УДК 62—50

О ЗАДАЧЕ УБЕГАНИЯ С РАЗНОТИПНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

А. В. Мезенцев

(Москва)

Рассматривается линейная задача убегания, в которой управление преследующего игрока ограничено по энергии, а убегающего игрока — по модулю. Множество окончания игры определяется равенством геометрических координат игроков. Получены достаточные условия возможности уклонения от встречи из любой точки фазового пространства, не принадлежащей множеству окончания игры, и достаточные условия существования открытого множества в фазовом пространстве, из любой точки которого можно закончить игру за конечное время.

Пусть в пространстве R^n $(n \geqslant 2)$ движение преследующего вектора x и убегающего вектора y описывается уравнениями

$$x^{(p)} + a_1 x^{(p-1)} + \ldots + a_{p-1} x^{\cdot} = u, \quad x \in R^n \tag{1}$$

$$y^{(q)} + b_1 y^{(q-1)} + \ldots + b_{q-1} y^{\cdot} = v, \quad y \in R^n$$

$$\int_0^\infty (u \cdot u)\, ds \leqslant \rho^2, \quad \rho > 0; \quad |v| \leqslant \sigma, \quad \sigma > 0 \tag{2}$$

Здесь $a_1, \ldots, a_{p-1}, b_1, \ldots, b_{q-1}$ — действительные числа, u, v — управляющие векторы, которые выбираются в классе измеримых вектор-функций, удовлетворяющих ограничениям (2). Такие управления будем называть допустимыми.

Преследование считается законченным в момент t_1, если в этот момент впервые выполнено равенство $x(t_1) = y(t_1)$.

Будем говорить, что из точки

$$z_0 = x(0), \ldots, x^{(p-1)}(0), y(0), \ldots, y^{(q-1)}(0) \in R^{n(p+q)}$$

возможно уклонение от встречи, если в каждый момент t можно так выбрать управление убегающего $v(t)$, что ни при каком значении t не будет выполнено равенство $x(t) = y(t)$.

Предполагается, что при формировании управления $v(t)$ убегающий знает векторы $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, уравнения (1), ограничения (2). Кроме того, в каждый момент t предполагается известным ресурс управления преследователя, т. е.

$$\rho^2(t) = \rho^2 - \int_0^t (u \cdot u)\, ds$$

Введем следующие обозначения: π — оператор ортогонального проектирования из пространства R на какое-либо фиксированное подпространство R^2, $\xi(t) \equiv \pi\Delta(t) \equiv \pi(x(t) - y(t))$. Модуль вектора $(x^{\cdot}(t), \ldots, x^{(p-1)}(t), y^{\cdot}(t), \ldots, y^{(q-1)}(t))$ будем обозначать через $\eta(t)$, $\chi(t) \equiv (1 - \eta(t))^{-1}$, а интегрирование по s от 0 до t — угловыми скобками $(\langle g(s) \rangle)$.

Теорема. Если $p > q$, то из любой точки z_0 $(\Delta(0) \neq 0)$ возможно уклонение от встречи, причем уклонение можно вести таким образом, что имеет место следующая оценка.

Если $p > q$, то существуют три положительные константы Θ_0, ε_0, c, зависящие только от уравнений (1) и условий (2), неубывающая последовательность ε_k и последовательность $T_k \to +\infty$, зависящие от процесса уклонения

а) $|\Delta(t)| \geqslant \varepsilon_0, \quad t \in [0, T_1]$; если $|\Delta(0)| > \varepsilon_0$

б) $|\Delta(t)| > c(|\Delta(0)|\, \chi(t))^q, \quad t \in [0, T_1]$; если $|\Delta(0)| \leqslant \varepsilon_0$

в) $|\Delta(t)| > c(\varepsilon_{k-1}\, \chi(t))^q, \quad t \in [T_k, T_{k+1}]$

Если $p \leqslant q$, то существует открытое множество в пространстве $R^{n(p+q)}$, из любой точки которого преследование может быть завершено за конечное время.

Доказательство. Пусть в момент T_k вектор $z(T_k)$ такой, что $\Delta(T_k) = 0$, $\rho^2(T_k) > 0$.

1°. При любых допустимых управлениях $u(t)$, $v(t) \equiv v_k$, заданных на отрезке $[0, M]$

$$\xi(T_k + t) = \pi(\varphi_1(t, T_k) - \varphi_2(t, T_k)) - \pi(v_k - h(t))\langle\mu_{q-1}(s)\rangle$$

$$\varphi_1(t, T_k) = \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_i(t)\, x^{(i)}(T_k), \quad \varphi_2(t, T_k) = \sum_{i=0}^{q-1} \mu_i(t)\, y^{(i)}(T_k)$$

где $\gamma_i(t)$, $\mu_i(t)$ — решения уравнений (δ_{il} — символ Кронекера)

$$\gamma^{(p)} + a_1\gamma^{(p-1)} + \ldots + a_{p-1}\gamma^{\cdot} = 0, \quad \gamma_i^{(l)}(0) = \delta_{il} \tag{3}$$

$$\mu^{(q)} + b_1\mu^{(q-1)} + \ldots + b_{q-1}\mu^{\cdot} = 0, \quad \mu_i^{(l)}(0) = \delta_{il}$$

$$|h(t)| < c\rho(T_k)\, t^{p-q-1/2} \tag{4}$$

(c зависит лишь от решений уравнений (3)). Число M определяется из условия $\langle\mu_{q-1}(s)\rangle > 0$ при $t \in [0, M]$.

Пусть на отрезке $[0, M]$ заданы допустимые управления $u(t)$, v_k, тогда по формуле Коши

$$x(T_k + t) = \varphi_1(t, T_k) + \langle\gamma_{p-1}(s)u(t-s)\rangle$$

$$y(T_k + t) = \varphi_2(t, T_k) + \langle\mu_{q-1}(s)\rangle v_k$$

После проектирования на R^2 получаем равенство

$$\xi(T_k + t) = \varphi(t, T_k) - \pi(v_k - \langle\gamma_{p-1}(s)\, u(t-s)\rangle\langle\mu_{q-1}(s)\rangle^{-1})\langle\mu_{q-1}(s)\rangle$$

$$\varphi(t, T_k) = \pi(\varphi_1(t, T_k) - \varphi_2(t, T_k))$$

Очевидно, что при $t \in [0, M]$

$$|t^q\langle\mu_{q-1}(s)\rangle| < c_1$$

Применяя неравенство Коши — Буняковского, получаем, что для функции

$$h(t) = \langle\gamma_{p-1}(s)u(t-s)\rangle\langle\mu_{q-1}(s)\rangle^{-1}$$

справедливо неравенство (4).

2°. Пусть Σ — конечномерное линейное семейство функций, аналитических на отрезке $[0, M]$, Γ — квадрат, определяемый неравенствами $|r^i| \leqslant b$, $i = 1, 2$. Существует тогда такое положительное число ν, что для любого $\Psi(t) = (\Psi^1(t), \Psi^2(t))$, компоненты которого принадлежат Σ, найдется такой квадрат $\Gamma' \subset \Gamma$ со стороной 2λ, что точка

$$\xi(T_k + t) = \Psi(t) - \alpha\langle\mu_{q-1}(s)\rangle \tag{5}$$

при $t \in [0, M]$, $\alpha \in \Gamma'$ удовлетворяет условию $|\xi(T_k + t)| \geqslant \nu t^q$.

Доказательство этого легко получается с использованием результата пункта B) (см. [1]).

3°. Пусть в некоторый момент T_k $|\xi(T_k)| \neq 0$, тогда существуют число Θ_k и управление $v(t) \equiv v_k$, такие, что при любом допустимом управлении $u(t)$ при $t \in [0, \Theta_k]$ выполняется неравенство

$$|\xi(T_k + t)| > \nu t^q \tag{6}$$

Рассмотрим множество $Q = \{\pi v, |v| \leqslant \sigma\}$. Очевидно, что Q — круг радиуса σ с центром в начале координат пространства R^2. Впишем в круг квадрат Γ и рассмотрим в пространстве R^2 кривую (5), где $\Psi(t) \equiv \varphi(t, T)$. Пусть квадрат $\Gamma' \subset \Gamma$ выбран,

согласно 2°, тогда полагаем

$$\theta_k = \inf\left(\left(\frac{\lambda}{c\rho(T_k)}\right)^{1/(p-q-1/2)}, M\right) \tag{7}$$

а управление $v(t)$ при $t \in [0, \theta_k]$ полагаем равным постоянному вектору $|v_k| < \sigma$, такому, что πv_k — центр квадрата Γ'. В этом случае при $t \in [0, \theta_k]$

$$\xi(T_k + t) = \varphi(t, T_k) - \alpha(t)\langle\mu_{q-1}(s)\rangle, \qquad \alpha(t) = \pi(v_k - h(t))$$

Из неравенства (4) и равенства (7) следует, что $|h(t)| < \lambda$. Поэтому при $t \in [0, \theta_k]$ выполняется включение $\alpha(t) \in \Gamma'$. Согласно 2°, это означает справедливость неравенства (6).

4°. Из результата 3° следует, что при любом начальном значении $z(T_k)$, $\Delta(T_k) \neq 0$, применяя специальное управление убегания, к моменту $T_k + \theta_k$ можно привести точку $z(t)$ в положение, где

$$\Delta(T_k + \theta_k) \geqslant |\xi(T_k + \theta_k)| > \nu\theta_k^q = \varepsilon_k \tag{8}$$

5°. Существует такая положительная константа c_0, зависящая лишь от уравнений (1), что для любого положения $z(t)$, $0 < |\Delta(T_k)| \leqslant \varepsilon$, применяя специальное управление $v(t)$ при $t \in [0, T_k]$, можно так вести точку $z(T_k + t)$, что будет выполнено неравенство

$$|\Delta(T_k + t)| > c_0(|\Delta(T_k)|\chi(T_k + t))^q \tag{9}$$

Прежде всего отметим, что из уравнений (1) с учетом условия $p > q$ следует существование таких констант $\alpha > 0$, $\beta > 0$, зависящих только от уравнений (1) и числа M, что на отрезке $[0, M]$ выполнены неравенства

$$\chi(T_k + t)^{-1}\chi(T_k) > \alpha, \quad |\Delta(T_k + t) - \Delta(T_k)| < \beta\chi^{-1}(T_k)\, t$$

Поэтому при $t < |\Delta(T_k)|\chi(T_k)/2\beta$

$$|\Delta(T_k + t)| \geqslant |\Delta(T_k)|/2 \tag{10}$$

Так как убегающий применяет специальное управление убегания $v(t) \equiv v_k$, то справедливо неравенство (6) и, следовательно, при $t \geqslant |\Delta(T_k)|\chi(T_k)/2\beta$ выполнено неравенство

$$|\Delta(T_k + t)| \geqslant (|\Delta(T_k)|\chi(T_k)/2\beta)\,\nu \tag{11}$$

Из неравенств (10), (11) следует неравенство (9).

6°. Для доказательства неравенств а) — в) теоремы опишем процесс уклонения. Пусть $|\Delta(0)| > \varepsilon_0 = \nu\theta_0^q$, тогда до момента T_1, когда впервые выполнено равенство $|\Delta(T_1)| = \varepsilon_0$, убегающий выбирает произвольное управление, причем, очевидно, неравенство а) выполнено. К моменту T_1 ограничение на управление преследователя будет иметь вид

$$\int_{T_1}^{\infty}(u\cdot u)\,ds \leqslant \rho^2 - \int_0^{T_1}(u\cdot u)\,ds = \rho^2(T_1)$$

По формуле (7) определим θ_1. Очевидно, что $|\Delta(T_1)| \leqslant \varepsilon_1 = \nu\theta_1^q$, поэтому, применяя на отрезке $[T_1, T_1 + \theta_1]$ специальное управление убегания, получим при $t \in [T_1, T_1 + \theta_1]$ неравенство в), где $k = 1$. Из неравенства (8) следует, что в момент $T_1 + \theta_1$ имеет место неравенство $|\Delta(T_k + \theta_k)| > \varepsilon_1$. Поэтому до момента T_2, когда впервые $|\Delta(T_2)| = \varepsilon_1$, убегающий применяет произвольное управление. Действуя подобным образом дальше, получаем неравенство в).

Если $|\Delta(0)| \leqslant \varepsilon_0$, то убегающий при $t \in [0, \theta_0]$ применяет специальное управление убегания, что дает, согласно (9), неравенство б) при $t \in [0, \theta_0]$, причем $|\Delta(\theta_0)| > \varepsilon_0$. Применяя при $t \in (\theta_0, T_1]$ произвольное управление, получаем неравенство б). Дальше действуем так, как описано выше.

Доказательство второй части теоремы основано на результатах работы [2].

Поступила 14 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С.* Линейная дифференциальная игра убегания. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1971, т. 112.
2. *Мезенцев А. В.* Прямой метод в линейных дифференциальных играх с разными ограничениями. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1971, т. 11, № 2.

УДК 531.31

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЛАГРАНЖЕВЫХ РЕШЕНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ ПРИ КРИТИЧЕСКОМ СООТНОШЕНИИ МАСС

А. Г. Сокольский

(Москва)

Для плоского и пространственного движений доказывается формальная устойчивость лагранжевых решений круговой ограниченной задачи трех тел при критическом соотношении масс основных тел.

1. Рассмотрим движение трех материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. Уравнения движения задачи допускают частные решения, соответствующие движению, при котором три тела образуют равносторонний треугольник, вращающийся в своей плоскости вокруг центра масс системы трех тел. Исследуем устойчивость этих решений для случая круговой ограниченной задачи при критическом соотношении масс основных тел.

Пусть единицы измерения выбраны так, что угловая скорость вращения основных притягивающих тел, расстояние между ними, сумма их масс и постоянная тяготения равны единице. В этих единицах масса меньшего из притягивающих тел равна μ. Функцию Гамильтона круговой ограниченной задачи трех тел вблизи треугольного решения L_4 разложим в ряд [1] и представим в виде (H_m — полином степени m от координат q_i и импульсов p_i, $i = 1, 2, 3$)

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots \tag{1.1}$$

$$H_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + q_2 p_1 - q_1 p_2 + \frac{1}{8} q_1^2 - k q_1 q_2 - \frac{5}{8} q_2^2 + \frac{1}{2}(q_3^2 + p_3^2)$$

$$H_3 = \frac{\sqrt{3}}{144}(-28kq_1^3 + 27q_1^2 q_2 + 132kq_1q_2^2 + 27q_2^3 - 48kq_1q_3^2 - 108q_2q_3^2)$$

$$H_4 = \frac{1}{384}(111q_1^4 + 400kq_1^3q_2 - 738q_1^2q_2^2 - 720kq_1q_2^3 - 9q_2^4 +$$

$$+ 72q_1^2q_3^2 + 960kq_1q_2q_3^2 + 792q_2^2q_3^2 - 144q_3^4), \qquad k = \frac{3\sqrt{3}}{4}(1 - 2\mu)$$

Остановимся сначала на случае плоского движения. Частоты ω_1 и ω_2 ($\omega_1 \geqslant \omega_2$) колебательной системы с гамильтонианом $H_2(q_1, q_2, p_1, p_2)$ удовлетворяют уравнению

$$\omega_4 - \omega^2 + {}^{27}/_4\, \mu(1 - \mu) = 0$$

Область устойчивости в первом приближении записывается в виде неравенств

$$0 < \mu < (9 - \sqrt{69}) / 18 \simeq 0.0385208\ldots \tag{1.2}$$