пространственно-периодическими или убывающими до нуля на бесконечности.

Спектральная форма уравнения (1) имеет вид

$$i\varepsilon_{jlm}\, k_l v_m(\mathbf{k}) = \varkappa v_j(\mathbf{k}) \qquad (i^2 = -1) \tag{2}$$

где ε_{jlm} — тензорная плотность Леви — Чивита. Система уравнений (2) имеет ненулевое решение относительно $v_j(\mathbf{k})$ лишь при условии $\mathbf{k}^2 = \varkappa^2$. Это означает, что выражение для спектральной плотности поля скоростей $v_j(\mathbf{k})$ должно содержать множителем δ-функцию $\delta(k - |\varkappa|)$. Системе (2) удовлетворяет выражение

$$v_j(k) = \left(\Delta_{jn} + i\,\frac{k_l}{\varkappa}\,\varepsilon_{jln}\right) A_n(\mathbf{k})\,\delta(k - |\varkappa|) \tag{3}$$

$$\Delta_{jn} = \delta_{jn} - k_j k_n / k^2$$

где δ_{jn} — единичный тензор, $A_n(\mathbf{k})$ — произвольное векторное поле, удовлетворяющее условию $A_n^*(\mathbf{k}) = A_n(-\mathbf{k})$, которое вытекает из требования вещественности