Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 539.3

О МЕТОДЕ РАСЧЛЕНЕНИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ОБОЛОЧКАХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ С АСИМПТОТИЧЕСКИМИ КРАЯМИ

Н. Н. Рогачева

(Москва)

Для оболочки с неасимптотическими краями метод расчленения напряженного состояния заключается в следующем: полное напряженное состояние оболочки, для которой выполнены все условия применимости безмоментной теории, расчленяется на основное напряженное состояние и простые краевые эффекты. При этом разделяются и граничные условия: тангенциальные выполняются за счет произволов безмоментной теории, нетангенциальные — за счет простых краевых эффектов.

В данной статье показана возможность применить этот метод к расчету оболочек отрицательной кривизны с четырьмя асимптотическими краями. Теория обобщенного краевого эффекта построена в монографии [1]. Здесь для удобства дальнейшего изложения формулы обобщенного краевого эффекта выводятся иным способом. Формулируются граничные условия для безмоментной теории и обобщенного краевого эффекта для различных закреплений краев.

Вся терминология, обозначения, уравнения и соотношения теории оболочек заимствованы из [1].

1. Построим теорию обобщенного краевого эффекта в первом приближении. Криволинейные координаты выберем следующим образом: пусть α-линии совпадают с семейством асимптотических линий, вдоль одной из линий которого проходит асимптотический край, β-линии им ортогональны.

Свойства обобщенного краевого эффекта можно выяснить, раскладывая искомые величины в асимптотические ряды, аналогично сделанному в [2]. Это сопряжено с простыми, но громоздкими рассуждениями. Опуская их, сформулируем окончательные результаты в виде гипотез.

1°. Так же как для простого краевого эффекта, для обобщенного краевого эффекта искомые функции быстро изменяются в направлении, ортогональном к краю, вдоль края они меняются значительно медленнее

$$\frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial\beta} \gg \frac{1}{A}\frac{\partial W}{\partial\alpha}, \qquad \frac{1}{B}\frac{\partial W}{\partial\beta} \gg W$$

Здесь W — любая из искомых величин — перемещения, усилия или моменты.

Будем пренебрегать самой искомой функцией и ее первой производной по α по сравнению с производной по β от той же функции.

2°. Из смещений самым большим является w — нормальное к срединной поверхности. Тангенциальные смещения u и v связаны с w так:

$$w \sim \frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\beta} \sim \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta} \tag{1.1}$$

Формулы (1.1) означают, что w и производные по β от u и v одного порядка.

3°. Из тангенциальных усилий самым большим по величине будет T_1 — нормальное усилие, действующее в сечении $\alpha = \text{const}$. T_2 и S связаны с T_1 следующим образом:

$$\frac{1}{B}\frac{\partial T_2}{\partial \beta} \sim T_1, \qquad \frac{1}{B}\frac{\partial S}{\partial \beta} \sim \frac{1}{A}\frac{\partial T_1}{\partial \alpha}$$

4°. В приближенной теории обобщенного краевого эффекта соотношения упругости для усилий T_2 и S заменяются следующими формулами:

$$\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1 = 0, \qquad \omega = 0 \tag{1.2}$$

Используя сформулированные гипотезы, можно построить теорию обобщенного краевого эффекта первого приближения, поступая так же, как и при построении теории простого краевого эффекта первого приближения, т. е. оставляя в каждом уравнении только главные члены. В частности, так же как в теории простого краевого эффекта, все величины, кроме искомых, можно при дифференцировании по β рассматривать как функции только переменной α.

С учетом первой формулы (1.2) соотношение упругости для T_1 преобразуется к следующему виду:

$$T_1 = \frac{2Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) = 2Eh\varepsilon_1 \tag{1.3}$$

Выражая в формулах (1.2) деформации через смещения и оставляя главные члены, получим

$$\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{1}{R_2'}w = 0, \qquad \frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{2}{R_{12}}w = 0 \tag{1.4}$$

Из изгибных деформаций самой большой является $\varkappa_2$; компонентой $\varkappa_1$ по сравнению с $\varkappa_2$ следует пренебречь. Запишем приближенные формулы для изгибных деформаций

$$\varkappa_2 = \frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2}, \qquad \tau = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial \beta} \tag{1.5}$$

Из моментов, как следует из формул (1.5) и соответствующих соотношений упругости, самым большим является изгибающий момент G_2. Момент G_1 является следствием эффекта Пуассона. Моменты G_1 и $H_1 = -H_2 = H$ связаны с G_2 следующим образом:

$$G_1 = \nu G_2, \qquad \frac{1}{B}\frac{\partial H}{\partial \beta} \sim \frac{1}{A}\frac{\partial G_2}{\partial \alpha}$$

Упрощенные соотношения упругости для моментов примут вид

$$G_2 = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\varkappa_2, \qquad G_1 = -\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\nu\varkappa_2, \qquad H = \frac{2Eh^3}{3(1+\nu)}\tau \tag{1.6}$$

Из перерезывающих усилий, как видно из двух последних уравнений равновесия, бо́льшим будет N_2, с N_1 оно связано следующим образом:

$$\frac{1}{A}\frac{\partial N_2}{\partial \alpha} \sim \frac{1}{B}\frac{\partial N_1}{\partial \beta}$$

Приближенные уравнения равновесия обобщенного краевого эффекта получим, упрощая уравнения равновесия теории оболочек [1]. В первых двух уравнениях равновесия несущественны перерезывающие силы. Отбросим их; кроме того, согласно первой гипотезе, пренебрежем в первом уравнении сдвигающим усилием S по сравнению с производной по β от того же усилия, а в третьем отбросим член $\partial BN_1/\partial\alpha$ по сравнению с $\partial AN_2/\partial\beta$. Точно так же, оставляя главные члены в двух последних уравнениях равновесия, придем к уравнениям

$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}(BT_1)+\frac{\partial S}{\partial\beta}=0,\quad \frac{\partial T_2}{\partial\beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial(B^2S)}{\partial\alpha}-k_\alpha BT_1=0 \tag{1.7}$$

$$\frac{T_2}{R_2'}-\frac{2S}{R_{12}}+\frac{1}{B}\frac{\partial N_2}{\partial\beta}=0,\quad N_2=\frac{1}{B}\frac{\partial G_2}{\partial\beta}$$

$$N_1=\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}(BG_1)-\frac{1}{B}\frac{\partial H}{\partial\beta}-k_\beta G_2 \tag{1.8}$$

$$k_\alpha=\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta},\ k_\beta=\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha},\ S_1=-S_2=S,\ 1/R_1'=0$$

Преобразуем уравнение (1.8). Для этого подставим в правую часть вместо моментов их выражения через смещения по формулам (1.5), (1.6) и получим

$$N_1=-\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{B^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\beta^2}$$

или с учетом (1.5), (1.6)

$$N_1=\frac{1}{A}\frac{\partial G_2}{\partial\alpha} \tag{1.9}$$

Итак, получена система уравнений невырожденного краевого эффекта в первом приближении в оболочках отрицательной кривизны (1.3) — (1.7), (1.9). Для усилий T_2 и S нет соотношений упругости. Это означает, что с некоторой точностью эти усилия являются статическими величинами, т. е. определяются из уравнений равновесия.

2. С использованием второго и третьего уравнений равновесия (1.7) первое уравнение равновесия преобразуется к виду

$$\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{k_\alpha R_{12}}{2R_2'}\right)BT_1+\frac{R_{12}}{2B^2}\frac{\partial^3 G_2}{\partial\beta^3}=0$$

Подставив в полученное уравнение вместо усилий их выражения через смещения, затем выразив w через u, получим разрешающее уравнение обобщенного краевого эффекта, локализованного вблизи края $\beta=\mathrm{const}$, относительно смещения u

$$\left(\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{k_\alpha R_{12}}{2R_2'}\right)\left[B\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}-\frac{k_\alpha R_{12}}{2R_2'}u\right)\right]+\frac{h^2R_{12}^2}{12(1-\nu^2)}\frac{1}{B^5}\frac{\partial^6 u}{\partial\beta^6}=0 \tag{2.1}$$

Если найдено смещение u, остальные неизвестные теории оболочек можно выразить через эту величину при помощи следующих расчетных формул:

$$v=-\frac{R_{12}}{2R_2'}u,\quad w=-\frac{R_{12}}{2}\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\beta} \tag{2.2}$$

$$T_1=2Eh\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}-k_\alpha\frac{R_{12}}{2R_2'}u\right)$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial \beta^2} = 2Eh\left(\frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial \alpha}\frac{B^2}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}B + k_\alpha B\frac{\partial}{\partial \beta}\right)\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} - \frac{k_\alpha R_{12}}{2R_2'}u\right)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = -\frac{2Eh}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[B\left(\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial \alpha} - k_\alpha\frac{R_{12}}{2R_2'}u\right)\right]$$

$$G_1 = \nu\frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)}\frac{R_{12}}{B^3}\frac{\partial^3 u}{\partial \beta^3}, \qquad G_2 = \frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)}\frac{R_{12}}{B^3}\frac{\partial^3 u}{\partial \beta^3}$$

$$H = -\frac{Eh^3}{3(1+\nu)}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{R_{12}}{B^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2}\right)$$

$$N_1 = \frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{R_{12}}{B^3}\frac{\partial^3 u}{\partial \beta^3}\right), \qquad N_2 = \frac{Eh^3}{3(1-\nu^2)}\frac{R_{12}}{B^4}\frac{\partial^4 u}{\partial \beta^4}$$

В дальнейшем понадобится соотношение, связывающее усилия S_2, T_2 и N_2. Для этого преобразуем второе уравнение (1.7) с помощью первого и третьего. В результате будем иметь

$$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{k_\alpha}T_2\right) + \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{1}{ABk_\alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{BR_{12}}{2}N_2\right)\right] - S_2 = 0 \tag{2.3}$$

3. Все коэффициенты в уравнении (2.1) можно рассматривать как функции только от α, поэтому разрешающее уравнение обобщенного краевого эффекта можно проинтегрировать методом разделения переменных. В результате разделения переменных получим уравнение второго порядка по α с переменными коэффициентами, которое, вообще говоря, следует интегрировать численными методами, и уравнение шестого порядка по β с постоянными коэффициентами.

Для некоторых поверхностей разрешающее уравнение можно проинтегрировать, не прибегая к численным методам. Остановимся более подробно на таких частных случаях: 1) срединная поверхность оболочки является минимальной поверхностью, 2) вблизи края $\beta = \mathrm{const}$ асимптотические α-линии являются одновременно и геодезическими.

Для минимальной поверхности координатные линии, совпадающие с асимптотическими, ортогональны. Поэтому в случае 1) нормальные кривизны α- и β-линий равны нулю

$$1 / R_1' = 1 / R_2' = 0 \tag{3.1}$$

В случае 2) геодезическая кривизна асимптотических α-линий вблизи края равна нулю

$$k_\alpha = 0, \qquad 1 / R_1' = 0 \tag{3.2}$$

кроме того

$$1 / R_{12} \neq 0$$

(так как считается, что гауссова кривизна поверхности всюду отлична от нуля).

Выпишем первое уравнение Кодацци

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{A}{R_1'}\right) + \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{B^2}{R_{12}}\right) - k_\alpha\frac{AB}{R_2'} = 0$$

В силу (3.1) и (3.2) это уравнение для рассматриваемых частных случаев упростится

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B^2}{R_{12}}\right)=0$$

и, следовательно, $B^2\,/\,R_{12}$ — функция только от β. Кроме того, так как вблизи края коэффициенты первой квадратичной формы можно считать функциями только от α, то выполним следующую замену переменных:

$$\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\xi}, \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{12(1-\nu^2)}}\sqrt[3]{\frac{R_{12}h}{B^2}}\frac{\partial}{\partial\beta}=\frac{\partial}{\partial\eta}$$

В результате край $\beta=\mathrm{const}$ перейдет в линию $\eta=\mathrm{const}$, а уравнение (2.1) приведется к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^6 u}{\partial\eta^6}=0 \tag{3.3}$$

Воспользовавшись методом разделения переменных, найдем убывающее при удалении от краев решение уравнения (3.3)

$$\begin{aligned}u={}&\{\sin c_n\,\xi\,[A_1e^{k(\eta-\eta_1)}+A_2\sin\sqrt{3}\,k(\eta-\eta_1)+\\&+A_3\cos\sqrt{3}\,k(\eta-\eta_1)]+\cos c_n\,\xi\,[A_4\,e^{k(\eta-\eta_1)}+\\&+A_5\sin\sqrt{3}\,k(\eta-\eta_1)+A_6\cos\sqrt{3}\,k(\eta-\eta_1)]\}e^{k(\eta-\eta_1)}+\\&+\{\sin c_n\,\xi[B_1e^{-k(\eta-\eta_2)}+B_2\sin\sqrt{3}\,k(\eta-\eta_2)+\\&+B_3\cos\sqrt{3}\,k(\eta-\eta_2)]+\cos c_n\,\xi\,[B_4\,e^{-k(\eta-\eta_2)}+\\&+B_5\sin\sqrt{3}\,k(\eta-\eta_2)+B_6\cos\sqrt{3}\,k(\eta-\eta_2)]\}\,e^{-k(\eta-\eta_2)},\ k=\sqrt[3]{c_n}/2\end{aligned} \tag{3.4}$$

Часть решения, заключенная в первые фигурные скобки, представляет краевой эффект вблизи края $\eta=\eta_1$ в области $\eta\leqslant\eta_1$. Во вторых фигурных скобках стоит решение, описывающее краевой эффект у края $\eta=\eta_2$ при $\eta\geqslant\eta_2$. Если расстояние между краями достаточно велико для того, чтобы краевой эффект, возникающий вблизи одного края, успел затухнуть до другого, то взаимным влиянием краев можно пренебречь, и при расчете краевого эффекта у края $\eta=\eta_1$ следует оставлять в (3.4) только первую часть решения, а вблизи края $\eta=\eta_2$ — только вторую. При этом граничные условия на каждом краю можно выполнять раздельно.

Пусть ξ вдоль края $\eta=\eta_1$ меняется в пределах $(-l,\ l)$ (этого всегда можно достигнуть за счет выбора начала отсчета переменной ξ).

Выбрав константу c_n в (3.4) $c_n=\pi n/l$, $n=0, 1, 2, \ldots$, получим решение уравнения (3.3) в виде тригонометрического ряда, n-й член которого определяется формулой (3.4)

Как видно из структуры уравнения (3.3), при его интегрировании на каждом краю $\eta=\mathrm{const}$ можно ставить по три граничных условия. При этом функции, стоящие в правых частях, можно разложить в тригонометрические ряды. Удовлетворяя граничным условиям, определим константы A_i и B_i $(i=1, 2, \ldots, 6)$.

4. Применим выведенную в п. 1, 2 теорию обобщенного краевого эффекта для расчета оболочек отрицательной кривизны с асимптотическими краями методом расчленения напряженного состояния.

При расчете напряженного состояния этим методом возникает необходимость разделения граничных условий на граничные условия для безмоментной теории и условия для краевых эффектов.

В случае, когда края оболочки неасимптотические, как известно (см., например, [1]), безмоментные уравнения интегрируют, выполняя по два тангенциальных условия в каждой точке края. Невязки, появившиеся при этом в нетангенциальных граничных условиях, устраняют с помощью простого краевого эффекта. В результате получатся вторичные невязки в тангенциальных условиях, которые оказываются малыми. На примере защемленного и шарнирно опертого краев легко убедиться, что малость вторичных невязок обеспечивается тем, что в простом краевом эффекте тангенциальные перемещения значительно меньше нормальных.

Асимптотическая линия на поверхности отрицательной кривизны является двукратной характеристикой для безмоментных уравнений, поэтому для оболочек отрицательной кривизны с асимптотическими краями по безмоментной теории может быть выполнено только одно граничное условие на каждом краю. Невязки, получающиеся в оставшихся трех граничных условиях, можно снять с помощью обобщенного эффекта (см. п. 3).

Граничное условие для безмоментной теории надо и в этом случае подобрать так, чтобы были малы вторичные невязки, появляющиеся в результате расчета методом расчленения. При этом возникает трудность, связанная с тем, что из двух тангенциальных граничных условий для безмоментной теории надо сохранить только одно. По аналогии с описанной выше схемой применения метода расчленения к оболочке, имеющей неасимптотические края, примем, что надо оставлять то тангенциальное условие, в котором соответствующее перемещение или усилие в теории обобщенного краевого эффекта оказываются наименьшими (можно проверить непосредственными выкладками, что при этом вторичные невязки действительно оказываются малыми).

Рассмотрим частные случаи.

Защемленный край. Граничные условия на краю $\beta = \beta_0$

$$u = v = w = \gamma_2 = 0$$

Здесь первые два граничные условия — тангенциальные. Не меняя сущности задачи, из них можно составить различные линейные комбинации. Оказывается, что единственное граничное условие для безмоментной теории имеет вид

$$v + \frac{R_{12}}{2R_2'} u = 0, \quad \beta = \beta_0 \tag{4.1}$$

так как в силу первого равенства (2.2) соответствующие тангенциальные перемещения в обобщенном краевом эффекте в первом приближении обращаются в нуль.

Для минимальных поверхностей у края $\beta = \beta_0$ кривизна β-линий равняется нулю ($1 / R'_2 = 0$), и условие для безмоментной теории упростится

$$v = 0, \quad \beta = \beta_0 \tag{4.2}$$

Свободный край. Граничные условия на краю $\beta = \beta_0$

(4.3) $$T_2 = S_2 = G_2 = N_2 = 0$$

Тангенциальными в (4.3) являются первые два условия. Из них можно составить следующую комбинацию:

(4.4) $$\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{k_\alpha}T_2\right) - S_2 = 0$$

которую и надо принять в качестве граничного условия на крю $\beta = \beta_0$ в безмоментной теории. Действительно, в безмоментной теории перерезывающее усилие N_2 мало по сравнению с тангенциальными усилиями T_2 и S_2, поэтому левая часть (4.4) мало отличается от левой части (2.3), и последняя в краевом эффекте приближенно равна нулю.

В частном случае, когда краевая линия геодезическая (например, край — прямолинейный), в краевом эффекте усилие T_2 существенно больше усилия S_2 (см. второе уравнение (1.7)) и вместо условия (4.4) следует взять

(4.5) $$T_2 = 0, \quad \beta = \beta_0$$

Шарнирно опертый край. Граничные условия

$$T_2 = u = w = G_2 = 0, \quad \beta = \beta_0$$

Из двух тангенциальных граничных условий для безмоментной теории следует выбрать

(4.6) $$T_2 = 0, \quad \beta = \beta_0$$

так как в теории краевого эффекта, как видно из формул (2.2), T_2 меньше, чем $2Ehu$.

Граничные условия (4.2), (4.5), (4.6) ранее были получены в [3]. При этом рассматривались частные виды оболочек отрицательной кривизны, для которых эти условия действительно выполняются.

Следует иметь в виду, что для построения приближенной теории обобщенного краевого эффекта были выбраны ортогональные координаты. В то же время для безмоментной теории более удобны сопряженные неортогональные координаты ρ и μ, совпадающие с обоими семействами асимптотических линий. В дальнейшем будем пользоваться и теми и другими координатами, имея в виду, что в обеих системах краевая линия задается одинаковыми уравнениями $\rho = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$ или $\mu = \text{const}$, $\beta = \text{const}$.

Однако вид граничных условий зависит от выбранных координат. Не останавливаясь на переходе от одной координатной системы к другой, выпишем граничные условия в сопряженных координатах (ρ, μ) на краю $\mu = \text{const}$

(4.7) $$u_\mu + 2\,u_\rho \cos\chi = 0 \quad [(4.1)]$$

(4.8) $$T_\mu = 0 \quad [(4.5),\ (4.6)]$$

(4.9) $$\frac{1}{A_\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\left(\frac{1}{A_\rho}\frac{\partial \chi}{\partial \rho} - k_\mu \operatorname{ctg}\chi + \frac{k_\rho}{\sin\chi}\right)^{-1} T_\mu \sin\chi\right] + T_\mu \cos\chi - S_\mu = 0 \; [(4.4)]$$

где χ — угол между координатными линиями. Справа в прямых скобках стоит номер соответствующего граничного условия в ортогональных координатах. Индексы ρ и μ означают, что величины отнесены к сопряженным координатам.

5. Обсудим, при каких условиях будут корректны краевые задачи безмоментной теории. Для простоты рассуждений рассмотрим оболочку отрицательной кривизны, ограниченную прямолинейными асимптотическими линиями (в этом случае безмоментное решение находится при помощи квадратур [4]). Выводы, полученные для этого частного случая, носят общий характер.

Уравнения равновесия в сопряженной системе координат сокращенно можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(A_\mu T_\rho) = F_1(X, Y, Z), \quad \frac{\partial}{\partial \mu}(A_\rho T_\mu) = F_2(X, Y, Z), \quad S_{\rho\mu} = F(Z) \tag{5.1}$$

Справа в (5.1) стоят известные функции от компонентов внешней нагрузки X, Y, Z.

После простых преобразований из соотношений упругости получим дифференциальные уравнения для смещений

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(u_\rho + u_\mu \cos\chi) = f_1(T_\rho, T_\mu, S_{\rho\mu}) \quad \frac{\partial}{\partial \rho}(u_\mu + u_\rho \cos\chi) = = f_2(T_\rho, T_\mu, S_{\rho\mu}) \tag{5.2}$$

Здесь f_1 и f_2 — известные функции от усилий.

Рассмотрим различные комбинации граничных условий, приведенных в п. 4.

Пусть два смежных края защемлены, а два других либо шарнирно оперты, либо свободны. Это значит, что на защемленных краях $\rho = \rho_0$, $\mu = \mu_0$ заданы условия на тангенциальные смещения типа (4.7), а на краях $\rho = \rho_1$, $\mu = \mu_1$ — статические условия вида (4.8), (4.9). В этом случае задача разбивается на два этапа. Первый этап — решение статической задачи. Две произвольные функции, которые появятся в результате интегрирования системы (5.1), определим из статических граничных условий. Второй этап — решение геометрической задачи (5.2), произволы которой определятся из условий на краях $\rho = \rho_0$, $\mu = \mu_0$. Задача при таких условиях корректна.

Если защемлены три края или оболочка защемлена по всему краевому контуру, то, как нетрудно видеть из решения уравнений (5.1), (5.2), все произвольные функции интегрирования определяются из граничных условий.

При всех других закреплениях безмоментная задача будет некорректна.

Для примера рассмотрим оболочку, защемленную по краю $\rho = \rho_0$ и свободную на трех остальных краях (или шарнирно опертую). В этом случае имеем три статических условия типа (4.9), (4.8) на краях $\rho = \rho_1$, $\mu = \mu_1$, $\mu = \mu_0$ и одно геометрическое (4.7) на краю $\rho = \rho_0$. Проинтегрировав уравнения (5.1) и удовлетворив статическим условиям на краях $\rho = \rho_1$ и $\mu = \mu_0$, получим неустранимую невязку на краю $\mu = \mu_1$. Следовательно, одно статическое условие, вообще говоря, не может быть удовлетворено. В то же время для определения перемещений одного условия на краю $\rho = \rho_0$ недостаточно, что означает некорректность задачи.

Такие же случаи получались и при применении метода расчленения к оболочкам с неасимптотическими краями. В статье [5] показано, что существуют приемы устранения некорректности. Устранить некорректность в приведенном случае тоже возможно, но на этом вопросе не будем останавливаться.

Итак, чтобы задача в безмоментной постановке была корректна, у оболочки должны быть защемлены не менее чем два смежных края.

Автор благодарит А. Л. Гольденвейзера за постоянное внимание к работе и ценные замечания.

Поступила 13 IX 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. М., Гостехиздат, 1953.
2. *Гольденвейзер А. Л.* О двумерных уравнениях общей линейной теории тонких упругих оболочек. В сб.: Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды. М., «Наука», 1969.
3. *Visarion V., Stănescu C.* Calculul stărilor de tensiune în teoria placilor curbe. Bucuresti Acad. Republicii Socialiste. Romania, 1969.
4. *Работнов Ю. Н.* Некоторые решения безмоментной теории оболочек ПММ, 1946, т. 10, вып. 5, 6.
5. *Гольденвейзер А. Л., Зверяев Е. М.* Напряженное состояние незакрепленных оболочек нулевой кривизны. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.