Доказательство второй части теоремы основано на результатах работы [2].

Поступила 14 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С.* Линейная дифференциальная игра убегания. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1971, т. 112.
2. *Мезенцев А. В.* Прямой метод в линейных дифференциальных играх с разными ограничениями. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 2.

УДК 531.31

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАГРАНЖЕВЫХ РЕШЕНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ ПРИ КРИТИЧЕСКОМ СООТНОШЕНИИ МАСС

А. Г. Сокольский

(Москва)

Для плоского и пространственного движений доказывается формальная устойчивость лагранжевых решений круговой ограниченной задачи трех тел при критическом соотношении масс основных тел.

1. Рассмотрим движение трех материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. Уравнения движения задачи допускают частные решения, соответствующие движению, при котором три тела образуют равносторонний треугольник, вращающийся в своей плоскости вокруг центра масс системы трех тел. Исследуем устойчивость этих решений для случая круговой ограниченной задачи при критическом соотношении масс основных тел.

Пусть единицы измерения выбраны так, что угловая скорость вращения основных притягивающих тел, расстояние между ними, сумма их масс и постоянная тяготения равны единице. В этих единицах масса меньшего из притягивающих тел равна μ. Функцию Гамильтона круговой ограниченной задачи трех тел вблизи треугольного решения L_4 разложим в ряд [1] и представим в виде (H_m — полином степени m от координат q_i и импульсов p_i, $i = 1, 2, 3$)

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots \tag{1.1}$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_2 p_1 - q_1 p_2 + \frac{1}{8} q_1^2 - k q_1 q_2 - \frac{5}{8} q_2^2 + \frac{1}{2}(q_3^2 + p_3^2)$$

$$H_3 = \frac{\sqrt{3}}{144}(-28kq_1^3 + 27q_1^2 q_2 + 132kq_1q_2^2 + 27q_2^3 - 48kq_1q_3^2 - 108q_2q_3^2)$$

$$H_4 = \frac{1}{384}(111q_1^4 + 400kq_1^3q_2 - 738q_1^2q_2^2 - 720kq_1q_2^3 - 9q_2^4 +$$

$$+ 72q_1^2q_3^2 + 960kq_1q_2q_3^2 + 792q_2^2q_3^2 - 144q_3^4), \qquad k = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)$$

Остановимся сначала на случае плоского движения. Частоты ω_1 и ω_2 ($\omega_1 \geqslant \omega_2$) колебательной системы с гамильтонианом $H_2(q_1, q_2, p_1, p_2)$ удовлетворяют уравнению

$$\omega_4 - \omega^2 + {}^{27}/_4\, \mu(1 - \mu) = 0$$

Область устойчивости в первом приближении записывается в виде неравенств

$$0 < \mu < (9 - \sqrt{69}) / 18 \simeq 0.0385208\ldots \tag{1.2}$$

В работах [2,3] показано, что лагранжевы решения плоской круговой ограниченной задачи трех тел устойчивы при всех значениях μ из области (1.2), кроме двух, при которых имеет место неустойчивость. Эти значения μ_1 и μ_2 параметра μ соответствуют резонансам третьего и четвертого порядков

$$\mu_1 = (45 - \sqrt{1833}) / 90 \simeq 0.0242938\ldots, \quad \omega_1 = 2\omega_2 = 2\sqrt{5}/5$$

$$\mu_2 = (15 - \sqrt{213}) / 30 \simeq 0.0135160\ldots, \quad \omega_1 = 3\omega_2 = 3\sqrt{10}/10$$

Открытым остается вопрос об устойчивости при граничных значениях μ области (1.2). При $\mu = 0$ вопрос решается просто, так как задача сводится к исследованию устойчивости движения материальной точки вокруг неподвижного притягивающего центра, а для такого движения, как известно, имеет место лишь орбитальная устойчивость. Исследование устойчивости при $\mu = \mu^* = (9 - \sqrt{69}) / 18$ (критическое соотношение масс основных тел) представляет собой известную трудность, так как при этом значении параметра μ частоты линейной задачи равны, а линейная система неустойчива. Устойчивость лагранжевых решений при $\mu = \mu^*$ исследуется в п. 2.

Устойчивость лагранжевых решений в пространственном случае исследовалась в работах [1,4]. Как и в плоском случае, при $\mu = \mu^*$ никаких заключений об устойчивости лагранжевых решений до сих пор не делалось. Этот вопрос рассматривается в п. 3.

2. Рассмотрим вопрос об устойчивости лагранжевых решений плоской задачи при критическом соотношении масс основных тел ($\mu = \mu^*$).

Устойчивость положения равновесия автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных частот ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) линейной задачи исследована в работе [5]. Рассмотрены случаи простых и непростых элементарных делителей характеристической матрицы. Для случая непростых элементарных делителей в [5] найдена вещественная нормальная форма линейной задачи, а также указан конструктивный путь нахождения нормализующего линейного канонического преобразования N. Показано также, что при помощи нелинейной канонической замены переменных функцию Гамильтона можно привести к виду

$$\begin{aligned} H = {}^1/_2\,(Q_1^2 + Q_2^2) + \omega\,(Q_1P_2 - Q_2P_1) + \\ + (P_1^2 + P_2^2)\,[A\,(P_1^2 + P_2^2) + B\,(Q_1P_2 - Q_2P_1) + C\,(Q_1^2 + Q_2^2)] + H_5 + \ldots \end{aligned} \tag{2.1}$$

и доказано, что если $A > 0$, то имеет место формальная устойчивость [6] положения равновесия $Q_1 = Q_2 = P_1 = P_2 = 0$, а если $A < 0$, то неустойчивость по Ляпунову.

В задаче устойчивости лагранжевых решений при $\mu = \mu^*$ характеристическая матрица линейной системы имеет непростые элементарные делители, а ее собственные числа равны $\pm i\sqrt{2}/2$. Линейное вещественное каноническое преобразование $\mathbf{q} = N\mathbf{q}^*$, где

$$\mathbf{q} = \begin{Vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ p_1 \\ p_2 \end{Vmatrix}, \quad N = \begin{Vmatrix} \frac{43\sqrt{10}}{100} & -\frac{\sqrt{115}}{50} & -\frac{\sqrt{230}}{10} & -\frac{3\sqrt{5}}{10} \\ -\frac{\sqrt{230}}{100} & \frac{\sqrt{5}}{50} & -\frac{\sqrt{10}}{10} & \frac{\sqrt{115}}{10} \\ \frac{\sqrt{230}}{100} & -\frac{3\sqrt{5}}{20} & -\frac{\sqrt{10}}{4} & 0 \\ \frac{17\sqrt{10}}{50} & -\frac{11\sqrt{115}}{100} & -\frac{\sqrt{230}}{20} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{q}^* = \begin{Vmatrix} q_1^* \\ q_2^* \\ p_1^* \\ p_2^* \end{Vmatrix}$$

приводит квадратичную часть функции Гамильтона плоской круговой ограниченной задачи трех тел к нормальному виду. Проделав затем все вычисления по формулам работы [5], функцию Гамильтона можно привести к виду (2.1); при этом $A = 0.603\ldots > 0$. Следовательно, при критическом соотношении масс основных тел лагранжевы решения плоской круговой ограниченной задачи трех тел формально устойчивы.

3. Рассмотрим теперь пространственную задачу при критическом соотношении масс. Здесь $\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{2}/2$, $\omega_3 = 1$. Линейным вещественным каноническим преобразованием приведем квадратичную часть H_2 функции Гамильтона (1.1) к нормальному вещественному виду. Для этого переменные плоского движения преобразуем с помощью матрицы N из п. 2, а переменные q_3, p_3 оставим без изменения. Тогда функция Гамильтона (1.1) примет вид

$$H = \frac{1}{2}(q_1^{*2} + q_2^{*2}) + \frac{\sqrt{2}}{2}(q_1^* p_2^* - q_2^* p_1^*) + \frac{1}{2}(q_3^2 + p_3^2) + \tag{3.1}$$
$$+ \sum_{\nu=3}^{\infty} h_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4\nu_5} q_1^{*\nu_1} q_2^{*\nu_2} p_1^{*\nu_3} p_2^{*\nu_4} q_3^{\nu_5}, \quad \nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5$$

где нужные в дальнейшем коэффициенты таковы

$$h_{10002} = -\frac{\sqrt{3}}{12}(\sqrt{23} n_{11} + 9n_{21}), \quad h_{01002} = -\frac{\sqrt{3}}{12}(\sqrt{23}\, n_{12} + 9n_{22})$$
$$h_{00102} = -\frac{\sqrt{3}}{12}(\sqrt{23}\, n_{13} + 9n_{23}), \quad h_{00012} = -\frac{\sqrt{3}}{12}(\sqrt{23}\, n_{14} + 9n_{24})$$
$$h_{00004} = -\frac{3}{8}$$

Как и в [5], применив преобразование Биркгофа [7], члены третьего порядка относительно координат и импульсов в (3.1) можно уничтожить полностью, а члены четвертого порядка упростить. Функцию Гамильтона (3.1) приведем к виду

$$H = {}^1/_2 (Q_1^2 + Q_2^2) + \sqrt{2}/2\,(Q_1P_2 - Q_2P_1) + {}^1/_2 (Q_3^2 + P_3^2) +$$
$$+ (P_1^2 + P_2^2)\,[A\,(P_1^2 + P_2^2) + B\,(Q_1P_2 - Q_2P_1) + C\,(Q_1^2 + Q_2^2)\,] +$$
$$+ (Q_3^2 + P_3^2)\,[D\,(P_1^2 + P_2^2) + E\,(Q_1P_2 - Q_2P_1) +$$
$$+ F\,(Q_3^2 + P_3^2)] + H_5 + \ldots$$
$$F = \left[\frac{1}{2(2-\omega)} - \frac{1}{2(2+\omega)} + \frac{2}{\omega}\right][h_{10002}h_{00102} - h_{01002}h_{00012}] +$$
$$+ \left[\frac{1}{4(2-\omega)^2} + \frac{1}{4(2+\omega)^2} + \frac{1}{\omega^2}\right][h_{00102}^2 + h_{00012}^2] + \frac{3}{8} h_{00004}$$

Подставляя численные значения, находим $F = 9.660\ldots$, а коэффициент A подсчитан в п. 2.

Докажем формальную устойчивость лагранжевых решений в пространственном случае. Можно показать, что при помощи бесконечного числа шагов преобразования Биркгофа (возможно расходящегося) функцию Гамильтона приведем к виду

$$H = \frac{1}{2}(Q_1^2 + Q_2^2) + \frac{\sqrt{2}}{2}(Q_1P_2 - Q_2P_1) + \frac{1}{2}(Q_3^2 + P_3^2) + \tag{3.2}$$
$$+ \sum_{\alpha=2}^{\infty} a_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4} (Q_1^2 + Q_2^2)^{\alpha_1} (P_1^2 + P_2^2)^{\alpha_2} (Q_1P_2 - Q_2P_1)^{\alpha_3} (Q_3^2 + P_3^2)^{\alpha_4}$$
$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

где α_i — целые неотрицательные числа.

Как легко проверить, каноническая система с гамильтонианом (3.2) имеет три формальных интеграла

$$H = \text{const}, \quad (Q_1P_2 - Q_2P_1) = \text{const}, \quad (Q_3^2 + P_3^2) = \text{const}$$

Следовательно, функция

$$G \equiv H - \sqrt{2}/2\,(Q_1P_2 - Q_2P_1) - {}^1/_2 (Q_3^2 + P_3^2)$$

также будет формальным интегралом системы с гамильтонианом (3.2).

В разложении $G = G_2 + G_4 + G_6 + \ldots$ величина

$$G_2 + G_4 = {}^1/_2\,(Q_1^2 + Q_2^2) + A\,(P_1^2 + P_2^2)^2 + F\,(Q_3^2 + P_3^2)^2 + \\ + (P_1^2 + P_2^2)\,[B\,(Q_1P_2 - Q_2P_1) + C\,(Q_1^2 + Q_2^2)] + \\ + (Q_3^2 + P_3^2)[D\,(P_1^2 + P_2^2) + E\,(Q_1P_2 - Q_2P_1)]$$

при $A > 0$ и $F > 0$ будет определенно-положительной функцией своих переменных. Отсюда [6] следует формальная устойчивость лагранжевых решений пространственной круговой ограниченной задачи трех тел при критическом соотношении масс основных тел.

В заключение автор благодарит А. П. Маркеева за ценные советы и обсуждение полученных результатов.

Поступила 12 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Маркеев А. П.* Об устойчивости треугольных лагранжевых решений пространственной ограниченной круговой задачи трех тел. Астрон. ж., 1971, т. 48, вып. 4.
2. *Deprit A., Deprit-Bartholomè A.* Stability of the triangular lagrangian points. Astron. J., 1967, vol. 72, No. 2, p. 73.
3. *Маркеев А. П.* Об устойчивости неавтономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
4. *Маркеев А. П.* К задаче об устойчивости лагранжевых решений ограниченной задачи трех тел. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
5. *Сокольский А. Г.* Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае равных чатот. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
6. *Moser J.* New aspects in the theory of stability of hamiltonian systems. Communs Pure and Appl. Math., 1958, vol. 11, No. 1, p. 81.
7. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.—Л., Гостехиздат, 1941.

УДК 534

ЗАМЕЧАНИЕ ОБ АСИМПТОТИКЕ МАЛЫХ АВТОКОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Е. Я. Журавлева, В. В. Стрыгин

(Куйбышев)

Предлагается достаточно простой для практического применения способ расчета малых автоколебаний систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Коэффициенты соответствующих разложений определяются из линейных алгебраических уравнений.

Детальный анализ задачи о рождении автоколебаний из положения равновесия проведен в работе [1] для систем дифференциальных уравнений на плоскости. Этот результат получил дальнейшее развитие в работах [2–6]. В работах [7–11] задача о рождении автоколебаний исследовалась для систем с запаздыванием. При отыскании автоколебаний естественно искать их разложением по некоторым дробным степеням малого параметра. Для преодоления возникающих при этом трудностей, связанных с неоднозначностью при определении коэффициентов разложений, предложено [11] разбить коэффициенты исходных разложений на две группы; коэффициенты первой группы определяются с точностью до некоторых параметров, нелинейно входящих в уравнения; при анализе уравнений, определяющих вторую группу коэффициентов, нужно уточнить значения параметров первой группы коэффициентов.

Ниже предлагается другой способ отыскания асимптотического разложения автоколебаний и их периодов, при котором коэффициенты асимптотического разложения последовательно и однозначно определяются из рекуррентных линейных соотношений.