Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 539.375

МЕХАНИКА РАЗРУШЕНИЯ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ. ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ТРЕЩИНА НА ГРАНИЦЕ С ПРОВОДНИКОМ

Б. А. Кудрявцев, В. З. Партон, В. И. Ракитин

(Москва)

Формулируется условие, являющееся обобщением вариационного принципа разрушения на пьезоэлектрические среды. Такое представление условия разрушения, позволяющее определить развитие трещины в пьезоэлектрическом материале, в некоторых случаях оказывается предпочтительнее аналогичного условия, полученного в [1].

В качестве примера рассматривается задача о развитии дисковидной трещины по границе пьезоэлектрической керамики и упругого изотропного проводника.

1. Вариационный принцип механики разрушения пьезоэлектрических сред. Компоненты напряжений σ_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ и компоненты вектора электрической индукции пьезоэлектрической среды в статистическом случае удовлетворяют уравнениям равновесия и уравнению Максвелла

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial D_j}{\partial x_j} = 0 \tag{1.1}$$

В декартовых координатах, отнесенных к кристаллофизическим осям, для пьезоэлектрической среды [2]

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k \\ D_i &= e_{kli}\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ik}{}^S E_k \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь c_{ijkl}^E — модули упругости среды, e_{ijk} — пьезоэлектрические модули, $\varepsilon_{ik}{}^s$ — адиабатические диэлектрические постоянные, E_k — компоненты напряженности электрического поля, ε_{kl} — компоненты тензора деформаций.

Для вывода условия, определяющего развитие трещины в пьезоэлектрическом материале, аналогично [3,4] рассмотрим ряд возможных состояний тела. Пусть в состоянии *1* в теле отсутствует трещина, а на поверхности тела S заданы внешние нагрузки и электрический потенциал φ $(E_k = = \partial\varphi/\partial x_k)$. Данному состоянию соответствуют напряжения σ_{ij1}, вектор смещений u_{i1}, потенциал φ_1 и вектор электрической индукции D_{j1}. В состоянии *2* будем рассматривать тело с теми же внешними нагрузками и потенциалом на поверхности S, что и в состоянии *1*, но имеющее трещину Σ, на берегах которой задана нагрузка и потенциал. Данному состоянию соответствуют напряжения σ_{ij2}, смещения u_{i2}, потенциал φ_2 и индукция

D_{j2}. Наконец, в состоянии *3* рассмотрим тело с варьированной по длине и форме трещиной при нагрузках и электрическом поле второго состояния.

Изменение энергии при переходе из одного состояния в другое имеет вид [5]

$$\delta E = -\delta A + \delta W \tag{1.3}$$

Здесь δA — работа внешних сил и электрического поля, δW — изменение внутренней энергии тела.

При переходе из состояния *2* в состояние *3* из закона сохранения энергии следует:

$$\delta U_0 = \delta E_{2-3}, \qquad U_0 = \int_\Sigma \gamma d\Sigma \tag{1.4}$$

Здесь U_0 — приток энергии, связанный с поверхностной энергией, γ — интенсивность поверхностной энергии разрушения.

Если воспользоваться соотношением

$$\sigma_{ij2}\varepsilon_{ij1} + E_{j2}D_{j1} = \sigma_{ij1}\varepsilon_{ij2} + E_{j1}D_{j2}$$

которое проверяется подстановкой уравнений (1.2), и равенствами (1.1), то легко показать, что изменение внутренней энергии при переходе из состояния *1* в *2* определяется равенством

$$\delta W_{1-2} = \frac{1}{2}\int_V (U_2 - U_1)\,d\tau = \frac{1}{2}\int_{S+\Sigma} (\sigma_{ij2} + \sigma_{ij1})(u_{i2} - u_{i1})\,n_j dS + \tag{1.5}$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{S+\Sigma} (\varphi_2 + \varphi_1)(D_{j2} - D_{j1})\,n_j dS$$
$$U = {}^1/_2\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} + {}^1/_2 D_j E_j$$

Здесь U — плотность внутренней энергии.

Работа поверхностных сил и поля при переходе из состояния *1* в состояние *2* может быть записана в виде

$$\delta A_{1-2} = \int_S \sigma_{ij1}(u_{i2} - u_{i1})\,n_j dS + \int_S \varphi_1 (D_{j2} - D_{j1})\,n_j dS + \tag{1.6}$$
$$+ \int_\Sigma (\sigma_{ij2} + \sigma_{ij1})(u_{i2} - u_{i1})\,n_j dS + \int_S (\varphi_2 + \varphi_1)(D_{j2} - D_{j1})\,n_j dS$$

Используя (1.3), (1.5), (1.6), получим изменение энергии при переходе из состояния *1* в *2*

$$\delta E_{1-2} = -\frac{1}{2}\Big[\int_\Sigma (\sigma_{ij2} + \sigma_{ij1})(u_{i2} - u_{i1})\,n_j dS + \tag{1.7}$$
$$+ \int_\Sigma (\varphi_2 + \varphi_1)(D_{j2} - D_{j1})\,n_j dS\Big]$$

Аналогичным образом можно получить изменение энергии при переходе из состояния *1* в состояние *3*

$$\delta E_{1-3} = -\frac{1}{2}\left\{ \int\limits_{\Sigma+\delta\Sigma} (\sigma_{ij2} + \sigma_{ij1})\,[u_{i2} - u_{i1} + \delta(u_{i2} - u_{i1})]\,n_j dS + \right. \tag{1.8}$$

$$\left. + \int\limits_{\Sigma+\delta\Sigma} (\varphi_2 + \varphi_1)\,[D_{j2} - D_{j1} + \delta(D_{j2} - D_{j1})]\,n_j dS \right\}$$

Из уравнений (1.4), (1.7), (1.8) с учетом равенства

$$\delta E_{2-3} = \delta E_{1-3} - \delta E_{1-2}$$

следует основное вариационное соотношение, определяющее условие развития трещины в пьезоэлектрической среде

$$\delta \int\limits_{\Sigma} \left\{ \gamma + \frac{1}{2}\,[(\sigma_{ij2} + \sigma_{ij1})(u_{i2} - u_{i1}) + (\varphi_2 + \varphi_1)(D_{j2} - D_{j1})]\,n_j \right\} dS = 0 \tag{1.9}$$

Если в состоянии *1* отсутствуют внешняя нагрузка и поле, то условие (1.9) принимает вид

$$\delta \int\limits_{\Sigma} \left(\gamma - \frac{1}{2}\,p_i u_i - \frac{1}{2}\,\varphi D_n \right) dS = 0 \tag{1.10}$$

$$p_i = -\sigma_{ij2} n_j, \quad u_i = u_{i2}, \quad \varphi = \varphi_2, \quad D_n = -D_{j2} n_j$$

Здесь учтено внешнее к среде положительное направление нормали к границе Σ.

2. Осесимметричная трещина на границе с проводником. Постановка задачи. Рассмотрим неограниченное полупространство ($z \geqslant 0$) из пьезоэлектрической текстуры, имеющей симметрию $\infty \cdot m$. Текстура представляет собой поликристаллический агрегат, состоящий из монокристаллов, вектор поляризации которых ориентирован внешним полем. После снятия поля вектор поляризации сохраняет свое направление (поляризованная керамика).

Дисковидная трещина расположена перпендикулярно направлению поляризации, которое является для пьезоэлектрической керамики осью симметрии бесконечного порядка, на границе ($z = 0$) пьезоэлектрической среды ($z \geqslant 0$) и упругого изотропного проводника ($z \leqslant 0$). Отнесем пространство к цилиндрической системе координат r, θ, z, так что ось z совпадает с осью симметрии.

Берега трещины радиуса a нагружены внутренним давлением $\sigma_0 = \sigma_0(r)$, симметричным относительно оси z.

С учетом симметрии нагрузки и свойств рассматриваемой пьезоэлектрической текстуры уравнения задачи электроупругости в системе координат r, θ, z имеют вид [2, 6] ($z \geqslant 0$)

$$\frac{\partial\sigma_{rr}^{+}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{rz}^{+}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr}^{+} - \sigma_{\theta\theta}^{+}}{r} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{rz}^{+}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{zz}^{+}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}^{+}}{r} = 0 \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial r} + \frac{1}{r} D_r + \frac{\partial D_z}{\partial z} = 0$$

Здесь σ_{rr}^+, σ_{rz}^+, σ_{zz}^+ — компоненты тензора напряжений пьезоэлектрической среды, а D_r, D_z — компоненты вектора электрической индукции.

Выберем в качестве независимых переменных компоненты деформаций и электрического поля и, воспользовавшись матричной формой записи, представим соотношения (1.2) в виде

$$\sigma_i = c_{ij}^E \varepsilon_j - e_{ik}E_k \tag{2.2}$$

$$D_k = e_{ik}\varepsilon_i + \varepsilon_{kl}^s E_k \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, 6;\ k, l = 1, 2, 3)$$

$$\sigma_1 = \sigma_{rr}^+, \quad \sigma_2 = \sigma_{\theta\theta}^+, \quad \sigma_3 = \sigma_{zz}^+, \quad \sigma_5 = \sigma_{rz}^+, \quad \sigma_4 = \sigma_6 = 0$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_r^+}{\partial r}, \quad \varepsilon_2 = \frac{u_r^+}{r}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial u_z^+}{\partial z}, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_6 = 0$$

$$\varepsilon_5 = \frac{\partial u_r^+}{\partial z} + \frac{\partial u_z^+}{\partial r}, \quad D_1 = D_r, \quad D_2 = 0$$

$$D_3 = D_z, \quad E_1 = E_r, \quad E_2 = 0, \quad E_3 = E_z$$

Здесь u_r^+, u_z^+ — компоненты вектора перемещений в случае осесимметричной деформации пьезоэлектрической среды. Вид матриц упругих постоянных c_{ij}^E $(i, j = 1, 2, \ldots, 6)$, пьезоэлектрических модулей e_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, 6;\ k = 1, 2, 3)$ и диэлектрических констант ε_{kl}^s $(k, l = 1, 2, 3)$ для пьезоэлектрической текстуры $\infty \cdot m$ приведен в работе [6] (см. также [1]).

Введем электрический потенциал φ

$$E_r = \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \qquad E_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

На основании (2.2) получим соотношения, связывающие напряжения и компоненты вектора электрической индукции с деформациями и потенциалом при осесимметричной деформации среды

$$\sigma_{rr}^+ = c_{11}^E\frac{\partial u_r^+}{\partial r} + c_{12}^E\frac{u_r^+}{r} + c_{13}^E\frac{\partial u_z^+}{\partial z} - e_{31}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{2.3}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^+ = c_{12}^E\frac{\partial u_r^+}{\partial r} + c_{11}^E\frac{u_r^+}{r} + c_{13}^E\frac{\partial u_z^+}{\partial z} - e_{31}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\sigma_{zz}^+ = c_{13}^E\left(\frac{\partial u_r^+}{\partial r} + \frac{u_r^+}{r}\right) + c_{33}^E\frac{\partial u_z^+}{\partial z} - e_{33}\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\sigma_{rz}^+ = c_{44}^E\left(\frac{\partial u_r^+}{\partial z} + \frac{\partial u_z^+}{\partial r}\right) - e_{15}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

$$D_r = e_{15}\left(\frac{\partial u_r^+}{\partial z} + \frac{\partial u_z^+}{\partial r}\right) + \varepsilon_{11}^s\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

$$D_z = e_{31}\left(\frac{\partial u_r^+}{\partial r} + \frac{u_r^+}{r}\right) + e_{33}\frac{\partial u_z}{\partial z} + \varepsilon_{33}^s\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Подставляя (2.3) в (2.1), получим основные уравнения для исследования осесимметричной деформации пьезоэлектрической среды

$$c_{11}^E\left(\frac{\partial^2 u_r^+}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r^+}{\partial r} - \frac{u_r^+}{r^2}\right) + c_{44}^E\frac{\partial^2 u_r^+}{\partial r^2} + (c_{13}^E + c_{44}^E)\frac{\partial^2 u_z^+}{\partial r\,\partial z} - \tag{2.4}$$

$$- (e_{31} + e_{15})\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial z} = 0$$

$$c_{44}^E\left(\frac{\partial^2 u_z^+}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z^+}{\partial r}\right)+c_{33}^E\frac{\partial^2 u_z^+}{\partial z^2}+(c_{13}^E+c_{44}^E)\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_r^+}{\partial r}+\frac{u_r^+}{r}\right)-$$
$$-e_{15}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)-e_{33}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$
$$e_{15}\left(\frac{\partial^2 u_z^+}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_z^+}{\partial r}\right)+e_{33}\frac{\partial^2 u_z^+}{\partial z^2}+(e_{15}+e_{31})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u_r^+}{\partial r}+\frac{u_r^+}{r}\right)+$$
$$+\varepsilon_{11}^s\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\varepsilon_{33}^s\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$$

Для изотропной проводящей среды ($z\leqslant 0$) имеем

$$\sigma_{rr}^-=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_r^-}{\partial r}+\lambda\left(\frac{\partial u_z^-}{\partial z}+\frac{u_r^-}{r}\right) \tag{2.5}$$
$$\sigma_{\theta\theta}^-=(\lambda+2\mu)\frac{u_r^-}{r}+\lambda\left(\frac{\partial u_z^-}{\partial z}+\frac{\partial u_z^-}{\partial r}\right)$$
$$\sigma_{zz}^-=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_z^-}{\partial z}+\lambda\left(\frac{\partial u_z^-}{\partial r}+\frac{u_r^-}{r}\right)$$
$$\sigma_{rz}^-=\mu\left(\frac{\partial u_r^-}{\partial z}+\frac{\partial u_z^-}{\partial r}\right)$$

Здесь σ_{rr}^-, σ_{rz}^-, σ_{zz}^-, $\sigma_{\theta\theta}^-$ — компоненты тензора напряжений в изотропном проводнике, удовлетворяющие уравнениям (2.1), u_r^-, u_z^- — компоненты вектора перемещений в случае осесимметричной деформации изотропной среды, λ, μ — коэффициенты Ламе.

При исследовании осесимметричной деформации с дисковидной трещиной на плоской границе $z=0$ двух сред должны выполняться следующие условия:

$$\sigma_{zz}^+(r,0)=\sigma_{zz}^-(r,0),\quad \sigma_{rz}^+(r,0)=\sigma_{rz}^-(r,0),\quad \varphi=0;\quad 0\leqslant r<\infty \tag{2.6}$$
$$\sigma_{zz}^+(r,0)=-\sigma_0(r),\quad \sigma_{rz}^+(r,0)=0;\quad 0\leqslant r<a \tag{2.7}$$
$$u_r^+(r,0)=u_r^-(r,0),\quad u_z^+(r,0)=u_z^-(r,0);\quad r>a \tag{2.8}$$

Кроме того

$$u_r^+=u_z^+=u_r^-=u_z^-=\varphi=0,\quad R=\sqrt{r^2+z^2}\to\infty$$

3. Система парных интегральных уравнений. Решение системы (2.4) будем искать с помощью интегрального преобразования Ганкеля

$$u_r^+(r,z)=\int_0^\infty U(z,\xi)J_1(\xi r)\,d\xi,\quad u_z^+(r,z)=\int_0^\infty V(z,\xi)J_0(\xi r)\,d\xi \tag{3.1}$$
$$\varphi(r,z)=\int_0^\infty \Phi(z,\xi)J_0(\xi r)\,d\xi$$

Подставляя (3.1) в (2.4), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций U, V, Φ. Частные решения этой системы для $z\geqslant 0$, удовлетворяющие условиям на бесконечности, запишем в виде

$$U=\alpha e^{-k\xi z},\quad V=\beta e^{-k\xi z},\quad \Phi=\gamma e^{-k\xi z}$$

Здесь k — корни с положительной действительной частью характеристического уравнения

$$\det \| a_{ij} \| = 0 \tag{3.2}$$

$$a_{11} = c_{44}^E k^2 - c_{11}^E, \quad a_{12} = -a_{21} = (c_{13}^E + c_{44}^E) k$$

$$a_{13} = a_{31} = -(e_{31} + e_{15}) k, \quad a_{22} = c_{33}^E k^2 - c_{44}^E$$

$$a_{23} = -a_{32} = -e_{33} k^2 + e_{15}, \quad a_{33} = \varepsilon_{33}^s k^2 - \varepsilon_{11}^s$$

Анализ (3.2) показывает, что для известных пьезокерамик это уравнение имеет два действительных корня $\pm k_1$ и четыре комплексных попарно-сопряженных $\pm\delta \pm i\omega (k_1, \delta, \omega > 0)$. Постоянные $\alpha(k)$, $\beta(k)$, $\gamma(k)$, являющиеся решением однородной системы с матрицей (3.2), определим по формулам

$$\alpha = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}, \quad \beta = -a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}, \quad \gamma = a_{11}a_{22} + a_{12}^2$$

Таким образом, функции U, V, Φ можно представить в виде

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ \Phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{bmatrix} A_1(\xi) e^{-k_1 \xi z} + \operatorname{Re} \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_{21} + i\alpha_{22} \\ \beta_{21} + i\beta_{22} \\ \gamma_{21} + i\gamma_{22} \end{bmatrix} [B_1(\xi) + iC_1(\xi)] e^{-\xi z(\delta + i\omega)} \right\} \tag{3.3}$$

$$\alpha_1 = \alpha(k_1), \quad \beta_1 = \beta(k_1), \quad \gamma_1 = \gamma(k_1), \quad \alpha_{21} + \alpha_{22} = \alpha(\delta + i\omega)$$

$$\beta_{21} + i\beta_{22} = \beta(\delta + i\omega), \quad \gamma_{21} + i\gamma_{22} = \gamma(\delta + t\omega)$$

С учетом (3.1), (3.3), получим следующие выражения для компонент смещений и потенциала:

$$u_r^+(r, z) = \int_0^\infty [\alpha_1 A_1(\xi) e^{-k_1 \xi z} + (\alpha_{21} B_1(\xi) - \alpha_{22} C_1(\xi)) e^{-\delta \xi z} \cos \omega \xi z + \tag{3.4}$$
$$+ (\alpha_{22} B_1(\xi) + \alpha_{21} C_1(\xi)) e^{-\delta \xi z} \sin \omega \xi z] J_1(\xi r) d\xi$$

$$u_z^+(r, z) = \int_0^\infty [\beta_1 A_1(\xi) e^{-k_1 \xi z} + (\beta_{21} B_1(\xi) - \beta_{22} C_1(\xi)) e^{-\delta \xi z} \cos \omega \xi z +$$
$$+ (\beta_{22} B_1(\xi) + \beta_{21} C_1(\xi)) e^{-\delta \xi z} \sin \omega \xi z] J_0(\xi r) d\xi$$

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty [\gamma_1 A_1(\xi) e^{-k_1 \xi z} + (\gamma_{21} B_1(\xi) - \gamma_{22} C_1(\xi)) e^{-\delta \xi z} \cos \omega \xi z +$$
$$+ (\gamma_{22} B_1(\xi) + \gamma_{21} C_1(\xi)) e^{-\delta \xi z} \sin \omega \xi z] J_0(\xi z) d\xi$$

На основании (2.3), (3.1), (3.4) находим

$$u_r^+(r, 0) = \int_0^\infty [\alpha_1 A_1(\xi) + \alpha_{21} B_1(\xi) - \alpha_{22} C_1(\xi)] J_1(\xi r) d\xi \tag{3.5}$$

$$u_z^+(r, 0) = \int_0^\infty [\beta_1 A_1(\xi) + \beta_{21} B_1(\xi) - \beta_{22} C_1(\xi)] J_0(\xi r) d\xi$$

$$\varphi(r, 0) = \int_0^\infty [\gamma_1 A_1(\xi) + \gamma_{21} B_1(\xi) - \gamma_{22} C_1(\xi)] J_0(\xi r) d\xi$$

$$\sigma_{zz}^{+}(r,\ 0)=\int\limits_0^\infty\left[\frac{m_1}{k_1}A_1(\xi)+\frac{m_2\delta+m_3\omega}{\delta^2+\omega^2}B_1(\xi)-\frac{m_3\delta-m_2\omega}{\delta^2+\omega^2}C_1(\xi)\right]\times$$
$$\times\ \xi J_0(\xi r)\,d\xi$$
$$\sigma_{rz}^{+}(r,0)=\int\limits_0^\infty[m_1A_1(\xi)+m_2B_1(\xi)-m_3C_1(\xi)]\,\xi J_1(\xi r)\,d\xi.$$

Здесь введены обозначения

$$m_1=e_{15}\gamma_1-c_{44}{}^E(k_1\alpha_1+\beta_1)$$
$$m_2=e_{15}\gamma_{21}-c_{44}{}^E(\delta\alpha_{21}-\omega\alpha_{22}+\beta_{21})$$
$$m_3=e_{15}\gamma_{22}-c_{44}{}^E(\delta\alpha_{22}+\omega\alpha_{21}+\beta_{22})$$

Решение уравнений равновесия (2.1) при $z\leqslant 0$ представим в виде

$$u_r^-(r,\ z)=\int\limits_0^\infty[A_2(\xi)+B_2(\xi)\,z\xi]\,e^{\xi z}J_1(\xi r)\,d\xi \tag{3.6}$$
$$u_z^-(r,\ z)=\int\limits_0^\infty\left[-A_2(\xi)+B_2(\xi)\left(\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}-z\xi\right)\right]c^{\xi z}J_0(\xi r)\,d\xi$$

На основании (2.5), используя (3.6), можно получить

$$u_r^-(r,\ 0)=\int\limits_0^\infty A_2(\xi)\,J_1(\xi r)\,d\xi \tag{3.7}$$
$$u_z^-(r,\ 0)=\int\limits_0^\infty\left[-A_2(\xi)+B_2(\xi)\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\right]J_0(\xi r)\,d\xi$$
$$\sigma_{zz}^-(r,\ 0)=\int\limits_0^\infty 2\mu\left[-A_2(\xi)+B_2(\xi)\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\right]\xi J_0(\xi r)\,d\xi$$
$$\sigma_{rz}(r,\ 0)=\int\limits_0^\infty 2\mu\left[A_2(\xi)-B_2(\xi)\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right]\xi J_1(\xi r)\,d\xi$$

Удовлетворяя условиям (2.6) на границе двух сред $z=0$, получим

$$C_1=\frac{\gamma_1}{\gamma_{22}}A_1+\frac{\gamma_{21}}{\gamma_{22}}B_1$$
$$A_2=\frac{\delta_1(\lambda+2\mu)+\delta_3\mu}{2\mu(\lambda+\mu)\gamma_{22}}A_1+\frac{\delta_2(\lambda+2\mu)+\delta_4\mu}{2\mu(\lambda+\mu)\gamma_{22}}B_1$$
$$B_2+\frac{\delta_1+\delta_3}{2\mu\gamma_{22}}A_1+\frac{\delta_2+\delta_4}{2\mu\gamma_{22}}B_1$$

Здесь

$$\delta_1=m_1\gamma_{22}-m_3\gamma_1,\qquad \delta_2=m_2\gamma_{22}-m_3\gamma_{21}$$
$$\delta_3=\frac{m_1}{k_1}\gamma_{22}-\frac{m_3\delta-m_2\omega}{\delta^2+\omega^2}\gamma_1,\qquad \delta_4=\frac{(m_2\delta+m_3\omega)\gamma_{22}-(m_3\delta-m_2\omega)\gamma_{21}}{\delta^2+\omega^2}$$

Введем функции

$$u_z(r)=u_z{}^+(r,0)-u_z{}^-(r,0),\qquad u_r(r)=u_r{}^+(r,0)-u_r{}^-(r,0)$$

ь, удовлетворяя условиям (2.7), (2.8), получим систему парных интегральных уравнений для функций $A_1(\xi)$, $B_1(\xi)$

$$\sigma_{rz}^{+}(r,0)=\frac{1}{\gamma_{22}}\frac{d}{dr}\int_0^\infty[\delta_1A_1(\xi)+\delta_2B_1(\xi)]J_0(\xi r)\,d\xi=0,\quad 0\leqslant r<a \tag{3.8}$$

$$\sigma_{zz}^{+}(r,0)=\frac{1}{\gamma_{22}}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\int_0^\infty[\delta_3A_1(\xi)+\delta_4B_1(\xi)]J_1(\xi r)\,d\xi=-\sigma_0(r)\quad 0\leqslant r<a \tag{3.9}$$

$$u_z(r)=\frac{1}{\gamma_{22}}\int_0^\infty[\delta_5A_1(\xi)+\delta_6B_1(\xi)]J_0(\xi r)\,d\xi=0,\quad r>a \tag{3.10}$$

$$u_r(r)=\frac{1}{\gamma_{22}}\int_0^\infty[\delta_7A_1(\xi)+\delta_8B_1(\xi)]J_1(\xi r)\,d\xi=0,\quad r>a \tag{3.11}$$

Здесь

$$\delta_5=\beta_1\gamma_{22}-\beta_{22}\gamma_1-\frac{\delta_1}{2(\lambda+\mu)}-\frac{\delta_3(\lambda+2\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)}$$

$$\delta_6=\beta_{21}\gamma_{22}-\beta_{22}\gamma_{21}-\frac{\delta_2}{2(\lambda+\mu)}-\frac{\delta_4(\lambda+2\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)}$$

$$\delta_7=\alpha_1\gamma_{22}-\alpha_{22}\gamma_1-\frac{\delta_1(\lambda+2\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)}-\frac{\delta_3}{2(\lambda+\mu)}$$

$$\delta_8=\alpha_{21}\gamma_{22}-\alpha_{22}\gamma_{21}-\frac{\delta_2(\lambda+2\mu)}{2\mu(\lambda+\mu)}-\frac{\delta_4}{2(\lambda+\mu)}$$

4. Решение системы парных уравнений. Если ввести вспомогательные функции $p(t)$ и $q(t)$ с помощью соотношений

$$\delta_5A_1(\xi)+\delta_6B_1(\xi)=\gamma_{22}\int_0^a p(t)\sin\xi t\,dt \tag{4.1}$$

$$\delta_7A_1(\xi)+\delta_8B_1(\xi)=\gamma_{22}\int_0^a q(t)\cos\xi t\,dt$$

то, учитывая значения интегралов [7]

$$\int_0^\infty J_0(\xi r)\sin\xi t\,d\xi=\begin{cases}0, & t<r\\ \dfrac{1}{\sqrt{t^2-r^2}}, & t>r\end{cases}$$

$$\int_0^\infty J_1(\xi r)\cos\xi t\,d\xi=\begin{cases}\dfrac{1}{r}, & t<r\\ \dfrac{1}{r}-\dfrac{t}{r\sqrt{t^2-r^2}}, & t>r\end{cases}$$

можно показать, что уравнения (3.10), (3.11) удовлетворяются тождественно. Подставляя (4.1) в (3.8), (3.9) и принимая во внимание, что [7]

$$\int_0^\infty J_0(\xi r)\cos\xi t\,d\xi=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{r^2-t^2}}, & t<r\\ 0, & t>r\end{cases}$$

$$\int_0^\infty J_1(\xi r)\sin\xi t\,d\xi=\begin{cases}\dfrac{t}{r\sqrt{r^2-t^2}}, & t<r\\ 0, & t>r\end{cases}$$

получим следующие равенства:

$$g_{11}\int_r^a \frac{p(t)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}} + g_{12}\int_0^r \frac{q(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}} = 0, \quad 0 \leqslant r < a \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[g_{21}\int_0^r \frac{tp(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}} + q_{22}\left(\int_0^a q(t)\,dt - \int_r^a \frac{tq(t)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}\right)\right] = \sigma_0(r), \quad 0 \leqslant r < a$$

Здесь

$$g_{11} = \frac{1}{\Delta}(\delta_7\delta_2 - \delta_8\delta_1), \quad g_{12} = \frac{1}{\Delta}(\delta_6\delta_1 - \delta_5\delta_2)$$

$$g_{21} = \frac{1}{\Delta}(\delta_7\delta_4 - \delta_8\delta_3), \quad g_{22} = \frac{1}{\Delta}(\delta_6\delta_3 - \delta_5\delta_4), \quad \Delta = \delta_5\delta_8 - \delta_6\delta_7$$

Интегрируя (4.2), получим, например, для случая $\sigma_0(r) = \sigma_0 = \mathrm{const}$ систему из двух обобщенных интегральных уравнений Абеля

$$g_{11}\int_r^a \frac{p(t)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}} + g_{12}\int_0^r \frac{q(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}} = 0, \quad 0 \leqslant r < a \tag{4.3}$$

$$g_{21}\int_0^r \frac{tp(t)\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}} + g_{22}\left(\int_0^a q(t)\,dt - \int_r^a \frac{tq(t)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}\right) = \sigma_0\frac{r^2}{2}, \quad 0 \leqslant r < a \tag{4.4}$$

Применив оператор

$$\int_0^r \frac{r(\ldots)\,dr}{\sqrt{t^2-r^2}}$$

к уравнению (4.3) и изменив порядок интегрирования по формуле Дирихле, найдем

$$\frac{\pi}{2}\int_0^t q(\tau)\,d\tau = -\frac{g_{11}}{g_{12}}\left[\frac{1}{2}\int_0^t p(\tau)\ln\frac{t+\tau}{t-\tau}\,d\tau + \frac{1}{2}\int_t^a p(\tau)\ln\frac{\tau+t}{\tau-t}\,d\tau\right] \tag{4.5}$$

Объединяя интегралы в правой части (4.5) и дифференцируя это равенство по t, получим

$$q(t) = \frac{2}{\pi}\frac{g_{11}}{g_{12}}\int_0^a \frac{p(\tau)\,\tau\,d\tau}{t^2-\tau^2} \tag{4.6}$$

Аналогичным образом можно показать, что уравнение (4.4) после соответствующих преобразований принимает вид

$$p(t) = -\frac{2}{\pi}\frac{g_{22}}{g_{21}}t\int_0^a \frac{q(\tau)\,d\tau}{t^2-\tau^2} + \frac{2}{\pi}\frac{\sigma_0 t}{g_{21}} \tag{4.7}$$

Если положить $q(-\tau) = q(\tau)$ и $p(-\tau) = -p(\tau)$, то равенства (4.6), (4.7) можно записать в форме системы сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши

$$p(t) = \frac{g_{22}}{g_{21}} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{q(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_0}{g_{21}} t \tag{4.8}$$

$$q(t) = -\frac{g_{11}}{g_{12}} \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} \frac{p(\tau)\,d\tau}{\tau - t} \tag{4.9}$$

Умножая (4.8) на $i \,/\, g_1$ и складывая с (4.9), получим одно интегральное уравнение

$$f(t) + \frac{1}{g} \frac{1}{\pi i} \int_{-a}^{a} \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = \frac{2}{\pi} \frac{\sigma_0}{g_1 g_{21}} t \tag{4.10}$$

$$f(t) = q(t) + i \frac{1}{g_1} p(t), \quad g = \frac{g_{21}}{g_{22}} g_1, \quad g_1 = \left(\frac{g_{22} g_{12}}{g_{11} g_{21}}\right)^{1/2}$$

Отметим, что, например, для реальных пьезокерамик и упругих сред [1]

$$g_{22} \,/\, g_{21} > 0, \quad g_{11} \,/\, g_{12} > 0, \quad g > 1$$

Следуя [8], для решения (4.10) введем функцию

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-a}^{a} \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau - z}$$

аналитическую в плоскости с разрезом вдоль отрезка $-a \leqslant x < a$ действительной оси. Тогда

$$f(t) = F^+(t) - F^-(t) \tag{4.11}$$

и уравнение (4.10) эквивалентно краевой задаче Римана

$$F^+(t) - \left(\frac{g-1}{g+1}\right) F^-(t) = \frac{2}{\pi} \frac{i}{g+1} \frac{\sigma_0}{g_{22}} t \tag{4.12}$$

Определим решение, которое остается ограниченным вблизи концов $\pm a$ и примем каноническую функцию в виде [8]

$$X(z) = \left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{i\varkappa}, \quad \varkappa = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{g+1}{g-1}$$

Тогда общее решение краевой задачи (4.12), удовлетворяющее условию $F(\infty) = 0$, дается формулой

$$F(z) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{g+1} \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{-a}^{a} \frac{i\sigma_0 t\,dt}{g_{22} X^+(t)(t-z)} \tag{4.13}$$

$$X^+(t) = e^{-\pi\varkappa} \left(\frac{a-t}{a+t}\right)^{i\varkappa}$$

Здесь $X^+(t)$ — значение $X(z)$ на верхнем берегу разреза.

Вычисляя интеграл в (4.13) и используя (4.11), находим

$$F(z) = \frac{i\sigma_0}{\pi g_{22}} z + \left(\frac{2\varkappa a \sigma_0}{\pi g_{22}} - \frac{i\sigma_0 z}{\pi g_{22}}\right) X(z) \tag{4.14}$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi(g-1)} \left(i \frac{\sigma_0}{g_{22}} t - \frac{\sigma_0}{g_{22}} 2\varkappa a\right) X^+(t)$$

Отделяя действительную и мнимую части в (4.14), получим

$$q(t) = -\frac{2}{\pi}\frac{\sigma_0}{g_{22}\sqrt{g^2-1}}\left[t\sin\left(\varkappa\ln\frac{a-t}{a+t}\right) + 2\varkappa a\cos\left(\varkappa\ln\frac{a-t}{a+t}\right)\right]$$

$$p(t) = \frac{2}{\pi}\frac{g_1\sigma_0}{g_{22}\sqrt{g^2-1}}\left[t\cos\left(\varkappa\ln\frac{a-t}{a+t}\right) - 2\varkappa a\sin\left(\varkappa\ln\frac{a-t}{a+t}\right)\right]$$

С помощью последних соотношений можно определить все компоненты деформаций, напряжений и электрического поля в окрестности дисковидной трещины.

В частности, для смещений берегов трещины и нормальных напряжений на продолжении разреза получим

$$u_z^+(r,0) - u_z^-(r,0) = u_z(r) = \int_r^a \frac{p(t)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}, \quad 0 \leqslant r < a$$

$$\sigma_{zz}(r,0) = -g_{21}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\int_0^a \frac{p(t)\,t\,dt}{\sqrt{r^2-t^2}}, \qquad r > a$$

Для определения величины критической нагрузки, действующей на берегах дисковидной трещины, воспользуемся условием (1.10), которое в рассматриваемом случае принимает вид

$$\gamma = \frac{\sigma_0}{2a}\frac{d}{da}\int_0^a r\int_r^a \frac{p(t)\,dt}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dr \tag{4.15}$$

Изменяя порядок интегрирования в выражении (4.15), получим

$$\gamma = \frac{\sigma_0}{2a}\frac{d}{da}\int_0^a p(t)\,t\,dt$$

Можно показать, что

$$\int_0^a p(t)\,t\,dt = \frac{g_1\sigma_0}{g_{22}}\frac{2}{3}\varkappa a^3(1+4\varkappa^2)$$

Тогда значение критической нагрузки приложенной к берегам трещины имеет вид

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\gamma g_{21}}{ag\varkappa(1+4\varkappa^2)}}$$

Поступила 4 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кудрявцев Б. А., Партон В. З., Ракитин В. И.* Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником. ПММ, 1975, т. 39, вып. 1.
2. Physical acoustics. Ed by W. P. Mason, vol. 1. P. A., New York—London, Acad. Press, 1964.
3. *Bueckner H. F.* The propagation of cracks and the energy of elastic deformation. Trans. ASME, 1958, vol. 80, No. 6.
4. *Морозов Е. М.* Вариационные принципы в механике разрушения. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 6.
5. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды. М., «Наука», 1973.
6. *Nye J. F.* Physical properties of crystals. Oxford, Clarendon press, 1964.
7. Таблицы интегральных преобразований. СМБ, т. 2. М., «Наука», 1970.
8. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.