Прикладная математика и механика. Том 39, 1975

УДК 541.124 : 532.5

# АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ФРОНТА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ЭКЗОТЕРМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

**В. С. Берман, Ю. С. Рязанцев**

(Москва)

Развивается приближенная теория стационарного распространения плоского фронта двухстадийной параллельной экзотермической реакции в конденсированной среде и газе. При построении решений используется метод сращиваемых асипмтотических разложений. Параметром разложения является отношение суммы энергий активаций реакций к конечной температуре, которая определяется в ходе решения задачи. Выявлены характерные предельные режимы, соответствующие различным значениям фигурирующих в задаче параметров. Для каждого из режимов получены приближенные аналитические выражения для скорости волны, распределения концентраций и конечной температуры.

**1. Формулировка задачи.** Стационарное распространение плоского фронта двухстадийной параллельной экзотермической реакции $A_2 \leftarrow A_0 \rightarrow A_1$ в среде может быть описано следующей системой уравнений и граничных условий:

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda \frac{dT}{dx}\right) - mc\frac{dT}{dx} + Q_1 a_0 \rho \Phi_1(T) + Q_2 a_0 \rho \Phi_2(T) = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(D\rho \frac{da_1}{dx}\right) - m\frac{da_1}{dx} + a_0 \rho \Phi_1(T) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(D\rho \frac{da_2}{dx}\right) - m\frac{da_2}{dx} + a_0 \rho \Phi_2(T) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(D\rho \frac{da_0}{dx}\right) - m\frac{da_0}{dx} - a_0 \rho (\Phi_1(T) + \Phi_2(T)) = 0$$

$$\Phi_1(T) = K_1 \exp\left(-\frac{E_1}{RT}\right), \quad \Phi_2(T) = K_2 \exp\left(-\frac{E_2}{RT}\right)$$

$$x = -\infty, \quad a_0 = 1, \quad T = T_-, \quad a_{1-} = a_{2-} = 0$$

$$T_+ = T_- + c^{-1}(Q_1 a_{1+} + Q_2 a_{2+})$$

$$x = +\infty, \quad a_{0+} = 0, \quad \frac{dT}{dx} = \frac{da_1}{dx} = \frac{da_2}{dx} = 0, \quad a_{1+} + a_{2+} = 1$$

Здесь $a_0$, $a_1$, $a_2$ — массовые доли вещества $A_0$, $A_1$ и $A_2$, $\rho$ — плотность, $m$ — массовая скорость горения, $c$ — теплоемкость, $\lambda$ — теплопроводность, $D$ — коэффициент диффузии, $R$ — газовая постоянная, $Q_1$, $Q_2$ — тепловые эффекты реакций, $K_1$, $K_2$ — предэкспоненциальные множители, $E_1$, $E_2$ — энергия активации.

Предполагается, что плотность и все теплофизические характеристики среды сохраняют постоянные значения и что химические реакции идут по первому порядку и их скорости зависят от температуры по закону Аррениуса.

Построение решения двухточечной краевой задачи (1.1) заключается в определении функций $a_1(x)$, $a_2(x)$, $T(x)$ и собственных значений $m$ и $a_{1+}$.

Для существования решения принимается, что функции $\Phi_1$ и $\Phi_2$ отличны от нуля и определяются соответствующими формулами в (1.1) везде, кроме малого интервала температуры $T_- \leqslant T < T_*$, где они обращаются в нуль [1].

Предложенная кинетическая схема аппроксимирует реакцию типа

$$A_0 + B_1 \to A_1, \qquad A_0 + B_2 \to A_2$$

при избытке веществ $B_1$ и $B_2$, а также может служить моделью реакции $A_2 \leftarrow A_0 \to \to A_1 \to A_2$, для которой стадия $A_1 \to A_2$ медленная, протекающая в индукционном режиме.

Экспериментальное изучение параллельной двухстадийной реакции в сосуде проводилось, например, в [2].

Задача (1.1) имеет два первых интеграла

$$\frac{\lambda}{cm}\frac{dT}{dx} = T + \frac{Q_1}{c}\left(\frac{D\rho}{m}\frac{da_1}{dx} - a_1\right) + \frac{Q_2}{c}\left(\frac{D\rho}{m}\frac{da_2}{dx} - a_2\right) - T_- \tag{1.2}$$

$$a_1 + a_2 = 1 - a_0$$

Первое уравнение (1.2) будем использовать вместо первого уравнения (1.1). Считая температуру $T$ независимой переменной, исходную задачу можно представить в виде

$$\frac{db_1}{d\tau} = L\frac{b_1 - B_1}{\Delta}, \qquad \frac{db_2}{d\tau} = L\frac{b_2 - B_2}{\Delta} \tag{1.3}$$

$$\alpha\mu\frac{dB_1}{d\tau} = \sigma_K\frac{1 - \alpha b_1 - (1-\alpha)b_2}{\Delta}\exp\left[-\beta\sigma_E\frac{1+\sigma}{\tau+\sigma}\right]$$

$$(1-\alpha)\mu\frac{dB_2}{d\tau} = (1-\sigma_K)\frac{1 - \alpha b_1 - (1-\alpha)b_2}{\Delta}\exp\left[-\beta(1-\sigma_E)\frac{1+\sigma}{\tau+\sigma}\right]$$

$$\Delta = \tau - \gamma B_1 - (1-\gamma)B_2$$

$$\tau = 0,\ b_1 = B_1 = B_2 = b_2 = 0; \ \tau = 1,\ b_1 = B_2 = B_1 = b_2 = 1$$

$$b_1 = \frac{a_1}{a_{1+}}, \quad b_2 = \frac{a_2}{a_{2+}}, \quad \alpha = a_{1+}, \quad \sigma_E = \frac{E_1}{E_1 + E_2}$$

$$\tau = \frac{T - T_-}{T_+ - T_-}, \quad \mu = \frac{m^2 c}{\lambda(K_1 + K_2)}, \quad \sigma_K = \frac{K_1}{K_1 + K_2}$$

$$\sigma_Q = \frac{Q_1}{Q_1 + Q_2}, \quad \sigma = \frac{T_-}{T_+ - T_-}, \quad L = \frac{\lambda}{D\rho c}, \quad \beta = \frac{E_1 + E_2}{RT_+}$$

$$\gamma = \frac{Q_1\alpha}{Q_1\alpha + Q_2(1-\alpha)} \equiv \frac{\alpha\sigma_Q}{\alpha(2\sigma_Q - 1) + 1 - \sigma_Q}$$

Здесь $b_1$, $B_1$, $b_2$, $B_2$ — искомые функции, $\mu$, $\alpha$ — собственные числа задачи.

Анализ задачи проведем, используя метод сращиваемых асимптотических разложений [3-6]. Предполагаем, что $\beta \gg 1$; для этого достаточно предположить, что одновременно выполняются неравенства

$$\frac{E_1+E_2}{R(T_-+Q_2/c)} \gg 1, \quad \frac{E_1+E_2}{R(T_-+Q_1/c)} \gg 1$$

**2. Распространение фронта реакции в конденсированной фазе.** Уравнения, описывающие распространения фронта экзотермической реакции в $K$-фазе получаются из (1.3), если формально положить $L=\infty$. Тогда

(2.1) $$b_1 = B_1, \quad b_2 = B_2$$

$$\alpha\mu \frac{db_1}{d\tau} = \sigma_K \frac{1-\alpha b_1-(1-\alpha)b_2}{\tau-\gamma b_1-(1-\gamma)b_2} \exp\left[-\frac{\beta\sigma_E(1+\sigma)}{\tau+\sigma}\right]$$

(2.2) $$(1-\alpha)\mu \frac{db_2}{d\tau} = (1-\sigma_K) \frac{1-\alpha b_1-(1-\alpha)b_2}{\tau-\gamma b_1-(1-\gamma)b_2} \exp\left[-\frac{\beta(1-\sigma_E)(1+\sigma)}{\tau+\sigma}\right]$$

(2.3) $$\tau=0, \quad b_1=b_2=0; \quad \tau=1, \quad b_1=b_2=1$$

Здесь следует выделить две области с различным асимптотическим поведением решений: малую окрестность точки $\tau=1$ (внутренняя область) и остальную часть интервала (0, 1). Во внутренней области вместо $\tau$ введем переменную $\tau^*=\beta(1-\tau)$ и будем искать решения в каждой из областей в виде внешних и внутренних разложений

(2.4) $$\begin{gathered} b_1(\tau^*) = f_0(\beta)\, b_{10}(\tau^*) + f_1(\beta)\, b_{11}(\tau^*)\ldots \\ b_1(\tau) = F_0(\beta)\, b_{10}{}^\circ(\tau) + F_1(\beta)\, b_{11}{}^\circ(\tau) + \ldots \\ f_1/f_0 \to 0, \quad F_1/F_0 \to 0, \quad \beta\to\infty \end{gathered}$$

(2.5) $$\begin{gathered} b_2(\tau^*) = n_0(\beta)\, b_{20}(\tau^*) + n_1(\beta)\, b_{21}(\tau^*) + \ldots \\ b_2(\tau^*) = N_0(\beta)\, b_{20}{}^\circ(\tau) + N_1(\beta)\, b_{21}{}^\circ(\tau) + \ldots \\ n_1/n_0 \to 0, \quad N_1/N_0 \to 0, \quad \beta\to\infty \end{gathered}$$

Разложения для собственных чисел $\mu$ и $\alpha$ в обеих областях ищем в виде

(2.6) $$\mu = \varphi_0(\beta)\,\mu_0 + \varphi_1(\beta)\,\mu_1 + \ldots, \quad \varphi_1/\varphi_0 \to 0, \quad \beta\to\infty$$

(2.7) $$\alpha = g_0(\beta)\,\alpha_0 + g_1(\beta)\,\alpha_1 + \ldots, \quad g_1/g_0 \to 0, \quad \beta\to\infty$$

Внешние разложения должны удовлетворять граничным условиям при $\tau=0$, а внутренние — при $\tau=1$ ($\tau^*=0$). Соответствие между разложениями во внешней и внутренней областях устанавливается из условия сращивания, которое состоит в требовании одинакового предельного поведения внутренних и внешних разложений, записанных в одинаковых переменных [3–5]. Ограничимся определением двух членов разложений (2.4)—(2.7).

Рассмотрим сначала случай $\sigma_E = 1/2$. Деля (2.2) на (2.1) и интегрируя, получим

(2.8) $$b_1 \equiv b_2, \quad \alpha = \sigma_K$$

После перехода к переменной $\tau^*$ и подстановки в (2.1), (2.4), (2.6)—(2.8), с точностью до членов более высокого порядка малости по $\beta$ получим

(2.9) $$-\beta\varphi_0\mu_0 \frac{db_{10}}{d\tau^*} = \exp\left[-\frac{\tau}{2(1+\tau)} - \frac{\beta}{2}\right], \quad b_{10}(0)=1$$

Здесь использовалось равенство $f_0 = 1$, которое следует из граничных условий при $\tau^* = 0$. Из (2.9) видно, что следует выбрать

(2.10) $$\varphi_0 = \beta^{-1}\exp(-\beta/2)$$

Тогда из (2.9) следует

(2.11) $$b_{10} = 1 - 2\frac{1+\sigma}{\mu_0} + 2\frac{1+\sigma}{\mu_0}\exp\left[-\frac{\tau^*}{2(1+\sigma)}\right]$$

Приняв во внимание (2.10), можно получить, что решения для $b_1$ во внешней области экспоненциально малы. Поэтому во внешних разложениях (2.4) и (2.5)

$$b_{20}^\circ = b_{10}^\circ = b_{21}^\circ = b_{11}^\bullet = 0$$

Тогда условие сращивания сводится к требованию

(2.12) $$b_{10} \to 0, \quad b_{11} \to 0, \quad \tau^* \to \infty$$

Применяя (2.12) к (2.11), найдем

(2.13) $$\mu_0 = 2(1+\sigma), \quad b_{10} = \exp\left[-\frac{\tau^*}{2(1+\sigma)}\right]$$

Переходя к нахождению двучленных разложений (2.4) и (2.6), из (2.1) в переменной $\tau^*$ получаем

(2.14) $$\varphi_1 = \varphi_1/\beta = \beta^{-2}\exp(-\beta/2), \quad n_1 = f_1 = \beta^{-1}$$

(2.15) $$\frac{db_{11}}{d\tau^*} = \frac{1}{2(1+\sigma)}\left[\frac{\mu_1}{2(1+\sigma)} + \frac{\tau^{*2}}{2(1+\sigma)} - \frac{\tau^*}{1-\exp\left[-\frac{\tau^*}{2(1+\sigma)}\right]}\right] \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{\tau^*}{2(1+\sigma)}\right], \quad b_{11}(0) = 0, \quad b_{11}(\tau^* \to \infty) = 0$$

Из (2.15) найдем

$$\mu_1 = 2(1+\sigma)\left[\frac{\pi^2}{3}(1+\sigma) - 4\right]$$

Запишем в размерных переменных двучленное разложение для массовой скорости распространения горения

(2.16) $$m = \left[\lambda\frac{K_1+K_2}{c}\frac{RT_+}{E_1}\frac{T_+}{T_+-T_-}\right]^{1/2}\left[1 + \frac{RT_+}{E_1}\frac{T_+}{T_+-T_-}\left(\frac{\pi^2}{6}\frac{T_+}{T_+-T_-} - 2\right)\right] \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{E_1}{2RT_+}\right), \quad T_+ = T_- + c^{-1}[Q_1\sigma_K + (1-\sigma_K)Q_2]$$

Заметим, что скорость определяется суммой предэкспоненциальных факторов.

Рассмотрим теперь случай $0 < \sigma_E < {}^1/_2$. Тогда, введя как и ранее, переменную $\tau^*$, из (2.1), (2.2) получаем

(2.17) $$-\alpha\mu\frac{\beta db_1}{d\tau^*} = \sigma_K\frac{1-\alpha b_1-(1-\alpha)b_2}{1-\tau^*/\beta-\gamma b_1-(1-\gamma)b_2}\exp\left[-\sigma_E\beta - \frac{\tau^*\sigma_E}{1+\sigma}\right]$$

(2.18) $$-(1-\alpha)\mu\beta\frac{db_2}{d\tau^*} = (1-\sigma_K)\frac{1-\alpha b_1-(1-\alpha)b_2}{1-\tau^*/\beta-\gamma b_1-(1-\gamma)b_2} \times$$
$$\times \exp\left[-\beta(1-\sigma_E) - \frac{\tau^*(1-\sigma_E)}{1+\sigma}\right]$$

Как и прежде, из (2.3) следует, что $n_0 = f_0 = 1$. Деля (2.17) на (2.18), можно оценить

$$\frac{\alpha}{1-\alpha} = O(\exp[-(1-2\sigma_E)\beta])$$

Отсюда следует, что в разложении (2.6), (2.7) необходимо положить

$$g_0 = 1,\ \alpha_0 = 1,\ g_1 = \exp[-(1-2\sigma_E)\beta],\ \varphi_0 = \beta^{-1}\exp[-\sigma_E / \beta]$$

Учитывая зависимость $\gamma$ от $\alpha$, получаем из (2.17), (2.18)

$$-\mu_0 \frac{db_{10}}{d\tau^*} = \sigma_K \exp\left[-\frac{\tau^*\sigma_E}{1+\sigma}\right],\quad b_{10}(0) = 1 \tag{2.19}$$

$$\alpha_1\mu_1 \frac{db_{20}}{d\tau^*} = (1-\sigma_K)\exp\left[-\frac{\tau^*(1-\sigma_E)}{1+\sigma}\right],\quad b_{20}(0) = 1 \tag{2.20}$$

Аналогично предыдущему случаю справедливо условие (2.12) и $b_{20} \to 0$, $b_{21} \to 0$, $\tau^* \to 0$.

Тогда из (2.19), (2.20) получаем соответственно

$$\mu_0 = (1+\sigma)\frac{\sigma_K}{\sigma_E},\quad b_{10} = \exp\left[-\frac{\tau^*\sigma_E}{1+\sigma}\right]$$

$$\alpha_1 = -\frac{1-\sigma_K}{\sigma_K}\frac{\sigma_E}{1-\sigma_E},\quad b_{20} = \exp\left[-\frac{\tau^*(1-\sigma_E)}{1+\sigma}\right]$$

Отыскивая следующие члены разложения, необходимо положить

$$g_1 = \beta\varphi_1 = \beta^{-1}\exp[-(1-2\sigma_E)\beta],\ n_1 = f_1 = \beta^{-1}$$

Тогда

$$\frac{db_{11}}{d\tau^*} = \frac{\sigma_K}{\mu_0}\left\{\frac{\mu_1}{\mu_0} + \frac{\tau^{*2}\sigma_E}{(1+\sigma)^2} - \frac{\tau^*}{1-\exp[-\tau^*\sigma_E/(1+\sigma)]}\right\}\exp\left[-\frac{\tau^*\sigma_E}{1+\sigma}\right]$$

$$\frac{db_{21}}{d\tau^*} = \frac{1-\sigma_K}{\mu_0\alpha_1}\left\{\frac{\tau^*}{1-b_{10}} - \tau^{*2}\frac{1-\sigma_E}{(1+\sigma)^2} - \frac{\mu_1}{\mu_0} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right\}\exp\left[-\frac{\tau^*(1-\sigma_E)}{1+\sigma}\right]$$

$$b_{11}(0) = b_{21}(0) = b_{11}(\infty) = b_{21}(\infty) = 0$$

Отсюда получаем

$$\mu_1 = (1+\sigma)\frac{\sigma_K}{\sigma_E^2}\left[\frac{\pi^2}{6}(1+\sigma) - 2\right]$$

$$\alpha_2 = \alpha_1\left[-\frac{\mu_1}{\mu_0} - \frac{4}{1-\sigma_E} + \frac{1+\sigma}{1-\sigma_E}J_2(\infty)\right]$$

$$J_2(y) = \int_0^y \frac{ye^{-y}\,dy}{1-\exp\left[-\dfrac{y\sigma_E}{1-\sigma_E}\right]}$$

В размерной форме двучленное разложение для массовой скорости горения имеет вид

$$m = \left[\lambda\frac{K_1}{c}\frac{RT_+}{E_1}\frac{T_+}{T_+-T_-}\right]^{1/2}\left\{1 + \frac{RT_+}{E_1}\left[\frac{\pi^2}{12}\frac{T_+}{T_+-T_-} - 1\right]\right\}\times$$
$$\times\exp\left(-\frac{E_1}{2RT_+}\right),\quad T_+ = T_- + \frac{Q_1}{c}\alpha + \frac{Q_2}{c}(1-\alpha) \tag{2.21}$$

Заметим, что выражение (2.16) не может быть получено из (2.21).

Случай $1/_2 < \sigma_E < 1$ не нуждается в отдельном рассмотрении, так как он полностью аналогичен рассмотренному.

**3. Распространение фронта реакции в газе.** В этом случае $L$ конечно. Наряду с разложениями (2.4)—(2.7) будем искать решение для $B_1$ и $B_2$ в виде внешних и внутренних разложений

(3.1) $$B_1(\tau^*) = \delta_0(\beta) B_{10}(\tau^*) + \delta_1(\beta) B_{11}(\tau^*) + \delta_2(\beta) B_2(\tau^*) + \ldots$$

$$B_1(\tau) = D_0(\beta) B_{10}{}^\circ(\tau) + D_1(\beta) B_{11}{}^\circ(\tau) + \ldots;$$

$$\frac{\delta_1}{\delta_0} \to 0, \quad \frac{D_1}{D_0} \to 0, \quad \beta \to \infty$$

(3.2) $$B_2(\tau^*) = \rho_0(\beta) B_{20}(\tau^*) + \rho_1(\beta) B_{11}(\tau^*) + \rho_2(\beta) B_2(\tau^*) + \ldots$$

$$B_2(\tau) = S_0(\beta) B_{20}{}^\circ(\tau) + S_1(\beta) B_{21}{}^\circ(\tau) + \ldots$$

$$\rho_1 / \rho_0 \to 0, \quad S_1 / S_0 \to 0, \quad \beta \to \infty$$

Рассмотрим сначала случай $\sigma_E = 1/_2$. Деля в (1.3) третье уравнение на четвертое и интегрируя, имеем

(3.3) $$B_1 \equiv B_2, \quad b_1 \equiv b_2, \quad \alpha = \sigma_K$$

Тогда задача сводится к следующей:

(3.4) $$\frac{db_1}{d\tau} = L \frac{b_1 - B_1}{\tau - B_1}, \quad \mu \frac{dB_1}{d\tau} = (\tau - B_1)^{-1} (1 - b_1) \exp\left[-\frac{\beta(1+\sigma)}{2(\tau+\sigma)}\right]$$

(3.5) $$\tau = b_1 = B_1 = 0, \quad \tau = b_1 = B_1 = 1$$

Из граничных условий на горячей границе и из (3.4) следует

(3.6) $$\delta_0 = f_0 = 1, \quad f_1 = \beta^{-1}, \quad \varphi_0(\beta) = \beta^{-2} \exp[-\beta / 2]$$

Аналогично изложенному в п. 2 имеем

(3.7) $$db_{10}/d\tau^* = 0, \quad b_{10}(0) = 1, \quad b_{10} = 1$$

$$\frac{db_{11}}{d\tau^*} = -L, \quad \mu_0 \frac{dB_{10}}{d\tau^*} = \frac{b_{11}}{1 - B_{10}} \exp\left[-\frac{\tau^*}{2(1+\sigma)}\right], \quad B_{10}(0) = 1$$

тогда

(3.8) $$b_{11} = L\tau^*, \quad B_{10} = 1 - \left\{8L \frac{(1+\sigma)^2}{\mu_0} \left[1 - \exp\left[-\frac{\tau^*}{2(1+\sigma)}\right] \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(1 + \frac{\tau^*}{2(1+\sigma)}\right)\right]\right\}^{1/2}$$

Во внешней области из условия сращивания с учетом (3.6) имеем

(3.9) $$F_0(\beta) = 1, \quad \delta_0 = 1, \quad B_{10}{}^\circ = B_{20}{}^\circ = 0$$

Тогда из (1.9) следует

(3.10) $$b_{10}(\tau) = C_1 \tau^L, \quad C_1 = \mathrm{const}$$

Из сращиваемости (3.9) и (3.10) с (3.8) получаем

(3.11) $$C_1 = 1, \quad \mu_0 = 8L(1+\sigma)^2$$

$$B_{10} = 1 - \sqrt{1 - \exp\left[-\frac{\tau^*}{2(1+\sigma)}\right]\left(1 + \frac{\tau^*}{2(1+\sigma)}\right)}$$

Продолжая вычисление следующих членов разложения, необходимо положить

(3.12) $$\varphi_1 = \varphi_0/\beta, \quad F_1 = \beta^{-2}, \quad f_2 = \beta^{-2}$$

тогда

(3.13) $$-\frac{db_{12}}{d\tau^*} = L\tau^*\frac{1-L}{1-B_{10}}, \quad b_{12}(0) = 0$$

$$\frac{dB_{11}}{d\tau^*} = \frac{b_{11}}{\mu_0}(1-B_{10})^{-1}\left[\frac{b_{12}}{b_{11}} - \frac{\tau^{*2}}{2(1+\sigma)^2} - \frac{\tau^*+B_{11}}{1-B_{10}} - \frac{\mu_1}{\mu_0}\right] \times$$
$$\times \exp\left[-\frac{\tau^*}{2(1+\sigma)}\right]$$
$$B_{11}(0) = 0$$

(3.14) $$b_{12} = J_3(x)(1+\sigma)^2 L(L-1), \quad \int_0^x \frac{x\,dx}{\sqrt{1-e^{-x}(1+x)}} = J_3(x)$$

$$x = \frac{\tau^*}{2(1+\sigma)}$$

$$B_{11}(\tau^*) = \frac{-L}{\mu_0(1-B_{10})}\int_0^{\tau^*} x\exp\left(-\frac{x}{2(1+\sigma)}\right) \times$$
$$\times\left[\frac{b_{12}}{b_{11}} - \frac{x^2}{2(1+\sigma)^2} - \frac{\mu_1}{\mu_0} + \frac{x}{1-B_{10}(x)}\right]dx$$

Из условия сращивания с $B_{11}^{\circ}$ получаем

(3.15) $$\frac{\mu_1}{\mu_0} = 2(1+\sigma)J_4(\infty) - 12 - 4(1+\sigma)(L-1), \quad J_4(x) = \int_0^x \frac{t^2e^{-t}\,dt}{\sqrt{1-e^{-t}(1+t)}}$$

$$J_4(\infty) = 2.688$$

Здесь учтено, что во внешнем разложении

(3.16) $$b_{11}(\tau) = C_1\tau^L, \quad C_2 = 4(1+\sigma)^2 L(L-1)\int_0^\infty\left[\frac{x}{\sqrt{1-e^{-x}(1+x)}} - x\right]dx$$

В размерной форме выражение для массовой скорости горения дается формулой

(3.17) $$m = \left[2\lambda\frac{K_1+K_2}{c}L\left(\frac{RT_+}{E_1}\right)\left(\frac{T_+}{T_+-T_-}\right)\left\{1+\frac{RT_+}{E_1}\left[\frac{T_+}{T_+-T_-}-3\right]\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left(-\frac{E_1}{2RT_+}\right)\right], \quad T_+ = T_- + c^{-1}[Q_1\sigma_K + Q_2(1-\sigma_K)]$$

Рассмотрим теперь случай $0 < \sigma_E < 1/2$. Как и в случае конденсированной среды, полагаем

(3.18) $$\alpha = 1 + \exp[-(1-2\sigma_E)\beta]\,[\alpha_1 + \alpha_2/\beta]$$

Тогда для двучленного разложения во внутренней области можно получить

(3.19) $$f_0 = 1,\ f_1 = \beta^{-1},\ f_2 = \beta^{-2},\ \rho_0 = \delta_0 = 1,\ \rho_1 = \delta_1 = \beta^{-1}$$
$$b_{10} = b_{20} = 1,\ \varphi_0 = \beta^{-2}\exp(-\sigma_E\beta),\ \varphi_1 = \varphi_0\beta^{-1}$$

$$(3.20)\qquad -\frac{db_{11}}{d\tau^*}=L,\quad -\frac{db_{21}}{d\tau^*}=L\frac{1-B_{20}}{1-B_{10}},\quad b_{11}(0)=0,\quad b_{21}(0)=0$$

$$\mu_0\frac{dB_{10}}{d\tau^*}=\sigma_K b_{11}\frac{\exp\left(-\frac{\sigma_E\tau^*}{1+\sigma}\right)}{1-B_{10}},\quad B_{10}(0)=1$$

$$\alpha_1\mu_0\frac{dB_{20}}{d\tau^*}=-b_{11}\frac{1-\sigma_K}{1-B_{10}}\exp\left[-\frac{(1-\sigma_E)\tau^*}{1+\sigma}\right],\quad B_{20}(0)=1$$

Во внешней области ищем решение в виде

$$(3.21)\qquad N_0=F_0=1,\ b_{10}=C_3\tau^L,\ N_1=F_1=\beta^{-2},\ b_{11}=C_4\tau^L$$
$$B_{10}{}^\circ=B_{20}{}^\circ=B_{11}{}^\circ=B_{21}{}^\circ=0,\quad b_{20}{}^\circ=C_5\tau^L,\quad b_{21}{}^\circ=C_6\tau^L$$

Интегрируя (3.20) и сращивая с (3.21), получаем

$$(3.22)\qquad b_{11}=-L\tau^*,\quad B_{10}=1-\sqrt{1-\exp\left(\frac{-\tau^*\sigma_E}{1+\sigma}\right)\left(1+\frac{\sigma_E\tau^*}{1+\sigma}\right)}$$

$$\mu_0=2L\sigma_K\cdot\frac{(1+\sigma)^2}{\sigma_E{}^2}$$

$$B_{20}=1-\frac{1-\sigma_K}{2\sigma_K\alpha_1}J_5\left(\frac{\tau^*\sigma_E}{1+\sigma}\right),\quad J_5(x)=\int_0^x\exp\left(-\frac{x(1-\sigma_E)}{\sigma_E}\right)\times$$

$$\times\frac{x\,dx}{\sqrt{1-e^{-x}(1+x)}},\quad b_{21}=-\frac{1+\sigma}{\sigma_E}\frac{L}{J_5(\infty)}\int_0^{\tau^*\sigma_E/1+\sigma}\frac{J_5(x)}{\sqrt{1-e^{-x}(1+x)}}dx$$

$$\alpha_1=\frac{1-\sigma_K}{2\sigma_K}J_5(\infty),\quad C_3=1,\quad C_5=1$$

Для следующих членов разложения находим

$$(3.23)\qquad \frac{db_{12}}{d\tau^*}=\frac{L-1}{1-B_{10}}L\tau^*,\quad b_{12}(0)=0$$

$$\frac{db_{22}}{d\tau^*}=-\frac{L}{(1-B_{10})^2}[(b_{21}-B_{21})(1-B_{10})+(\tau^*+B_{11})(1-B_{20})],$$
$$b_{22}(0)=0$$

$$\frac{dB_{11}}{d\tau^*}=-\frac{\sigma_K}{\mu_0(1-B_{10})}L\tau^*\left[\frac{b_{12}}{b_{11}}-\frac{\tau^{*2}\sigma_E}{(1+\sigma)^2}+\frac{\tau^*}{1-B_{10}}+\frac{B_{11}}{1-B_{10}}-\frac{\mu_1}{\mu_0}\right]\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{\sigma_E\tau^*}{1+\sigma}\right]$$

$$\frac{dB_{21}}{d\tau^*}=-\frac{1-\sigma_K}{\mu_0\alpha_1(1-B_{10})}L\tau^*\left[\frac{b_{12}}{b_{11}}-\tau^{*2}\frac{1-\sigma_E}{(1+\sigma)^2}+\frac{\tau^*}{1-B_{10}}+\frac{B_{11}}{1-B_{10}}-\right.$$
$$\left.-\frac{\mu_1}{\mu_0}-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right]\exp\left[-\frac{\tau^*(1-\sigma_E)}{1+\sigma}\right]$$

После интегрирования

$$(3.24)\qquad b_{12}=J_3\left(\frac{\tau^*\sigma_E}{1+\sigma}\right)L(L-1)\frac{(1+\sigma)^2}{\sigma_E{}^2}$$

Сращивание с (3.21) дает

$$(3.25)\qquad C_4=L(L-1)\frac{(1+\sigma)^2}{\sigma_E{}^2}\int_0^\infty\left[\frac{x}{\sqrt{1-e^{-x}(1+x)}}-x\right]dx$$

$$C_6=\int\limits_0^\infty\left\{-\frac{L}{(1-B_{10})^2}\left[(b_{21}-B_{21})(1-B_{10})+(x+B_{11})(1-B_{20})\right]-L(L-1)x\right\}dx$$

$$B_{11}=-\frac{\sigma_K}{\mu_0(1-B_{10})}L\int\limits_0^{\tau^*}x\exp\left(-\frac{x\sigma_E}{1+\sigma}\right)\left[-\frac{\mu_1}{\mu_0}+\frac{x}{1-B_{10}(x)}-\right.$$
$$\left.-\frac{x^2\sigma_E}{(1+\sigma)^2}+\frac{b_{12}(x)}{b_{11}(x)}\right]dx \tag{3.26}$$

$$B_{21}=\frac{1-\sigma_K}{\mu_0\alpha_1}L\int\limits_0^{\tau^*}\left[\frac{b_{12}}{b_{11}}-x^2\frac{1-\sigma_E}{(1+\sigma)^2}+\frac{x}{1-B_{10}}+\frac{B_{11}}{1-B_{10}}-\frac{\mu_1}{\mu_0}-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right]\times$$
$$\times\exp\left[-\frac{1-\sigma_E}{1+\sigma}x\right]\frac{dx}{1-B_{10}(x)}$$

Полагая $\tau_* \to \infty$, имеем

$$\frac{\mu_1}{\mu_0}=\frac{1+\sigma}{\sigma_E}J_4(\infty)-\frac{6}{\sigma_E}-\frac{2(1+\sigma)}{\sigma_E}(L-1) \tag{3.27}$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1}=\left[\int\limits_0^\infty\frac{\exp\left[-\dfrac{x(1-\sigma_E)}{1+\sigma}\right]}{1-B_{10}(x)}dx\right]^{-1}\int\limits_0^\infty\left[\frac{b_{12}}{b_{11}}-x^2\frac{1-\sigma_E}{(1+\sigma)^2}+\right.$$
$$\left.+\frac{x+B_{11}}{1-B_{10}}-\frac{\mu_1}{\mu_0}\right]\exp\left[-\frac{x(1-\sigma_E)}{1+\sigma}\right]\frac{dx}{x}$$

В размерном виде двучленное выражение для массовой скорости горения газа записывается как

$$m=\left[2\lambda\frac{K_1}{c}L\exp\left(-\frac{E_1}{RT_+}\right)\right]^{1/2}\left(\frac{T_+}{T_+-T_-}\right)\frac{RT_+}{E}\left\{1+\frac{RT_+}{E_1}\times\right.$$
$$\left.\times\left[\frac{T_+}{T_+-T_-}(2.344-L)-3\right]\right\} \tag{3.28}$$

**4. Обсуждение результатов.** Найдены двучленные разложения для скорости и конечной температуры горения. Учет нескольких членов в разложении для температуры горения весьма важен. Так, при учете лишь первого члена в разложении для $\alpha$ имеем

$$T_+^{(0)}=T_-+Q_1/c$$

Конечная температура равна адиабатической температуре горения первой реакции. При учете двух членов разложения в случае конденсированной фазы

$$T_+^{(1)}=T_-+\frac{Q_1}{c}+\frac{K_2}{K_1}\frac{E_1}{E_2}\exp\left[-\frac{E_2-E_1}{RT_+^{(1)}}\right]\left(\frac{Q_2-Q_1}{c}\right) \tag{4.1}$$

а для газа

$$T_+^{(1)}=T_-+\frac{Q_1}{c}+\frac{K_2}{2K_1}J_5(\infty,\sigma_E)\exp\left[-\frac{E_2-E_1}{RT_+^{(1)}}\right]\left(\frac{Q_2-Q_1}{c}\right) \tag{4.2}$$

Как показано в [6], асимптотические разложения, полученные при $\beta\to\infty$ с достаточной точностью, описывают решение и при $\beta=O(1)$. Типичным является значение $\beta=10$. Отметим, что, проводя разложения, $\beta$ считалось большим, но оставалось неизвестным, а $\sigma_K, \sigma_Q, \sigma_E\sim O(^1/_2)$.

Рассмотрим в качестве примера реакцию, протекающую в $K$-фазе со следующими физико-химическими параметрами: $E_1 = 20$ *ккал/моль*, $E_2 = 25$ *ккал/моль* ($\sigma_E = {}^4/_9$), $T_- = 300\,°K$, $c = 0{,}25$ *кал/г·град* $K°$, $Q_1 = 125$ *кал / г*, $Q_2 = 250$ *кал / г* ($\sigma_Q = {}^1/_3$), $K_2 \,/\, K_1 = 3{,}4$ ($\sigma_K \approx 0.23$).

Тогда $T_+^{(0)} = 800\,°K$, $T_+^{(1)} = 880\,°K$, $m(T_+^{(0)})/m(T_+^{(1)}) = 0.55$. Аналогичные результаты можно получить и в случае экзотермической реакции в газе.

Подчеркнем, что выражения для массовой скорости (2.21) и (3.28) при $\sigma_E < {}^1/_2$ имеют вид, аналогичный выражению для массовой скорости в случае протекания только одной первой реакции, влияние второй реакции сказывается через величину $T_+$.

В общем случае при различной зависимости $K_1$ и $K_2$ от давления конечная концентрация $a_{1+}$ и температура $T_+$ являются также функциями давления. Адиабатическая температура горения $T_+^{(1)}$ является корнем уравнений (4.1) и (4.2). Эти уравнения можно решить, например, методом итераций, используя в качестве начального значения $T_+^{(0)}$ из (4.1).

Так, при $K_1 = K_{10}p^{\nu_1}$ и $K_2 = K_{20}p^{\nu_2}$ имеем $\sigma_K = K_{10}p^{\nu_1} \,/\, K_{10}p^{\nu_1} + K_{20}p^{\nu_2}$. Важной характеристикой процесса является коэффициент зависимости скорости горения от давления $\nu = \partial \ln m \,/\, \partial \ln p$. Из (2.21) и (3.28) при $0 < \sigma_E < {}^1/_2$ следует

$$\nu = \nu_{1/2} + \frac{\partial \ln m}{\partial T_+} \frac{\partial T_+}{\partial \ln p}$$

Обычно $\partial m \,/\, \partial T_+ > 0$, а знак $\partial T_+ \,/\, \partial \ln p$ в зависимости от значений величин $p$, $\sigma_K$, $E_1$ и $E_2$ может быть как положительным, так и отрицательным. Вследствие этого коэффициент $\nu$ может быть больше или меньше, чем в случае протекания только одной первой реакции.

Поступила 19 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА


1. *Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А.* Теория теплового распространения пламени. Ж. физ. хим., 1938, т. 12, вып. 1.
2. *Гончаров Е. П., Мержанов А. Г., Штейнберг А. С.* Термическое разложение конденсированных систем при повышенных температурах. В сб.: Горение и взрыв. М., «Наука», 1972, стр. 765.
3. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной математике. М., «Мир», 1972.
4. *Берман В. С., Рязанцев Ю. С.* Применение метода сращиваемых асимптотических разложений к расчету стационарного теплового распространения фронта экзотермической реакции в конденсированной среде. ПМТФ, 1972, № 5.
5. *Берман В. С., Рязанцев Ю. С.* Асимптотический анализ стационарного распространения фронта двухстадийной экзотермической реакции в газе. ПММ, 1973, т. 37, вып. 6.
6. *Bush W. B., Fendell F. E.* Asymptotic analysis of the structure of a steady planar detonation. Combustion Sci. and Technology, 1971, vol. 1, p. 272—285.