В разложении $G = G_2 + G_4 + G_6 + \ldots$ величина

$$G_2 + G_4 = {}^1/_2\,(Q_1^2 + Q_2^2) + A\,(P_1^2 + P_2^2)^2 + F\,(Q_3^2 + P_3^2)^2 + \\ + (P_1^2 + P_2^2)\,[B\,(Q_1P_2 - Q_2P_1) + C\,(Q_1^2 + Q_2^2)] + \\ + (Q_3^2 + P_3^2)[D\,(P_1^2 + P_2^2) + E\,(Q_1P_2 - Q_2P_1)]$$

при $A > 0$ и $F > 0$ будет определенно-положительной функцией своих переменных. Отсюда [6] следует формальная устойчивость лагранжевых решений пространственной круговой ограниченной задачи трех тел при критическом соотношении масс основных тел.

В заключение автор благодарит А. П. Маркеева за ценные советы и обсуждение полученных результатов.

Поступила 12 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркеев А. П.* Об устойчивости треугольных лагранжевых решений пространственной ограниченной круговой задачи трех тел. Астрон. ж., 1971, т. 48, вып. 4.
2. *Deprit A., Deprit-Bartholomè A.* Stability of the triangular lagrangian points. Astron. J., 1967, vol. 72, No. 2, p. 73.
3. *Маркеев А. П.* Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
4. *Маркеев А. П.* К задаче об устойчивости лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
5. *Сокольский А. Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных чатот. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
6. *Moser J.* New aspects in the theory of stability of hamiltonian systems. Communs Pure and Appl. Math., 1958, vol. 11, No. 1, p. 81.
7. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.—Л., Гостехиздат, 1941.

УДК 534

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ АСИМПТОТИКЕ МАЛЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е. Я. Журавлева, В. В. Стрыгин

(Куйбышев)

Предлагается достаточно простой для практического применения способ расчета малых автоколебаний систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Коэффициенты соответствующих разложений определяются из линейных алгебраических уравнений.

Детальный анализ задачи о рождении автоколебаний из положения равновесия проведен в работе [1] для систем дифференциальных уравнений на плоскости. Этот результат получил дальнейшее развитие в работах [2–6]. В работах [7–11] задача о рождении автоколебаний исследовалась для систем с запаздыванием. При отыскании автоколебаний естественно искать их разложением по некоторым дробным степеням малого параметра. Для преодоления возникающих при этом трудностей, связанных с неоднозначностью при определении коэффициентов разложений, предложено [11] разбить коэффициенты исходных разложений на две группы; коэффициенты первой группы определяются с точностью до некоторых параметров, нелинейно входящих в уравнения; при анализе уравнений, определяющих вторую группу коэффициентов, нужно уточнить значения параметров первой группы коэффициентов.

Ниже предлагается другой способ отыскания асимптотического разложения автоколебаний и их периодов, при котором коэффициенты асимптотического разложения последовательно и однозначно определяются из рекуррентных линейных соотношений.

1. Пусть R^n — n-мерное евклидово пространство и $B^n(r) = \{x \in R^n : \|x\| < r\}$. Пусть функция $F(x, \varepsilon)$ определена в $B^n(r) \times [0, \varepsilon_0]$ $(\varepsilon_0 > 0)$, аналитична и принимает значения в R^n. Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx / dt = F(x, \varepsilon) \tag{1.1}$$

Предположим, что $F(0, \varepsilon) \equiv 0$ и, следовательно, при всех ε эта система имеет нулевое положение равновесия. Пусть, далее, матрица $A_1 = F_x(0, 0)$ имеет пару чисто мнимых характеристических корней $\pm i$, а остальные характеристические корни лежат в левой комплексной полуплоскости. Обозначим через e_1 и e_2 векторы, для которых $Ae_1 = e_2$, $Ae_2 = -e_1$. Тогда для сопряженной матрицы A_1^* можно указать такие векторы g_1 и g_2, что $A_1^* g_1 = -g_2$, $A_1^* g_2 = g_1$ и $g_i, e_i = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$. Предположим

$$a_1 = {}^1/_2 [(g_1, B_1 e_1) + (g_2, B_1 e_2)] \neq 0, \quad B_1 = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} F_x(0, 0) \tag{1.2}$$

Тогда у матрицы $A_1 + \varepsilon B_1$ при малых ε есть пара характеристических корней $z_{1,2}(\varepsilon) = \alpha(\varepsilon) \pm i\beta(\varepsilon)$, где $\alpha(0) = 0$, $\beta(0) = 1$ и $\alpha'(0) = a_1$. Таким образом, при малых $\varepsilon > 0$ устойчивость нулевого положения равновесия определяется знаком числа a_1.

При $\varepsilon = 0$ линейные члены не определяют устойчивости нулевого положения равновесия. Будем предполагать, что нулевое решение либо асимптотически устойчиво, либо неустойчиво. Следуя работе [6], будем говорить, что при $\varepsilon = 0$ имеет место «смена устойчивостей» нулевого положения равновесия, если при $\varepsilon = 0$ нулевое положение равновесия системы (1.1) асимптотически устойчиво (неустойчиво), а при малых $\varepsilon > 0$ неустойчиво (асимптотически устойчиво). Это определение несколько отличается от обычного (см., например, [1]), однако оно удобно при рассмотрении более широких классов систем уравнений с малым параметром при производной и систем с запаздывающим аргументом.

Как было показано в работах [6,9], при «смене устойчивости» положения равновесия рождается автоколебание.

2. Будем искать асимптотическое разложение этого автоколебания в виде ряда по целым степеням некоторого вспомогательного параметра c, геометрически совпадающего с длиной проекции начального условия x_0 некоторого автоколебания на e_1. Малый параметр ε также будем разлагать в специальный ряд по степеням c. Таким образом, по существу выбираем параметр ε так, чтобы у системы (1.1) существовало автоколебание с заданной проекцией c на вектор e_1. При монотонном изменении ε параметр c также будет меняться монотонно.

Пусть $F(x, \varepsilon) = F_0(x) + \varepsilon F_1(x) + \varepsilon^2 F_2(x) + \ldots$

Составим три формальных ряда

$$\begin{gathered} x(\tau, c) = cx_1(\tau) + c^2 x_2(\tau) + \ldots \\ h(c) = 1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots, \quad \gamma(c) = \gamma_1 c + \gamma_2 c^2 + \ldots \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $x_i(\tau)$ — пока неизвестные 2π-периодические вектор-функции, принимающие значения в R^n; h_i и γ_i — пока неизвестные числа; c — малый положительный параметр. Функции $x_i(\tau)$ в дальнейшем будем выбирать так, чтобы

$$(g_1, x_1(0) - 1 = (g_1, x_{k+1}(0)) = (g_2, x_k(0)) = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{2.2}$$

Ряды (2.1) и целое число $m > 2$ будем определять из формального тождества

$$\begin{gathered} \frac{dx(\tau, c)}{d\tau} \equiv h(c) \{F_0[x(\tau, c)] + \gamma^{m-1}(c) F_1[x(\tau, c)] + \\ + \gamma^{2(m-1)}(c) F_2[x(\tau, c)] + \ldots\} \end{gathered} \tag{2.3}$$

приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях c. Очевидно, $x_1, \ldots, x_{m-1}$ и

$h_1, \ldots, h_{m-2}$ определяются из формального тождества

(2.4) $$dx(\tau, c)/d\tau \equiv h(c) F_0[x(\tau, c)]$$

Пусть $F_0(x) = A_1 x + A_2(x, x) + A_3(x, x, x) + \ldots$, где $A_s(y_1, \ldots, y_s)$ — полилинейные симметрические операторы, действующие из $R^n \times \ldots \times R^n$ в R^n. Тогда для x_1 имеем уравнение

$$dx_1/d\tau = A_1 x_1$$

Это уравнение имеет двупараметрическое семейство 2π-периодических решений $x = c_1\varphi_1(\tau) + c_2\varphi_2(\tau)$, причем можно считать, что $\varphi_1(0) = e_1$, $\varphi_2(0) = e_2$. Из (2.2) следует, что $x_1 = \varphi_1$. Пусть последовательно определены $x_1, \ldots, x_p; h_1, \ldots, h_{p-1}$. Тогда для определения x_{p+1} и h_p имеем уравнение

(2.5) $$dx_{p+1}/d\tau = A_1 x_{p+1} + h_p A_1 x_1 + X_{p+1}(x_1, \ldots, x_p, h_1, \ldots, h_{p-1})$$

Чтобы это уравнение имело 2π-периодическое решение, необходимо и достаточно, чтобы

(2.6) $$\alpha_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(h_p A_1 x_1 + X_{p+1}, \psi_1)\, d\tau = 0$$

(2.7) $$\beta_p = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(h_p A_1 x_1 + X_{p+1}, \psi_2)\, d\tau = 0$$

где ψ_1 и ψ_2 — 2π-периодические решения сопряженной системы $y = -A_1^*, y$, удовлетворяющие условиям $\psi_1(0) = g_1$, $\psi_2(0) = g_2$. Так как $A_1\varphi_1 = -\varphi_2$ и $(\varphi_2, \psi_2) \equiv 1$, то из (2.7) однозначно определяется h_p.

Соотношение (2.6) может как выполняться, так и не выполняться. В первом случае уравнение (2.5) имеет 2π-периодическое решение, которое однозначно определяется из условий (2.2). Во втором случае, когда $\alpha_p \neq 0$, знак α_p определяет устойчивость нулевого положения равновесия системы (1.1) при $\varepsilon = 0$ (см. [12]).

Пусть p — первое число, при котором $\alpha_p \neq 0$. Тогда положим $m = p + 1$ и начиная с этого номера процедуру отыскания $x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots; h_p, h_{p+1}, \ldots; \gamma_1, \gamma_2$ продолжим, используя формальное тождество (2.3).

Представим $F_1(x)$ в виде

$$F_1(x) = B_1 x + B_2(x, x) + \ldots$$

где $B_s(y_1, \ldots, y_s)$ — полилинейные симметрические операторы, действующие из $R^n \times \ldots \times R^n$ в R^n.

Из (2.4) для 2π-периодической функции $x_{p+1}(\tau)$ имеем уравнение

(2.8) $$dx_{p+1}/d\tau = A_1 x_{p+1} + h_p A_1 x_1 + \gamma_1{}^p B_1 x_1 + X_{p+1}(x_1, \ldots, x_p, h_1, \ldots, h_{p-1})$$

Простой подсчет показывает, что

$$\int_0^{2\pi}(B_1\varphi_1, \psi_1)\, d\tau = 2\pi a_1, \qquad \int_0^{2\pi}(A_1\varphi_1, \psi_1)\, d\tau = 0$$

где a_1 определено из (1.2). Поэтому уравнение (2.8) имеет 2π-периодическое решение, если

$$a_1\gamma_1{}^p + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(X_{p+1}, \psi_1)\, d\tau = 0$$

$$h_p + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[(X_{p+1}, \psi_2) + (B_1\varphi_1, \psi_2)\gamma_1{}^p]\, d\tau = 0$$

Из первого соотношения определяем $\gamma_1 = (-\alpha_p / a_1)^{1/p}$, а из второго h_p. Из (2.8) однозначно определяется x_{p+1} с учетом, конечно, ограничения (2.2).

Пусть последовательно определены $x_{p+1}, \ldots, x_{p+s-1}; h_p, \ldots, h_{p+s-2}; \gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}$. Простой подсчет показывает, что для определения $x_{p+s}, h_{p+s-1}, \gamma_s$ получим систему

$$dx_{p+s}/d\tau = A_1 x_{p+s} + h_{p+s-1} A_1 x_1 + p\gamma_1^{p-1}\gamma_s B_1 x_1 + \\ + X_{p+s}(x_1, \ldots, x_{p+s-1}; h_1, \ldots, h_{p+s-2}; \gamma_1, \ldots, \gamma_{s-1}) \tag{2.9}$$

Так как $\gamma_1 \neq 0$, то из условия существования 2π-периодического решения системы (2.9) можно определить γ_s и h_{p+s-1}, а затем и x_{p+s} (причем однозначно).

Таким образом, процедура определения $x_i, h_{i-1}, \gamma_{i-p}$ может быть предложена до любого целого $k > 0$.

3. Пусть теперь имеем некоторое конкретное $\varepsilon > 0$ и хотим определить автоколебание с точностью до $\varepsilon^{k/p}$ (k — целое число). Построим по указанной процедуре $x_i, h_{i-1}, \gamma_{i-p}$ ($i = 1, \ldots, k$) и положим

$$x_k(\tau, c) = \sum_{i=1}^{k} c^i x_i(\tau), \quad h_k(c) = 1 + \sum_{i=1}^{k} c^i h_i, \quad \gamma_k(c) = \sum_{i=1}^{k-p} c^i \gamma_i$$

Далее, определим методом неопределенных коэффициентов функцию $c = c(\varepsilon^{1/p})$ как решение уравнения $\gamma_k(c) = \varepsilon^{1/k}$. Положим, наконец,

$$x_k^*(t, \varepsilon) = x_k[t/h(c(\varepsilon^{1/p})), c(\varepsilon^{1/p})]$$

Получим приближенное автоколебание с точностью до $\varepsilon^{k/p}$.

Для обоснования этой процедуры заметим, что для системы (1.1) существует единственное автоколебание $x(t, \varepsilon)$, которое разлагается вместе со своим периодом $T(\varepsilon)$ в асимптотический ряд по дробным степеням параметра ε

$$x(t, \varepsilon) = x_1(t)\varepsilon^{1/p} + x_2(t)\varepsilon^{2/p} + \ldots, \qquad T(\varepsilon) = 2\pi + T_1\varepsilon^{1/p} + T_2\varepsilon^{2/p} + \ldots$$

на каждом конечном промежутке $0 \leqslant t \leqslant \Delta$, причем это решение удовлетворяет условиям $(g_1, x(0, \varepsilon)) = (-a_1/\alpha_p)\varepsilon^{1/p} + o(\varepsilon^{1/p})$, $(g_2, x(0, \varepsilon)) = 0$. (Это утверждение фактически установлено в [6].) Если теперь положить $c = (g_1, x(0, \varepsilon))$, то $\varepsilon^{1/p} = \gamma_1 c + \gamma_2 c^2 + \ldots$ и решение $x(t, \varepsilon)$ и период $T(\varepsilon)$ могут быть однозначно определены рядами

$$x(\tau, c) = x_1^*(\tau)c + x_2(\tau)c^2 + \ldots$$

$$T(c) = 2\pi(1 + h_1 c + h_2 c^2 + \ldots), \qquad \tau = t/(1 + h_1 c + \ldots)$$

где $x_i(\tau)$ — 2π-периодические функции, удовлетворяющие условиям (2.2). Эти разложения и получены описанным выше способом.

Пример. Рассмотрим уравнение (штрих означает производную по t)

$$x'' + \varepsilon x' + x - \beta x^2 + \alpha x'^3 = 0 \tag{3.1}$$

и найдем малое автоколебание с точностью до $o(\varepsilon)$. С этой целью сделаем замену $t = H\tau$ и будем искать $x(\tau)$ в виде

$$x(\tau) = x_1(\tau)c + x_2(\tau)c^2 + x_3(\varepsilon)c^3 + \ldots$$

где $x_i(\tau)$ — 2π-периодические функции. Положим

$$H = 1 + h_2 c^2 + h_3 c^3 + \ldots, \qquad \varepsilon = (\gamma_1 c + \gamma_2 c^2 + \ldots)^{m-1}$$

где h_i и γ_i — пока неизвестные коэффициенты. Простой подсчет показывает, что (точка означает производную по τ)

$$Hx^{\cdot\cdot} = x_1^{\cdot\cdot}c + x_2^{\cdot\cdot}c^2 + (x_3^{\cdot\cdot} + h_2x_1^{\cdot\cdot})\,c^3 + (x_4^{\cdot\cdot} + h_2x_2^{\cdot\cdot} + h_3x_1^{\cdot\cdot})\,c^4 + \ldots$$

$$Hx^{\cdot} = cx_1^{\cdot} + c^2x_2^{\cdot} + \ldots$$

$$H^3x = x_1c + x_2c^2 + (3h_2x_1 + x_3)\,c^3 + (x_4 + 3h_2x_2 + 3h_3x_1)\,c^4 + \ldots$$

$$H^3x^2 = x_1^2c^2 + 2x_1x_2c^3 + (3h_2x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2^2)\,c^4 + \ldots$$

$$x^{\cdot 3} = x_1^{\cdot 3}c^3 + 3x_1^{\cdot 2}x_2^{\cdot}c^4 + \ldots$$

Подставим найденные выражения в уравнение, полученное из (3.1) заменой t и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях c. Для x_1 получаем уравнение $x_1^{\cdot\cdot} + x_1 = 0$. Отсюда вытекает, что $x_1 = \cos\tau$. Далее, $x^{\cdot\cdot}_2 + x_2 = \beta\cos^2\tau$. Отсюда с учетом условия $x_2(0) = x_2^{\cdot}(0) = 0$ получаем

$$x_2(\tau) = {}^1/_6\,\beta\,(3 - 2\cos\tau - \cos 2\tau)$$

Подсчет показывает, что в данном примере $m = 3$.

Приравнивая коэффициенты при третьей степени c, получаем уравнение для x_3

$$x_3^{\cdot\cdot} + x_3 = \gamma_1^2\sin\tau - 2h_2\cos\tau + \beta/3^2\cos\tau\,(3 - 2\cos\tau - \cos 2\tau) + \alpha\sin^3\tau$$

Из условия существования 2π-периодического решения этого уравнения имеем

$$\gamma_1 = {}^1/_2\sqrt{-3\alpha}, \qquad h_2 = {}^5/_{12}\beta^2$$

Можно убедиться, что x_3 имеет вид

$$x_3 = a_0 + a_1\cos\tau + b_1\sin\tau + a_2\cos 2\tau + a_3\cos 3\tau + b_3\sin 3\tau$$

Наконец, приравнивая коэффициенты при c^4, получаем

$$x_4^{\cdot\cdot} + x_4 = -h_2x_2^{\cdot\cdot} - h_3x_1^{\cdot\cdot} - \gamma_1^2x_2^{\cdot} - 2\gamma_1\gamma_2x_1^{\cdot} - 3h_2x_2 - 3h_3x_1 + {}$$
$$+\beta\,(3h_2x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2^2) - 3\alpha x_1^{\cdot 2}x^{\cdot}_2$$

Из условия ортогональности функции $\sin\tau$ и правой части последнего уравнения получаем $-{}^1/_6\gamma_1^2 + \gamma_1\gamma_2 = {}^3/_8\alpha\beta$. Отсюда следует, что $\gamma_2 = -{}^1/_6\beta\sqrt{-3\alpha}$.

Из соотношения $\varepsilon^{1/2} = \gamma_1c + \gamma_2c^2 + \ldots$ вытекает, что

$$c = \sigma_1\varepsilon^{1/2} + \sigma_2\varepsilon + \ldots, \qquad \sigma_1 = -2\sqrt{-3\alpha}\,/\,3\alpha, \qquad \sigma_2 = -4\beta\,/\,9\alpha$$

Поэтому имеем

$$x = -\frac{2\varepsilon^{1/2}\cos\tau}{\sqrt{-3\alpha}} - \frac{2\beta\varepsilon}{3\alpha}\left(1 - \frac{1}{3}\cos 2\tau\right) + \ldots, \qquad \tau = \frac{t}{1 - 5\beta^2\varepsilon/9\alpha + \ldots}$$

Указанная здесь процедура может быть обобщена на системы сингулярно возмущенных уравнений [6]. Ее можно использовать и при расчете автоколебаний систем с запаздывающим аргументом.

Поступила 8 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Андронов А. А., Леонтович Е. А.* Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметров. Уч. зап. Горьковск. ун-та, 1939, вып. 6.
2. *Hopf E.* Berlin. Sähs. Acad. Wiss., Leipzig, Math. Phis., kl., 94, Nr 19, 1972.
3. *Неймарк Ю. И.* Методы точечных отображений в теории нелинейных колебаний. Изв. вузов. Радиофизика, 1958, № 5—6.
4. *Брушлинская Н. Н.* Качественное интегрирование одной системы дифференциальных уравнений в области, содержащей особую точку и предельный цикл. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 1.
5. *Chafee N.* The bifurcation of one or more closed orbits from an equilibrium point of an autonomous differential systems. J. Diff. Equat., 1968, vol. 4.
6. *Стрыгин В. В.* «Смена устойчивостей» и бифуркация малых автоколебаний системы дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 1.

7. *Чефи Н.* Проблема бифуркации для дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа. Тр. V Междунар. конф. по нелинейным колебаниям, т. 1. Киев, Изд. Ин-та математики АН УССР, 1970.
8. *Стрыгин В. В.* Бифуркация автоколебаний в системах функциональных уравнений. Тр. матем. фак. Воронежск. ун-та, 1971, вып. 4.
9. *Стрыгин В. В.* Бифуркация малых автоколебаний сингулярно возмущенных систем запаздывающего типа. Тр. НИИ матем. Воронежск. ун-та, 1972, вып. 5.
10. *Неймарк Ю. И., Фишмен Л. З.* Структура фазового пространства квазилинейных дифференциальных уравнений нейтрального типа. Изв. вузов. Радиофизика, 1972, т. 15. № 11.
11. *Колесов Ю. С.* Расчет автоколебаний нелинейных дифференциальных уравнений с последействием, ответвляющихся от нулевого состояния равновесия. Вестн. Ярославск. ун-та, 1973, № 2.
12. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.

УДК 532.5

ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ И ОСРЕДНЕНИЕ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

В. Н. Николаевский

(Москва)

При переходе от уравнений движения, справедливых в микромасштабе, к макроуравнениям, описывающим движение сложных сред (таких, как турбулизованная жидкость, упругая среда с микродефектами, суспензии газовых пузырьков или твердых частиц в жидкости и т. п.), возникает проблема определения среднего напряжения и других макропеременных. В монографии [1] вводилось среднее по объему значение тензора напряжений и именно эта величина использовалась в определяющих связях для подсчета эйнштейновской вязкости суспензий. Кроме того, при конкретных вычислениях этих средних по объему значений использовалось некоторое эффективное представление через интегралы по поверхностям [1]. В дальнейшем Бэтчелор [2], а вслед за ним и некоторые другие авторы [3], предполагая эквивалентность осреднения по объему и поверхностям, использовали именно эти средние по объему значения в качестве напряжений в макроуравнениях движения. Отсюда, в частности, непосредственно следует обязательная симметричность тензора макронапряжений в указанных выше случаях.

В данной работе показано, что осреднение по объему тензора микронапряжений и микропотока импульсов согласно правилу [1] определяет лишь некоторую симметричную часть полного тензора макронапряжений. Для простого случая вязкой жидкости, неоднородно движущейся на микроуровне, этот средний по объему тензор линейно связан со средними скоростями деформаций. Более того, именно представление, использованное в работе [1], позволяет выявить существенное в общем случае различие между средними по объему и по поверхностям напряжениями.

Метод интегрирования по объему микроуравнений [4−6] естественно приводит к появлению в макроуравнениях напряжений, средних по дифференциальным макроплощадкам. Существенно, что при этом тензор макронапряжений, вообще говоря, несимметричен, хотя в микромасштабе уравнения движения соответствуют симметричной континуальной механике. Именно это соображение позволило развить континуальные уравнения движения суспензии, отражающие эффект неравновесного собственного вращения взвешенных частиц [7], а случаю турбулизованной жидкости с анизотропией вихревого характера поставить в соответствие ненулевую антисимметричную часть напряжений Рейнольдса [8].