Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СВЕДЕНИЯ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ПАРНЫХ РЯДОВ-УРАВНЕНИЙ К БЕСКОНЕЧНЫМ АЛГЕБРАИЧЕСКИМ СИСТЕМАМ

В. М. Александров

(Ростов-на-Дону)

Смешанные задачи теории упругости, гидроаэромеханики и математической физики для областей с частично удаленной на бесконечность границей (полоса, слой, цилиндр, клин, конус и т. д.) часто сводятся к исследованию парных интегральных уравнений. Эти уравнения обычно связаны с использованием некоторого интегрального преобразования, порожденного некоторой задачей Штурма — Лиувилля на полубесконечном интервале.

Смешанные задачи для областей конечных размеров (прямоугольная область, круглая плита, цилиндр конечной длины, шар и т. д.) часто сводятся к исследованию парных рядов-уравнений по какой-либо полной системе ортонормированных с весом функций, порожденных некоторой задачей Штурма — Лиувилля на конечном интервале.

В работе дан метод сведения широкого класса таких парных интегральных уравнений и парных рядов-уравнений к бесконечным алгебраическим системам специального типа. Намечен путь исследования полученных бесконечных систем.

Идея метода ранее изложена в заметке автора [1].

1. Пусть дано линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$(L-u^2)\,y=0,\qquad Ly=r(x)\,[s(x)\,y']'+t(x)\,y\quad (a\leqslant x<\infty) \tag{1.1}$$

Здесь $s(x)>0$ при $x\in(a,\infty)$, $r(x)$ — знакоопределенная при $x\in(a,\infty)$ функция. Пусть также при $x\to\infty$ функции y и y' ограничены, а при $x=a$

$$\alpha_2 y'+\alpha_1 y=0 \tag{1.2}$$

Путем решения указанной задачи Штурма — Лиувилля на полубесконечном интервале построим интегральное преобразование [2, 3]

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(u)\,y(u,x)\,d\rho(u),\qquad F(u)=\int_a^{\infty}\frac{f(x)\,y(u,x)}{r(x)}\,dx \tag{1.3}$$

В формулах (1.3) $y(u,x)$ — собственная функция, а $\rho(u)$ — неубывающая спектральная функция.

Рассмотрим теперь парное интегральное уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty}Q(u)\,K(u)\,y(u,x)\,d\rho(u)=f(x)\qquad (c\leqslant x\leqslant d) \tag{1.4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}Q(u)\,y(u,x)\,d\rho(u)=0\qquad (a\leqslant x<c,\ d<x<\infty)$$

$$K(u)=A\frac{P_1(u^2)}{P_2(u^2)}=A\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{u^2}{\delta_n^2}\right)\left(1+\frac{u^2}{\gamma_n^2}\right)^{-1}\quad (A=\text{const}) \tag{1.5}$$

Здесь $\pm i\delta_n$ и $\pm i\gamma_n$ — счетное множество простых нулей и полюсов. Пусть также δ_n и γ_n монотонно возрастают по модулю с ростом номера, обеспечивая сходимость бесконечного произведения (1.5), а на любой правильной системе контуров C_n в плоскости комплексного переменного u имеет место оценка

$$K(u)\sim O(|u|^p),\quad p\leqslant 1,\ n\to\infty \tag{1.6}$$

Ограничимся ниже рассмотрением случая

$$f(x)=y(i\varepsilon,x) \tag{1.7}$$

имея в виду, что в общем случае функция $f(x)$ может быть представлена интегралом (1.3).

2. Используя то обстоятельство, что применение операции L к функции $y(u,x)$ дает $u^2y(u,x)$, а также учитывая (1.5), перепишем первое соотношение парного интегрального уравнения (1.4) следующим образом:

$$A(P_1(L)q(x)=P_2(L)\,y(i\varepsilon,x)=P_2(-\varepsilon^2)\,y(i\varepsilon,x)\quad (c\leqslant x\leqslant d) \tag{2.1}$$

$$q(x)=\int_{-\infty}^{\infty}Q(u)\,y(u,x)\,d\rho(u) \tag{2.2}$$

Здесь $P_1(L)$ и $P_2(L)$ — дифференциальные операторы по x бесконечного порядка.

Решение дифференциального уравнения (2.1) относительно $q(x)$ можно представить в виде

$$q(x)=K^{-1}(i\varepsilon)\,y(i\varepsilon,x)+\sum_{n=1}^{\infty}H_n(x)\quad (c\leqslant x\leqslant d) \tag{2.3}$$

$$H_n(x)=C_n y(i\delta_n,x)+D_n\eta(i\delta_n,x) \tag{2.4}$$

В формуле (2.3) первое слагаемое есть частное решение неоднородного уравнения, определяемое символическим методом, а бесконечная сумма дает общее решение однородного уравнения, причем функция $\eta(u,x)$ является решением уравнения (1.1), линейно-независимым с $y(u,x)$.

Формула (2.3) вместе со вторым соотношением (1.4) определяют функцию $q(x)$ при всех $x\in[a,\infty)$ с точностью до счетного множества постоянных C_n и D_n. Теперь по формуле обращения (1.3) можем найти неизвестную функцию $Q(u)$ с тем же произволом. С учетом интеграла

$$\int_c^d\frac{y(v,x)\,\eta(w,x)}{r(x)}\,dx=\left\{\frac{s(x)}{v^2-w^2}\,[y'(v,x)\,\eta(w,x)-y(v,x)\,\eta'(w,x)]\right\}_c^d \tag{2.5}$$

где $y(v,x)$ и $\eta(w,x)$ — любые два решения уравнения (1.1), соответствующие $u = v$ и $u = w$, для $Q(u)$ имеем

$$Q(u) = \Big\{ s(x) \Big[-y(u,x) \Big(\frac{y'(i\varepsilon,x)}{K(i\varepsilon)(\varepsilon^2+u^2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n'(x)}{\delta_n^2+u^2} \Big) + \tag{2.6}$$

$$+ y'(u,x) \Big(\frac{y(i\varepsilon,x)}{K(i\varepsilon)(\varepsilon^2+u^2)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(x)}{\delta_n^2+u^2} \Big) \Big] \Big\}_c^d$$

3. Далее постоянные C_n и D_n необходимо определить из условия удовлетворения решением (2.6) первого соотношения (1.4) парного интегрального уравнения.

Принимая во внимание представление функции

$$f^*(x) = \begin{cases} y(i\varepsilon,x) & (c \leqslant x \leqslant d) \\ 0 & (a \leqslant x < c, \ d < x < \infty) \end{cases} \tag{3.1}$$

в форме интеграла (1.3), а также учитывая, что $K(i\delta_n) = 0$, получим после подстановки (2.6) в (1.4) соотношение

$$s(d) \Big\{ K^{-1}(i\varepsilon) [y(i\varepsilon,d) S_d(\varepsilon,x) - y'(i\varepsilon,d) T_d(\varepsilon,x)] + \tag{3.2}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [H_n(d) S_d(\delta_n,x) - H_n'(d) T_d(\delta_n,x)] \Big\} -$$

$$- s(c) \Big\{ K^{-1}(i\varepsilon) [y(i\varepsilon,c) S_c(\varepsilon,x) - y'(i\varepsilon,c) T_c(\varepsilon,x)] +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [H_n(c) S_c(\delta_n,x) - H_n'(c) T_c(\delta_n,x)] \Big\} = 0$$

Здесь введены обозначения

$$T_r(\varkappa,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(u) - K(i\varkappa)}{\varkappa^2+u^2} y(u,r) y(u,x) \, d\rho(u) \tag{3.3}$$

$$S_r(\varkappa,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(u) - K(i\varkappa)}{\varkappa^2+u^2} y'(u,r) y(u,x) \, d\rho(u)$$

Заметим, что мероморфную функцию $K(u)$, при сделанных относительно нее предположениях, можно представить в виде суммы главных значений

$$K(u) = A - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m u^2}{\gamma_m (u^2+\gamma_m^2)}, \quad g_m = \pi i \{[K^{-1}(i\gamma_m)]'\}^{-1} \tag{3.4}$$

Используя (3.4), преобразуем выражения (3.3) следующим образом:

$$T_r(\varkappa,x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m \gamma_m}{\gamma_m^2 - \varkappa^2} \rho_r(\gamma_m,x) \tag{3.5}$$

$$S_r(\varkappa,x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m \gamma_m}{\gamma_m^2 - \varkappa^2} \sigma_r(\gamma_m,x)$$

$$\rho_r(\gamma_m,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(u,r) y(u,x)}{u^2+\gamma_m^2} \, d\rho(u) \tag{3.6}$$

$$\sigma_r(\gamma_m,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y'(u,r) y(u,x)}{u^2+\gamma_m^2} \, d\rho(u)$$

4. Обратим внимание на то обстоятельство, что функции $y\,(i\gamma_m, x)$ и $\eta\,(i\gamma_m, x)$ могут возрастать при $x \to \infty$, однако всегда, как легко доказать, существует их линейная комбинация

$$\zeta\,(i\gamma_m, x) = \beta_1 y\,(i\gamma_m, x) + \beta_2 \eta\,(i\gamma_m, x) \tag{4.1}$$

такая, что при $x \to \infty$

$$\zeta\,(i\gamma_m, x) \to 0, \qquad \zeta'\,(i\gamma_m, x) \to 0 \tag{4.2}$$

Представив функцию $\zeta\,(i\gamma_m, x)$ в форме интеграла (1.3), с учетом ее свойств (4.2), имеем

$$\zeta\,(i\gamma_m, x) = -\,\chi\,(\zeta, a) \tag{4.3}$$

Здесь и далее

$$\chi\,(\alpha, \beta) = s\,(\beta)\,[\alpha\,(i\gamma_m, \beta)\,\sigma_\beta\,(\gamma_m, x) - \alpha'\,(i\gamma_m, \beta)\,\rho_\beta\,(\gamma_m, x)]$$

Добавив к (4.3) соотношение

$$\alpha_1 \rho_a\,(\gamma_m, x) + \alpha_2 \sigma_a\,(\gamma_m, x) = 0 \tag{4.4}$$

вытекающее из граничного условия (1.2), получим систему двух уравнений, из которой найдем $\rho_a\,(\gamma_m, x)$ и $\sigma_a\,(\gamma_m, x)$.

Представим еще четыре разрывных функции в форме интегралов (1.3)

$$\left.\begin{matrix} y\,(i\gamma_m, x) & c \leqslant x \leqslant d) \\ 0 & (a \leqslant x < c,\ d < x < \infty) \end{matrix}\right\} = \chi\,(y, d) - \chi\,(y, c) \tag{4.5}$$

$$\left.\begin{matrix} \eta\,(i\gamma_m, x) & (c \leqslant x \leqslant d) \\ 0 & (a \leqslant x < c,\ d < x < \infty) \end{matrix}\right\} = \chi\,(\eta, d) - \chi\,(\eta, c)$$

$$\left.\begin{matrix} y\,(i\gamma_m, x) & (a \leqslant x \leqslant d) \\ 0 & (d < x < \infty) \end{matrix}\right\} = \chi\,(y, d) - \chi\,(y, a)$$

$$\left.\begin{matrix} \eta\,(i\gamma_m, x) & (a \leqslant x \leqslant d) \\ 0 & (d < x < \infty) \end{matrix}\right\} = \chi\,(\eta, d) - \chi\,(\eta, a)$$

Подставляя в последние два соотношения (4.5) найденные выше выражения $\rho_a\,(\gamma_m, x)$ и $\sigma_a\,(\gamma_m, x)$, получим на основе (4.5) систему четырех уравнений, из которой найдем

$$\begin{aligned} \rho_d\,(\gamma_m, x) &= -\,[C\,(\gamma_m)\,\zeta^*\,(i\gamma_m, a)]^{-1}\,\zeta\,(i\gamma_m, d)\,M_m\,(x) \\ \rho_c\,(\gamma_m, x) &= -\,[C\,(\gamma_m)\,\zeta^*\,(i\gamma_m, a)]^{-1}\,\zeta\,(i\gamma_m, x)\,M_m\,(c) \\ \sigma_d\,(\gamma_m, x) &= -\,[C\,(\gamma_m)\,\zeta^*\,(i\gamma_m, a)]^{-1}\,\zeta'\,(i\gamma_m, d)\,M_m\,(x) \\ \sigma_c\,(\gamma_m, x) &= -\,[C\,(\gamma_m)\,\zeta^*\,(i\gamma_m, a)]^{-1}\,\zeta\,(i\gamma_m, x)\,M_m'\,(c) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \zeta^*\,(i\gamma_m, a) &= \alpha_1 \zeta\,(i\gamma_m, a) + \alpha_2 \zeta'\,(i\gamma_m, a) \\ M_m\,(x) &= y\,(i\gamma_m, x)\,\eta^*\,(i\gamma_m, a) - \eta\,(i\gamma_m, x)\,y^*\,(i\gamma_m, a) \\ y^*\,(i\gamma_m, a) &= \alpha_1 y\,(i\gamma_m, a) + \alpha_2 y'\,(i\gamma_m, a) \\ \eta^*\,(i\gamma_m, a) &= \alpha_1 \eta\,(i\gamma_m, a) + \alpha_2 \eta'\,(i\gamma_m, a) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Обратим внимание, что все функции $\rho_d\,(\gamma_m, x)$, $\rho_c\,(\gamma_m, x)$, $\sigma_d\,(\gamma_m, x)$ и $\sigma_c\,(\gamma_m, x)$ в силу формул (4.1), (4.6) и (4.7) являются линейными комбинациями функций $y(i\gamma_m, x)$ и $\eta(i\gamma_m, x)$. В (4.6) также учтено, что вронскиан функций $y(i\gamma_m, x)$ и $\eta(i\gamma_m, x)$ равен $C(\gamma_m)s^{-1}(x)$.

Подставляя теперь выражения (4.6) вместе с (3.5) в соотношения (3.2) и приравнивая нулю суммы коэффициентов при одинаковых функциях $y(i\gamma_m, x)$ и $\eta(i\gamma_m, x)$, $m=1, 2, \ldots$, получим две бесконечные алгебраические системы для определения постоянных C_n и D_n. Одна из этих систем имеет вид

$$
\begin{aligned}
(4.8)\qquad & \frac{s(d)\eta^*(i\gamma_m, a)}{K(i\varepsilon)(\gamma_m^2-\varepsilon^2)}[y(i\varepsilon, d)\zeta'(i\gamma_m, d)-y'(i\varepsilon, d)\zeta(i\gamma_m, d)]-\\
&-\frac{s(c)\beta_1}{K(i\varepsilon)(\gamma_m^2-\varepsilon^2)}[y(i\varepsilon, c)M_m'(c)-y'(i\varepsilon, c)M_m(c)]+\\
&+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s(d)\eta^*(i\gamma_m, a)}{\gamma_m^2-\delta_n^2}[H_n(d)\zeta'(i\gamma_m, d)-H_n'(d)\zeta(i\gamma_m, d)]-\\
&-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s(c)\beta_1}{\gamma_m^2-\delta_n^2}[H_n(c)M_m'(c)-H_n'(c)M_m(c)]=0
\end{aligned}
$$

Другая система соответствует (4.8) при замене $\eta^*\to y^*$, $\beta_1\to\beta_2$.

5. Перейдем к исследованию парных рядов-уравнений вида

$$
\begin{aligned}
(5.1)\qquad & \sum_{k=0}^{\infty}Q_kK(u_k)y(u_k, x)=f(x)\qquad (c\leqslant x\leqslant d)\\
& \sum_{k=0}^{\infty}Q_ky(u_k, x)=0\qquad (a\leqslant x<c,\ d<x\leqslant b)
\end{aligned}
$$

Здесь $y(u_k, x)$ — система собственных функций задачи Штурма — Лиувилля для дифференциального уравнения (1.1) при граничных условиях

$$
(5.2)\qquad y'(u, a)+\alpha_1y(u, a)=0,\quad y'(u, b)+\alpha_2y(u, b)=0
$$

u_k — счетное множество собственных чисел. Будем предполагать, что в уравнении (1.1) функция $s(x)>0$ при $x\in(a, b)$, $r(x)$ — знакоопределенная функция при $x\in(a, b)$.

Как известно [2,3], функции $y(u_k, x)$ составляют при $x\in[a, b]$ полную ортогональную с весом $r^{-1}(x)$ систему функций, кроме того, нормируем эти функции с тем же весом так, что $||y||=1$.

Функция $K(u)$ в (5.1) имеет вид (1.5) и обладает описанными в п. 1 свойствами.

Ниже ограничимся рассмотрением случая (1.7), имея в виду, что в общем случае функция $f(x)$ может быть разложена в ряд по $y(u_k, x)$.

Используя формулы (1.1) и (1.6), представим первое соотношение уравнения (5.1) в форме, аналогичной (2.1), где

$$
(5.3)\qquad q(x)=\sum_{k=0}^{\infty}Q_ky(u_k, x)
$$

Здесь, как и ранее, $P_1(L)$ и $P_2(L)$ — дифференциальные операторы по x бесконечного порядка.

Решение дифференциального уравнения (2.1) относительно $q(x)$ имеет вид (2.3), где, как уже отмечалось, $\eta(u, x)$ — решение уравнения (1.1), линейно-независимое с $y(u, x)$.

Формула (2.3) вместе со вторым соотношением (5.1) определяют функцию $q(x)$ при всех $x \in [a, b]$ с точностью до счетного множества постоянных C_n и D_n. Теперь, используя ортогональность функций $y(u_k, x)$, можем найти неизвестные постоянные Q_k. С учетом интеграла (2.5) для Q_k имеем

$$Q_k = Q(u_k) \tag{5.4}$$

Здесь $Q(u)$, $H_n(x)$ даются формулами (2.4), (2.6).

6. Далее постоянные C_n и D_n необходимо определить из условия удовлетворения решением (5.4) первого соотношения (5.1).

Принимая во внимание разложение функции $f^*(x) = y(i\varepsilon, x)$, $c \leqslant x \leqslant d$, $f^*(x) = 0$, $a \leqslant x < c$, $d < x \leqslant b$, в ряд по $y(u_k, x)$, а также учитывая, что $K(i\delta_n) = 0$, получим после подстановки (5.4) в (5.1) соотношение (3.2), где вместо (3.3) введены обозначения

$$T_r(\varkappa, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{K(u_k) - K(i\varkappa)}{u_k^2 + \varkappa^2} y(u_k, r)\, y(u_k, x) \tag{6.1}$$

$$S_r(\varkappa, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{K(u_k) - K(i\varkappa)}{u_k^2 + \varkappa^2} y'(u_k, r)\, y(u_k, x)$$

Используя (3.4), преобразуем выражения (6.1) к виду (3.5), где

$$\rho_r(\gamma_m, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y(u_k, r)\, y(u_k, x)}{u_k^2 + \gamma_m^2}, \qquad \sigma_r(\gamma_m, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y'(u_k, r)\, y(u_k, x)}{u_k^2 + \gamma_m^2} \tag{6.2}$$

Имеют также место следующие разложения:

$$y(i\gamma_m, x) = \chi(y, b) - \chi(y, a) \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{6.3}$$

$$\left.\begin{matrix} y(i\gamma_m, x) & (a \leqslant x \leqslant d) \\ 0 & (d < x \leqslant b) \end{matrix}\right\} = \chi(y, d) - \chi(y, a)$$

$$\left.\begin{matrix} y(i\gamma_m, x) & (c \leqslant x \leqslant b) \\ 0 & (a \leqslant x < c) \end{matrix}\right\} = \chi(y, b) - \chi(y, c)$$

Добавляя к (6.3) аналогичные разложения для функций

$$\begin{matrix} \eta(i\gamma_m, x), \\ (a \leqslant x \leqslant b) \end{matrix} \quad \begin{cases} \eta(i\gamma_m, x)\ (a \leqslant x \leqslant d), \\ 0\ (d < x \leqslant b) \end{cases} \begin{cases} \eta(i\gamma_m, x) & (c \leqslant x \leqslant b) \\ 0\ (a \leqslant x < c) \end{cases} \tag{6.4}$$

а также соотношения

$$\sigma_a(\gamma_m, x) + \alpha_1 \rho_a(\gamma_m, x) = 0, \quad \sigma_b(\gamma_m, x) + \alpha_2 \rho_b(\gamma_m, x) = 0 \tag{6.5}$$

вытекающие из граничных условий (5.2), имеем систему восьми уравнений относительно $\rho_r(\gamma_m, x)$, $\sigma_r(\gamma_m, x)$, $r = a, c, d, b$. Решая эту систему и учитывая, что вронскиан функций $\eta(i\gamma_m, x)$, $y(i\gamma_m, x)$ равен $C(\gamma_m)\, s^{-1}(x)$, представим $\rho_r(\gamma_m, x)$ и $\sigma_r(\gamma_m, x)$ при $r = a, c, d, b$ в виде линейных комбинаций $y(i\gamma_m, x)$ и $\eta(i\gamma_m, x)$.

Подставляя теперь в (3.2) выражения (3.5), (6.2) функций $T_r(\varkappa, x)$, $S_r(\varkappa, x)$, а также найденные выражения для $\rho_r(\gamma_m, x)$, $\sigma_r(\gamma_m, x)$, $r = c, d$, затем приравнивая в (3.2) коэффициенты при одинаковых функциях $y(i\gamma_m, x)$, $\eta(i\gamma_m, x)$, $m = 1, 2, \ldots$, получим две бесконечные алгебраические системы для определения постоянных C_n и D_n

$$
\begin{aligned}
(6.6)\qquad & [K(i\varepsilon)(\gamma_m{}^2-\varepsilon^2)]^{-1}[F_{12}(\gamma_m)\xi_d(\varepsilon,\gamma_m)-F_{21}(\gamma_m)\xi_c(\varepsilon,\gamma_m)+\\
& +F_{11}(\gamma_m)(\zeta_x(\gamma_m,\varepsilon))_c{}^d]+\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_m{}^2-\delta_n^2)^{-1}\{C_n[F_{12}(\gamma_m)\xi_d(\delta_n,\gamma_m)-\\
& -F_{21}(\gamma_m)\xi_c(\delta_n,\gamma_m)+F_{11}(\gamma_m)(\zeta_x(\gamma_m,\delta_n))_c{}^d]+\\
& +D_n[F_{12}(\gamma_m)\zeta_d(\delta_n,\gamma_m)-F_{21}(\gamma_m)\zeta_c(\delta_n,\gamma_m)+\\
& +F_{11}(\gamma_m)(\vartheta_x(\gamma_m,\delta_n))_c{}^d]\}=0\\
& [K(i\varepsilon)(\gamma_m{}^2-\varepsilon^2)]^{-1}[F_{22}(\gamma_m)(\xi_x(\varepsilon,\gamma_m))_c{}^d+F_{21}(\gamma_m)\zeta_d(\gamma_m,\varepsilon)-\\
& -F_{12}(\gamma_m)\zeta_c(\gamma_m,\varepsilon)]+\sum_{n=1}^{\infty}(\gamma_m{}^2-\delta_n{}^2)^{-1}\{C_n[F_{22}(\gamma_m)(\xi_x(\delta_n,\gamma_m))_c{}^d+\\
& +F_{21}(\gamma_m)\zeta_d(\gamma_m,\delta_n)-F_{12}(\gamma_m)\quad\zeta_c(\gamma_m,\delta_n)]+\\
& +D_n[F_{22}(\gamma_m)(\zeta_x(\delta_n,\gamma_m))_c{}^d+F_{21}(\gamma_m)\vartheta_d(\gamma_m,\delta_n)-\\
& -F_{12}(\gamma_m)\vartheta_c(\gamma_m,\delta_n]\}=0
\end{aligned}
$$

Здесь введены обозначения

$$
\begin{aligned}
(6.7)\qquad & F_{kl}(\gamma)=A_k(\gamma)B_l(\gamma)E^{-1}(\gamma)\\
& E(\gamma)=A_1(\gamma)B_2(\gamma)-A_2(\gamma)B_1(\gamma)\\
& A_1(\gamma)=y'(i\gamma,a)+\alpha_1 y(i\gamma,a),\quad A_2(\gamma)=\eta'(i\gamma,a)+\alpha_1\eta(i\gamma,a)\\
& B_1(\gamma)=y'(i\gamma,b)+\alpha_2 y(i\gamma,b),\quad B_2(\gamma)=\eta'(i\gamma,b)+\alpha_2\eta(i\gamma,b)\\
& \xi_x(\mu,\gamma)=s(x)[y(i\mu,x)y'(i\gamma,x)-y'(i\mu,x)y(i\gamma,x)]\\
& \zeta_x(\mu,\gamma)=s(x)[\eta(i\mu,x)y'(i\gamma,x)-\eta'(i\mu,x)y(i\gamma,x)]\\
& \vartheta_x(\mu,\gamma)=s(x)[\eta(i\mu,x)\eta'(i\gamma,x)-\eta'(i\mu,x)\eta(i\gamma,x)]
\end{aligned}
$$

7. При выводе уравнений (4.8) и (6.6) предположена линейная независимость системы функций $y(i\gamma_m, x)$ и $\eta(i\gamma_m, x)$, $m = 1, 2, \ldots$. Этот факт может быть обоснован [4], если учесть, что для большинства реальных задач $|\gamma_m|$, $|\delta_m| \sim m$ при $m \to \infty$.

Используя далее асимптотические формулы [2,3,5] для функций $y(i\gamma_m, x)$, $\eta(i\gamma_m, x)$ при больших m, убедимся, что в практически интересных случаях бесконечные системы (4.8) и (6.6) могут быть регуляризованы путем выделения и обращения бесконечной матрицы с элементами $\tau_{mn} = (\gamma_m - \delta_n)^{-1}$.

Для точного обращения указанной матрицы рассмотрим парное интегральное уравнение

$$
\begin{aligned}
(7.1)\qquad & \int_{-\infty}^{\infty} Q(u)K(u)e^{-iux}du = 2\pi e^{-\gamma_k x}\qquad (0\leqslant x<\infty)\\
& \int_{-\infty}^{\infty} Q(u)e^{-iux}du = 0\qquad (-\infty<x<0)
\end{aligned}
$$

Применив к уравнению (7.1) с небольшими видоизменениями изложенную в п. 1—4 методику, найдем

$$(7.2)\qquad q(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{kn}e^{-\delta_n x}\quad(0\leqslant x<\infty),\qquad Q(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{kn}(\delta_n-iu)^{-1}$$

где постоянные σ_{kn} нужно определить из бесконечной системы

$$(7.3)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{kn}\tau_{mn}=\pi g_m^{-1}\delta_{mk}\quad(m=1,2,\ldots)$$

Здесь постоянные g_m имеют вид (3.4), а δ_{mk} — символ Кронекера.

Теперь обратим внимание, что парному уравнению (7.1) соответствует следующее интегральное уравнение первого рода:

$$(7.4)\qquad \int_0^{\infty}q(\xi)k(x-\xi)\,d\xi=e^{-\gamma_k x}\quad(0\leqslant x<\infty),$$

$$k(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(u)e^{-iut}\,du$$

В работе [6] впервые решение уравнения (7.4), (1.5) разыскивалось в форме (7.2), и для определения постоянных была получена бесконечная система (7.3). С другой стороны, точное решение уравнения (7.4), (1.5) может быть найдено методом Винера — Хопфа [6,7]. Сравнивая это точное решение с (7.2), установим, что матрица σ_{kn}, обратная к τ_{mn}, имеет вид

$$(7.5)\qquad \sigma_{kn}=\{K_+'(-i\delta_n)[K_-^{-1}(i\gamma_k)]'(\gamma_k-\delta_n)\}^{-1}$$

$$K_+(u)=K_-(-u)=\sqrt{A}\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{u}{i\delta_m}\right)\left(1+\frac{u}{i\gamma_m}\right)^{-1}$$

Изложенная выше методика решения уравнений типа (1.4) и (5.1) использована автором для изучения парных интегральных уравнений, порожденных синус и косинус интегральными преобразованиями Фурье, а также интегральными преобразованиями Ханкеля, Мелера — Фока, Конторовича — Лебедева, а также для изучения парных рядов-уравнений по тригонометрическим функциям, функциям Бесселя, присоединенным функциям Лежандра. Примеры использования метода для конкретных задач даны в работе [8].

При соответствующем обобщении метод может быть применен для исследования парных рядов-уравнений по собственным функциям задачи типа Штурма — Лиувилля для линейного дифференциального уравнения четвертого порядка. Такие парные ряды встречаются при использовании для изучения смешанных задач метода однородных решений.

Поступила 26 XI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* О решении одного класса парных уравнений. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 1.
2. *Левитан В. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. М., «Наука», 1970.
3. *Марченко В. А.* Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля. Киев, «Наукова думка», 1972.
4. *Бабешко В. А.* К теории и приложениям некоторых интегральных уравнений первого рода. Докл. АН СССР, 1972, т. 204, № 2.
5. *Трикоми Ф.* Дифференциальные уравнения. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
6. *Бабешко В. А.* Об одном асимптотическом методе при решении интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
7. *Александров В. М.* Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
8. *Александров В. М., Чебаков М. И.* Об одном эффективном методе решения парных интегральных уравнений. ПММ, 1973, т. 37, вып. 6.