Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 539.3 : 534.1

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ КОРОТКОВОЛНОВЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧЕК

Г. Н. Чернышев

(Москва)

Изучаются коротковолновые колебания оболочек, локализованные в некоторой достаточно узкой пограничной зоне. Построен асимптотический процесс интегрирования уравнений (по аналогии с методами, изложенными в работах [1, 2]). Основное внимание уделено собственным колебаниям оболочек, однако в конце работы рассмотрены также вынужденные колебания. Диапазон исследуемых частот условно разделен на две части; низкочастотный и высокочастотный. Для высокочастотных колебаний уравнение первого приближения наиболее простое, поэтому вначале рассматривается это уравнение, строится асимптотический процесс интегрирования, затем метод обобщается на низкочастотные коротковолновые колебания оболочек.

1. Под коротковолновыми в работе понимаются такие колебания оболочек, которые описываются уравнениями быстро меняющегося напряженного состояния. Кроме того, рассматриваются так называемые квазипоперечные колебания, когда в уравнениях опущены инерционные члены, связанные с тангенциальными перемещениями. При таких допущениях уравнения записываются в следующем виде (здесь использованы обозначения монографии [3]):

$$
\begin{gathered}
h_1^2\,\Delta^2 w - E^{-1}h^{-1}\,\Delta_1 c - \lambda^2 w = 0, \quad \lambda^2 = \rho E^{-1}\omega^2\, Eh\,\Delta_1 w + \\
+ \Delta^2 c = 0, \quad h_1^2 = h^2\,[3\,(1-\sigma^2)]^{-1}, \quad \Delta = B^{-1}\partial_\alpha\,(B\partial_\alpha) + \\
+ A^{-1}\partial_\beta\,(A\partial_\beta), \quad \partial_\alpha = A^{-1}\partial\,/\,\partial\alpha, \quad \partial_\beta = B^{-1}\,\partial\,/\,\partial\beta \\
\Delta_1 = B^{-1}\partial_\alpha\,(BR_2^{-1}\partial_\alpha) + A^{-1}\partial_\beta\,(AR_1^{-1}\,\partial_\beta)
\end{gathered}
\tag{1.1}
$$

Считается, что координатная система на срединной поверхности отнесена к линиям главных кривизн, граница является гладкой выпуклой линией без угловых точек (условие выпуклости будет определено в дальнейшем), срединная поверхность также должна быть достаточно гладкой.

Под высокочастотными колебаниями будем понимать колебания с частотами, удовлетворяющими на всей области неравенству

$$
\lambda \gg \max\,(R_1^{-1},\ R_2^{-1})
\tag{1.2}
$$

В этом случае в системе можно пренебречь членами, содержащими радиусы кривизн. В результате для построения первого приближения получается уравнение

$$
h_1^2\,\Delta^2 w - \lambda^2 w = 0
\tag{1.3}
$$

Заметим, что проводимые упрощения вполне законны, получаемое приближенное решение при желании может быть уточнено до заданной асимптотической погрешности по известной процедуре. Здесь будет построено только первое приближение.

Колебания, описываемые уравнением (1.3), названы в [4] квазипоперечными колебаниями с большой изменяемостью. Граничными условиями для них служат нетангенциальные условия (тангенциальные условия на границе в первом приближении не учитываются).

Рассмотрим наиболее распространенные три вида нетангенциальных краевых условий: шарнирное опирание, жесткое защемление, свободный край. В случае шарнирного опирания на границе равны нулю нормальный прогиб оболочки и момент. Эти условия сводятся к следующим:

$$w = \partial_n^2 w = 0 \tag{1.4}$$

Жесткое защемление

$$w = \partial_n w = 0 \tag{1.5}$$

Свободный край

$$\partial_n^2 w + \sigma \partial_s^2 w = 0, \quad \partial_n [\partial_n^2 w + (2 - \sigma) \partial_s^2 w] = 0$$

Уравнение (1.3) распадается на два уравнения

$$\Delta w_1 - \lambda_{pq} w_1 = 0, \quad \Delta w_2 + \lambda_{pq} w_2 = 0, \quad \lambda_{pq} = \lambda h_1^{-1} \tag{1.6}$$

В случае шарнирного опирания, как нетрудно видеть, достаточно проинтегрировать второе уравнение при условии на границе $w = 0$. Оставшееся второе условие (1.4), согласно уравнению, будет выполняться автоматически. Задача (1.5), как далее будет показано, также сводится к интегрированию уравнения второго порядка, т. е. второго уравнения (1.6). Оно дает осциллирующие интегралы, построением которых и займемся.

Будем рассматривать колебания, локализованные в достаточно узкой пограничной зоне оболочки. Преобразуем уравнение к координатам (s, n), где s — длина дуги границы, n — длина дуги кривой срединной поверхности, ортогональной к границе

$$\Delta w + \lambda_{pq} c(n, s) w = 0, \quad \Delta = a(s, n) \partial_s^2 + b(s, n) \partial_n^2 \tag{1.7}$$

Здесь сохранены только члены со старшими производными и для общности добавлен коэффициент c, не усложняющий выкладок. Введение этого коэффициента облегчает в дальнейшем обобщение метода на исследование низких частот, а кроме того, он может характеризовать переменную плотность или жесткость оболочки.

Согласно [2], строим решение уравнения (1.7) в виде

$$w = v(p^{2/3} \Psi) e^{ip\Phi} \tag{1.8}$$

где Φ, Ψ — неизвестные функции, p — неизвестный большой параметр, определяемый собственной частотой (в задаче о вынужденных колебаниях он задан), v — функция Эри, удовлетворяющая уравнению

$$v''(x) - xv = 0$$

Здесь будут нужны следующие асимптотические свойства функции Эри:

$$v(-x \gg 1) = x^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)(1 + O(x^{-3/2}))$$

$$v(x \gg 1) = {}^1/_2\, x^{-1/4} \exp(-{}^2/_3\, x^{3/2})(1 + O(x^{-3/2}))$$

Заметим, что в [2] было рассмотрено уравнение Гельмгольца в области, ограниченной выпуклой кривой. Процесс интегрирования построен в предположении, что известны каустики (каустикой называется линия, обладающая следующим свойством: луч, выходящий от нее по касательной, отразившись от границы по закону равенства углов падения и отражения, возвращается к каустике по касательной), которые были построены для уравнения Гельмгольца в работе [2]. Предлагаемый в данной работе метод не предполагает предварительного знания каустик, они находятся в процессе решения; кроме того, метод обобщен на уравнения с переменными коэффициентами.

Подставляем (1.8) в (1.7) и, сокращая на экспоненциальный множитель, получаем

$$p^2 [\Psi (\nabla\Psi)^2 - (\nabla \Phi)^2]\, v - 2ip^{5/3} v' (\nabla\Psi\nabla\Phi) + ipv\, \Delta\Phi +$$
$$+ p^{2/3} v'\, \Delta\Psi + \lambda_{pq}\, cv = 0$$

$$\nabla = \sqrt{a}\, \mathbf{s}\, \partial_s + \sqrt{b}\, \mathbf{n}\, \partial_n, \quad (\nabla\Psi, \nabla\Phi) = a\, \Psi_{,s}\, \Phi_{,s} + b\Psi_{,n}\Phi_{,n}$$

Здесь λ_{pq}— собственные частоты. Учитывая, что функции v, v' линейно независимые, получаем

$$p^2 [\Psi (\nabla\Psi)^2 - (\nabla\Phi)^2] + ip\, \Delta\Phi + \lambda_{pq}\, c = 0$$

$$2ip^{5/3} (\nabla\Psi, \nabla\Phi) + p^{2/3}\, \Delta\Psi = 0$$

Ищем функции Φ, ψ и собственные частоты λ_{pq} в виде

$$\Phi = \sum_0 \Phi_i p^{-i}, \quad \Psi = \sum_0 \Psi_i p^{-i}, \quad \lambda_{pq} = p^2 + \varkappa_1 p + \sum_0 p^{-i} \varkappa_{-i} \tag{1.9}$$

Подставляя эти суммы в предыдущие уравнения и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях p, получим рекуррентную систему уравнений

$$\Psi_0 (\nabla\Psi_0)^2 - (\nabla\Phi_0)^2 + c = 0, \quad (\nabla\Psi_0, \nabla\Phi_0) = 0 \tag{1.10}$$

$$\Psi_i (\nabla\Psi_0)^2 + 2\Psi_0 (\nabla\Psi_0, \nabla\Psi_i) - 2 (\nabla\Phi_0, \nabla\Phi_i) + \varkappa_{-i} = F_i$$

$$(\nabla\Phi_0, \nabla\Psi_i) + (\nabla\Psi_0, \nabla\Phi_i) = G_i$$

Нелинейной здесь является только первая пара уравнений для определения функций Ψ_0, Φ_0. Правые части в следующих парах уравнений— известные функции, если известны решения предыдущих уравнений.

Граничные условия для функций Φ, Ψ следуют из условий для функции w. В случае задачи (1.4) имеем

$$p^{2/3}\, \Psi (s, n = 0) = t_q, \quad q = 0, 1, 2, \ldots, \quad [p\Phi] = 2n\pi, \quad n \gg 1$$

где t_q — корни функции Эри; квадратные скобки означают приращение функции при обходе области по границе. Подставляя вместо функций Ψ, Φ их разложения, получим

$$\Psi_0 = t_q p^{-2/3}, \; \Psi_i = 0, \; i = 1, 2, 3, \ldots, [\Phi_0] = 2\, n\pi p^{-1}, [\Phi_i] = 0$$

В задаче (1.4) функция Ψ на границе имеет постоянное значение. Это существенно облегчает построение функций Ψ_i, Φ_i. Граничные условия для всех приближений, начиная с $i = 1$, получились однородными.

Рассмотрим условия жесткого защемления (1.5). Строим решение системы (1.6), преобразованной к координатам (n, s), в виде

$$(1.11) \qquad w_1 = Fe^{pf}, \quad w_2 = v\,(p^{2/3}\,\Psi)\,e^{ip\Phi}$$

Уравнения для функций Ψ, Φ выписаны выше. Уравнения для первых приближений функций f, F, если их искать в виде разложений (1.9), будут следующими:

$$(\nabla f_0)^2 - c = 0, \quad (\nabla f_0, \quad \nabla F_0) + F_0\,\Delta f_0 = 0$$

$$f = \Sigma f_i p^{-i}, \quad F = \Sigma F_i p^{-i}$$

Подставляя (1.11) в (1.5), получаем, что на границе имеют место равенства (постулируем временно, что $v\,(p^{2/3}\,\Psi)$ — медленно меняющаяся функция границы)

$$(1.12) \qquad f_0 = i\Phi_0, \quad f_1 = i\Phi_1, \quad v\,(p^{2/3}\,\Psi) + F = 0$$

$$ip\Phi_{,n} + p^{2/3}\,\Psi_{,n} v' + pf_{,n}\,F + F_{,n} = 0$$

Граничное условие определяет две функции f. Здесь рассматривается та из них, для которой функция w быстро убывает при удалении от границы внутрь области (быстро возрастающая компонента решения отбрасывается).

Функция Ψ на границе мала по величине, потому что мала ширина рассматриваемой погранзоны. Тогда из второго уравнения (1.10) получается, что малым должно быть произведение $\Psi_{,n}\;\Phi_{,n}$ Предположение о малости производной $\Psi_{,n}$ следует отбросить, так как тогда из общего решения не получается известное решение для круга, если в нем положить $a = b = c = 1$. Предлагаемый метод, в сущности, строится на том, что вид решения угадывается при помощи сравнения с эталонным решением для круга. В результате получаем, что малой величиной на границе является функция $\Phi_{,n}$ и ею в третьем уравнении (1.12) можно пренебречь. Приравнивая теперь в граничных условиях (1.12) коэффициенты при одинаковых степенях p, придем к следующему равенству $v\,(p^{2/3}\,\Psi) = 0$, откуда следует, что граничное значение функции Ψ в этом случае также равно величине $\Psi = t_q\,p^{-2/3}$. Предположение о том, что на границе производная $\Phi_{,n}$ мала, превращается в утверждение, что на границе эта производная равна нулю.

Аналогично доказывается, что первое приближение функции Ψ в случае свободного края равно $\Psi = t_q' p^{-2/3}$, t_q' — корни функции v'. Следующие приближения граничных значений искомых функций получаются путем последовательного расписывания краевых условий в рекуррентную систему условий приравниванием коэффициентов при одинаковых степенях p.

2. Строим решение первых двух уравнений (1.10) (индексы нулевого приближения для простоты отбрасываем)

$$\Psi(a\Psi_{,s}^2 + b\Psi_{,n}^2) - (a\Phi_{,s}^2 + b\Phi_{,n}^2) + c = 0 \tag{2.1}$$
$$a\Psi_{,s}\Phi_{,s} + b\Psi_{,n}\Phi_{,n} = 0$$
$$\Psi(s, n = 0) = \varepsilon, \qquad [\Phi] = 2\,n\pi p^{-1}$$

Здесь под малой величиной ε понимается одна из двух величин $t_q\, p^{-2/3}$, $t_q' p^{-2/3}$. Так как решение ищется в некоторой узкой полосе $n < 1$, то строим функции Ψ, Φ в виде разложений Тейлора по координате n

$$\Psi = \sum_0 \Psi_i n^i, \qquad \Phi = \sum_0 \Phi_i n^i \tag{2.2}$$

где Ψ_i, Φ_i — функции дуги границы.

Из первого граничного условия и второго уравнения (2.1) следует, что

$$\Psi_0 = \varepsilon, \quad \Phi_1 = 0, \quad \Psi_{0,s} = 0$$

Подставляя (2.2) в (2.1), разложив коэффициенты в ряды по n и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n, получим рекуррентную последовательность уравнений. Выпишем здесь уравнения для определения приближений Ψ_i, Φ_i, $i = 0, 1, 2$

$$\varepsilon b_0\Psi_1^2 - a_0\Phi_{0,s}^2 + c_0 = 0 \tag{2.3}$$
$$\varepsilon(4b_0\Psi_1\Psi_2 + b_1\Psi_1^2) + b_0\Psi_1^3 - a_1\Phi_{0,s}^2 + c_1 = 0$$
$$a_0\Psi_{1,s}\Phi_{0,s} + 2b_0\Psi_1\Phi_2 = 0$$
$$\varepsilon(a_0\Psi_{1,s}^2 + 4b_0\Psi_2^2 + 6b_0\Psi_1\Psi_3 + 4b_1\Psi_1\Psi_2 + b_2\Psi_1^2) +$$
$$+ 5b_0\Psi_1^2\Psi_2 + b_1\Psi_1^3 - 2a_0\Phi_{0,s}\Phi_{2,s} - a_2\Phi_{0,s}^2 - 4b_0\Phi_2^2 + c_2 = 0$$
$$a_0\Psi_{2,s}\Phi_{0,s} + a_1\Psi_{1,s}\Phi_{0,s} + 3b_0\Psi_1\Psi_3 + 4b_0\Psi_2\Phi_2 + 2b_1\Psi_1\Phi_2 = 0$$
$$a = \sum_0 a_i n^i, \quad b = \sum_0 b_i n^i, \quad c = \sum_0 c_i n^i$$

В системе имеется одна произвольная функция ($\Phi_{0,s}$ или Ψ_1), остальные функции определяются этой функцией.

Так как в уравнениях присутствует малый параметр $\Psi_0 = \varepsilon$, то разлагаем искомые решения в асимптотические суммы

$$\Phi_i = \sum_{j=0} \Phi_{ij}\varepsilon^j, \qquad \Psi_i = \sum_{j=0} \Psi_{ij}\varepsilon^j \tag{2.4}$$

Подставляя эти суммы в систему (2.3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим новую рекуррентную систему уравнений. Приведем из нее уравнения для первых трех приближений Φ_{i0}, Ψ_{i0}, $i = 0, 1, 2$

$$-a_0\Phi_{00,s}^2 + c_0 = 0, \quad b_0\Psi_{10}^3 - a_1\Phi_{00,s}^2 + c_1 = 0$$
$$2b_0\Psi_{10}\Phi_{20} + a_0\Psi_{10,s}\Phi_{00,s} = 0$$

$$5b_0\Psi_{10}\Psi_{20} + b_1\Psi_{10}^3 - 2a_0\Phi_{00,s}\Phi_{20,s} - a_2\Phi_{00,s}^2 - 4b_0\Phi_{20}^2 + c_2 = 0$$

$$3b_0\Psi_{10}\Phi_{30} + a_0\Psi_{20,s}\Phi_{00,s} + a_1\Psi_{10.s}\Phi_{00,s} + 4b_0\Psi_{20}\Phi_{20} + \\ + 2b_1\Psi_{10}\Phi_{20} = 0$$

Уравнения для вторых приближений Φ_{i1}, Ψ_{i1}, $i = 0, 1$

$$b_0\Psi_{10}^2 - 2a_0\Phi_{00,s}\Phi_{01,s} = 0$$

$$4b_0\Psi_{10}\Psi_{20} + b_1\Psi_{10}^2 + 3b_0\Psi_{10}\Psi_{11} - 2a_1\Phi_{00,s}\Phi_{01,s} = 0$$

$$a_0(\Psi_{10,s}\Phi_{01,s} + \Psi_{11,s}\Phi_{00,s}) + 2b_0(\Psi_{10}\Phi_{21} + \Psi_{11}\Phi_{20}) = 0$$

Уравнения для третьих приближений Ψ_{12}, Φ_{02}

$$-a_0\Phi_{00,s}\Phi_{02,s} - a_0\Phi_{01,s}^2 + b_0\Psi_{10}\Psi_{20} = 0$$

$$3b_0\Psi_{10}^2\Psi_{12} + 3b_0\Psi_{10}\Psi_{11}^2 + 4b_0(\Psi_{10}\Psi_{21} + \Psi_{11}\Psi_{20}) + \\ + 2b_1\Psi_{10}\Psi_{11} - a_1(\Phi_{01,s}^2 + 2\Phi_{00,s}^2\Phi_{02,s}) = 0$$

Выпишем следующие приближения:

$$\Phi_{00} = \pm\int_{s_0}^{s}\sqrt{\frac{c_0}{a_0}}\,ds, \quad \Psi_{10} = \left[\frac{1}{b_0}\left(a_1\frac{c_0}{b_0} - c_1\right)\right]^{1/3}$$

$$\Phi_{01} = \int_{s_0}^{s}\frac{b_0\Psi_{10}}{2a_0\Phi_{00,s}}\,ds$$

Подставляя функцию Φ во второе граничное условие (2.1), получаем уравнение для определения параметра p, а вместе с ним и первого приближения собственной частоты

$$p = 2n\pi\left(\int_{\Gamma}\sqrt{\frac{c_0}{a_0}}\,ds\right)^{-1}$$

Чтобы построить собственную частоту с приемлемой точностью, когда в окрестности ее размера погрешности определения нет другой собственной частоты, надо в разложении (1.9) построить второе приближение, т. е. найти $\varkappa_1$ из условия $[\Phi_1] = 0$. В этом случае погрешность определения λ_{pq} будет порядка $O(p^{-1})$, т. е. существенно меньше среднего интервала между собственными частотами, имеющего порядка $O(1)$. Для построения дальнейших приближений собственных частот колебаний оболочек приведенных здесь уравнений недостаточно, надо исходить из более полных уравнений. Ограничимся поэтому только первым приближением, т. е. определим частоты с погрешностью $O(1)$.

Следует отметить то обстоятельство, что не для каждой области оболочки возможны колебания, локализованные в погранзоне. Как нетрудно убедиться, необходимо, чтобы на границе выполнялось условие

$$b_0^{-1}\left(a_1\frac{c_0}{b_0} - c_1\right) > 0 \quad (2.5)$$

При нарушении этого неравенства не удается построить собственных функций вида (1.8). Это условие является обобщением условия выпуклости граничной кривой в задаче для уравнения Гельмгольца на плоскости [2].

Рассмотрим линию, на которой аргумент функции Эри обращается в нуль, $\Psi = 0$. Эта линия отделяет область оболочки, где решение быстро осциллирует ($\Psi < 0$) от области ($\Psi > 0$), в которой собственные функции быстро убывают при удалении от линии. Данная линия принадлежит к семейству так называемых каустик. Если ограничиться в разложении (2.2) двумя членами, то каустика определяется уравнением

$$n = \Psi_0 \Psi_1^{-1}, \quad \Psi_0 = \varepsilon, \quad \Psi_1 = \Psi_{10} + \varepsilon \Psi_{11}$$

Укажем на некоторые свойства функций Φ, Ψ в окрестности каустики. Пусть уравнения (2.1) преобразованы к координатам (τ, ν), τ — длина дуги каустики, ν — расстояние по нормали к ней. Из уравнений следует

$$\Psi = 0, \; \Phi_{,\tau}{}^2 = ca^{-1}, \; \Phi_{,\nu} = 0$$

Дифференцируя первое уравнение (2.1) по ν и подставляя значения полученных функций, придем к тому, что на каустике

$$\Psi^3_{,\nu} = \frac{1}{b}\left(a_{,n}\frac{c}{a} - c_{,n}\right) = \frac{1}{b_0}\left(a_1\frac{c_0}{a_0} - c_1\right)$$

где a_i, b_i, c_i, $i = 0,1$ — коэффициенты разложения функций a, b, c в ряды Тейлора по ν в окрестности каустики. Ограничение (2.5) на форму границы распространяется также на каустику.

Если ввести систему координат, образованную семейством τ-линий, на которых $\Psi = \text{const}$, и семейством ν-линий, ортогональных к τ-линиям, то решение системы (2.1) имеет вид

$$\Phi = \int_{\tau_0}^{\tau} \sqrt{\frac{c_0(\tau)}{a_0(\tau)}}\, d\tau, \quad \Psi^{3/2} = \frac{3}{2}\int_0^{\nu} b^{-1/2}\left(a_{,\nu}\frac{c}{a} - c_{,\nu}\right)^{1/2} d\nu$$

Формально в этой системе координат происходит разделение координат, функция Φ зависит только от τ, Ψ — только от ν.

Укажем на связь системы (2.1) с уравнением эйконала. Если ввести замену

$$S^+ = \Phi - {}^2/_3 (-\Psi)^{3/2}, \quad S^- = \Phi + {}^2/_3 (-\Psi)^{3/2} \tag{2.6}$$

то система (2.1) сводится к уравнениям

$$(\nabla S^{\pm})^2 = c \tag{2.7}$$

К этим уравнениям (фактически к одному уравнению) свелась бы задача, если бы решение строилось не в форме (1.8), а в форме

$$w = Fe^{ipf}$$

3. Рассмотрим теперь диапазон средних частот квазипоперечных колебаний с большой изменяемостью, когда частоты по величине порядка максимума главных кривизн срединной поверхности, но превышающие этот максимум. Напряженное состояние в данном случае описывается уравне-

ниями (1.1). Ограничиваясь изучением первого приближения, можем в этих уравнениях пренебречь членами с низшими производными. Тогда система сводится к одному уравнению

$$h_1^2\Delta^4 w + \Delta_1^2 w - \lambda^2\Delta^2 w = 0$$

Строим решение в форме (2.10)

$$w = Fe^{ipf}, \quad \lambda^2 = \lambda_0 + p^{-1}\lambda_1 + \ldots, \quad p = h_1^{-1/2} \tag{3.1}$$

Изменяемость решения уравнений (1.1), в сущности, задана, т. е. параметр p в данном случае известен. Асимптотический процесс интегрирования, когда решение представляется в виде (3.1), изложен в работах [5–7]. В отличие от этих работ здесь имеются осциллирующие интегралы, т. е. имеются чисто мнимые решения для функции f.

Как и раньше, будем исследовать колебания, локализованные в достаточно узкой пограничной зоне. Преобразуем уравнение к координатам (s, n), считая для простоты, что граница совпадает с линией главной кривизны.

Первое приближение функции f удовлетворяет следующему уравнению (индекс нуль опускаем):

$$(\nabla f)^8 + (\nabla_1 f)^4 - \lambda_0 (\nabla f)^4 = 0 \tag{3.2}$$

$$(\nabla f)^2 = af_{,s}^2 + bf_{,n}^2, \quad (\nabla_1 f)^2 = a^\circ f_{,s}^2 + b^\circ f_{,n}^2$$

$$a = A^{-2}, \quad b = B^{-2}, \quad a^\circ = A^{-2}R_2^{-1}, \quad b^\circ = B^{-2}R_1^{-1}$$

В работах [5–7] считалось, что функция f на границе задана. В задаче на собственные значения граничное значение не задается, а должно быть определено. Уравнение (3.2) имеет чисто мнимые решения, которые в данном случае являются основными и их надо построить в первую очередь. Оставшиеся действительные и комплексные интегралы определяются граничным значением мнимого решения подобно тому, как в п. 2 определялась функция f (1.12).

Мнимые интегралы уравнения (3.2) строим при помощи замены (2.6), которая позволила заменить уравнение (2.7) системой (2.1), оказавшейся удобной для построения решения в форме рядов

$$f^{\pm} = \Phi \mp {}^2/_3 (-\Psi)^{3/2} \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в (3.2), придем к следующим двум уравнениям для функций Φ, Ψ

$$L_1^4 + 6L_1^2L_2^2 + L_2^4 + L_1^{\circ 2} + L_2^{\circ 2} - \lambda_0 (L_1^2 + L_2^2) = 0$$

$$2L_1L_2 (L_1^2 + L_2^2) + L_1^\circ L_2^\circ - \lambda_0 L_1 L_2 = 0$$

$$L_1 = (\nabla\Phi)^2 - \Psi (\nabla\Psi)^2, \quad L_2 = 2 (-\Psi)^{1/2} (\nabla\Psi, \nabla\Phi)$$

Функционалы L_1°, L_2° получаются заменой в функционалах L_1, L_2 оператора ∇ на ∇_1. Граничные условия для функций Φ, Ψ имеют вид (2.1), т. е. такие же, как в п. 2 (вывод условий (2.1) очевидным образом обобщается на рассматриваемую здесь задачу). Величина функции Ψ на границе по-прежнему мала.

Ищем функции Φ, Ψ в виде рядов (2.2), коэффициенты которых Φ_i, Ψ_i представляем в виде асимптотических сумм (2.4). Выполняя описанную выше процедуру подставления рядов в уравнения и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях n и параметра p, получим рекуррентную систему уравнений. Приведем только уравнения для первых приближений (другие уравнения несколько громоздки и здесь не приводятся; они имеют такую же структуру, что и уравнения п. 2)

$$\Psi_0 = \varepsilon, \quad \Phi_1 = 0, \quad a_0{}^4\Phi_{00,s}^8 + (a_0{}^{\circ 2} - \lambda_0 a_0{}^2)\Phi_{00,s}^4 = 0$$

$$2a_0{}^3 a_1\Phi_{00,s}^6 + (2b_0 a_0{}^3\Phi_{00,s}^4 + b_0{}^\circ a_0\Phi_{00,s}^2 - \lambda_0 b_0 a_0)\Psi_{10}{}^3 + \\ + a_0{}^\circ a_1{}^\circ\Phi_{00,s}^2 - \lambda_0 a_0 a_1\Phi_{00,s}^2 = 0$$

Отбрасывая в уравнении для $\Phi_{00,s}$ нулевые корни, получим

$$a_0{}^4\Phi_{00,s}^4 = \lambda_0 a_0{}^2 - a_0{}^{\circ 2} \tag{3.4}$$

Выше было сделано предположение о том, что рассматриваемые частоты превышают по величине главные кривизны срединной поверхности на всей области. В этом случае правая часть уравнения (3.4) больше нуля и поэтому имеются два чисто мнимые решения

$$a_0{}^2\Phi_{00,s}^2 = -(\lambda_0 a_0{}^2 - a_0{}^\circ)^{1/2} \tag{3.5}$$

Отметим, что ограничения на величины частот можно несколько ослабить и требовать превышения главных кривизн только в некоторой окрестности границы, по размерам превышающей зону осцилляции собственных функций. Такое же ослабление можно сделать для ограничения (1.2) и требовать выполнения неравенства в окрестности границы.

Уравнение для первого приближения Ψ_{10} функции Ψ можно представить в форме

$$\rho\Psi_{10}{}^3 = \gamma, \quad \rho = 2b_0 a_0{}^3\Phi_{00,s}^4 + b_0{}^\circ a_0\Phi_{00,s}^2 - \lambda_0 b_0 a_0$$

$$\gamma = 2a_0{}^3 a_1\Phi_{00,s}^6 + (a_0{}^\circ a_1{}^\circ - \lambda_0 a_0 a_1)\Phi_{00,s}^2$$

Отсюда видно, что коэффициенты уравнения (1.1) и граница должны быть такими, чтобы функция Ψ_{10} была отлична от нуля ($\gamma\rho^{-1} > 0$). Это условие является обобщением условия (2.5). Только при выполнении неравенства возможен и сходится итерационной процесс построения следующих приближений.

Первое приближение собственных частот определяется из условия периодичности функции w по границе

$$p\int_\Gamma \Phi_{00,s}ds = 2n\pi$$

Подставляя значение p из (3.1) и $\Phi_{00,s}$ из (3.5), получим следующее уравнение для λ_0

$$\int_\Gamma a_0^{-1}(\lambda_0 a_0{}^2 - a_0{}^{0\,2})^{1/4}ds = 2n\pi h_1^{1/2}$$

Как и в п. 2, первое приближение собственной частоты не зависит от конкретного вида граничных условий, влияние которых начинает сказываться в следующих приближениях.

Граница осциллирующей погранзоны определяется уравнением $\Psi = 0$, которое в первом приближении имеет вид $n = -\Psi_0 \Psi_{10}^{-1}$.

Кроме осциллирующей части решения, в процедуре удовлетворения граничных условий участвуют еще три быстро убывающих от границы решения вида (3.1). Функции f, входящие в показатель экспоненты, строятся из уравнения (3.2) по граничному значению $f_k = i\Phi$, где Φ определяется формулой (3.5). Эти функции начинают участвовать в итерационном процессе, начиная со второго шага. Отметим, что вопрос построения функций f подробно рассмотрен в работах [6, 7].

Задача о вынужденных колебаниях оболочек с быстро осциллирующими краевыми условиями решается следующим образом. В [6,7] разработан метод интегрирования дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими краевыми условиями в случае, когда все интегралы (3.1) убывают с удалением от границы. Этот метод переносится на задачу о вынужденных колебаниях со следующим изменением. Функции f, являющиеся чисто мнимыми, находятся по предложенному выше методу при заданных граничных значениях. В процессе интегрирования выясняется, совпадает ли заданная частота с собственной. Если совпадения нет, то интегрирование ведется до требуемой асимптотической точности.

Поступила 14 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.
2. *Лазуткин В. Ф.* Асимптотика собственных чисел оператора Лапласа и квазимоды. Серия квазимод, отвечающая системе каустик, близких к границе области. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1973, т. 37, вып. 2.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Теория тонких упругих оболочек. М., Гостехтеориздат, 1953.
4. *Гольденвейзер А. Л.* Классификация интегралов динамических уравнений линейной двумерной теории оболочек. ПММ, 1973, т. 37, вып. 4.
5. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Об асимптотике решений задач с быстро осциллирующими граничными условиями для уравнений с частными производными. Докл. АН СССР, 1958, т. 119, вып. 4.
6. *Гольденвейзер А. Л.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений в частных производных с краевыми условиями, зависящими от параметра. ПММ, 1958, т. 22, вып. 5.
7. *Гольденвейзер А. Л.* Асимптотическое интегрирование линейных дифференциальных уравнений в частных производных с малой главной частью. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.